A8. Teoría de la demanda del consumidor (I). Axiomas sobre las preferencias, función de utilidad y función de demanda marshalliana. La teoría de la preferencia revelada. Precios hedónicos

1. Fundamentos de la demanda del consumidor

La teoría neoclásica parte de un consumidor racional que maximiza su utilidad con una renta exógena, en un marco estático y de certidumbre.

1.1. Conjunto de elección y preferencias

1.1.1. Conjunto de elección y relaciones binarias

Definición: el **conjunto de elección**, CE, reúne todas las cestas físicamente consumibles, vectores de n bienes no negativos y divisibles. Es no vacío, cerrado y acotado inferiormente.

Sobre él se definen tres relaciones binarias: la indiferencia, $\sim$, la preferencia estricta, $\succ$, y la preferencia débil, $\succsim$, que se lee "al menos tan preferido como" y de la que se derivan las otras dos.

Para que la elección tenga sentido económico, esas relaciones deben cumplir axiomas de orden y de regularidad.

1.1.2. Axiomas de orden

Completitud: ante dos cestas cualesquiera, el consumidor siempre puede ordenarlas: $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ o ambas, y entonces le son indiferentes.

Reflexividad: toda cesta es al menos tan buena como ella misma, $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^0$.

Transitividad: si $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$, entonces $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^2$ (coherencia lógica entre comparaciones).

Los tres dan un **preorden completo débil**: todas las cestas se ordenan, con empates, y la elección es racional. No basta, sin embargo, para asignar un número a cada cesta (las preferencias lexicográficas son el contraejemplo clásico).

1.1.3. Axiomas de regularidad

Continuidad: pequeños cambios en las cantidades no provocan saltos en las preferencias, es decir, los conjuntos de contorno superior e inferior son cerrados.

No saturación local: en cualquier entorno de una cesta hay otra estrictamente preferida, de modo que no hay zonas de saciedad y el óptimo agota la renta.

Monotonía: más es mejor. Una cesta con al menos tanto de todo y más de algún bien es estrictamente preferida. Es más fuerte que la no saturación local, porque excluye los males.

Convexidad: si dos cestas son indiferentes, cualquier combinación convexa de ellas es al menos tan buena como cada una:

$$\mathbf{x}^0 \sim \mathbf{x}^1 \to \theta\mathbf{x}^0 + (1-\theta)\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0, \quad \theta \in (0,1)$$

- Recoge la preferencia por la variedad. Con convexidad estricta, la utilidad es estrictamente cuasicóncava, la RMS estrictamente decreciente y el óptimo único.

Diferenciabilidad: la utilidad es al menos dos veces diferenciable, sin vértices en las curvas de indiferencia, lo que permite usar las condiciones de Kuhn-Tucker.

1.2. Utilidad y curvas de indiferencia

1.2.1. Función de utilidad

Definición: una **función de utilidad** asigna a cada cesta un índice que respeta el orden de las preferencias: $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1 \leftrightarrow u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^1)$.

Existencia: por el teorema de representación de Debreu, los axiomas de orden y el de continuidad bastan para que exista una utilidad continua. Los demás axiomas le dan propiedades analíticas convenientes.

Propiedades: es continua y dos veces diferenciable, estrictamente creciente en cada bien, con utilidades marginales positivas por monotonía, y estrictamente cuasicóncava por convexidad estricta.

Es **ordinal**: solo importa el orden, no la magnitud, y cualquier transformación $v = f(u)$ con $f' > 0$ representa las mismas preferencias. Además, no es observable, porque solo lo son las elecciones.

1.2.2. Curvas de indiferencia

Definición: una **curva de indiferencia** es el lugar geométrico de las cestas que dan un mismo nivel de utilidad, es decir, un corte a utilidad constante de la superficie de utilidad.

Propiedades: cada una procede de un axioma.

- Por transitividad, y no por monotonía, no se cortan, porque si lo hicieran, cestas de niveles distintos de utilidad tendrían que ser indiferentes.
- Por monotonía, tienen pendiente negativa, y las más alejadas del origen representan más utilidad.
- Por convexidad, son convexas respecto al origen. Solo lo son en sentido débil si tienen tramos rectos, como con sustitutivos o complementarios perfectos.

1.2.3. Pendiente: la RMS

Definición: la **relación marginal de sustitución** del bien j por el bien i, el precio relativo subjetivo de los dos bienes, mide a cuántas unidades de j renuncia el consumidor por una unidad más de i sin cambiar su utilidad ni el consumo de los demás bienes.

Se obtiene de la diferencial total de la utilidad igualada a cero y, con dos bienes, 1 y 2, es el valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia:

$$\mathrm{RMS}_{ji} = -\left.\frac{dx_j}{dx_i}\right|_{du=0} = \frac{u_i'}{u_j'} \geq 0, \qquad \mathrm{RMS}_{21} = \frac{u_1'}{u_2'}$$

Como es un cociente de utilidades marginales, no depende de cómo se mida la utilidad, a diferencia de la utilidad marginal decreciente.

Con convexidad estricta la **RMS es decreciente**: cuanto más bien 1 tiene el consumidor, menos bien 2 está dispuesto a ceder por otra unidad. Con preferencias de "todo o nada", las curvas serían cóncavas y el óptimo, de esquina.

1.2.4. Forma: la elasticidad de sustitución

Definición: la **elasticidad de sustitución** de Hicks (1932) mide la facilidad del intercambio, es decir, cuánto varía en porcentaje la proporción consumida cuando la RMS varía un uno por ciento a lo largo de una curva de indiferencia, con el consumo de los demás bienes constante:

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial \ln(x_j/x_i)}{\partial \ln \mathrm{RMS}_{ji}} \geq 0$$

Clasificación: con $\sigma_{ji} = \infty$ hay sustitutivos perfectos y curvas lineales; con $\sigma_{ji} = 0$, complementarios perfectos y curvas angulares, tipo Leontief; entre ambos, sustitutivos imperfectos, como la Cobb-Douglas, con $\sigma_{ji} = 1$.

Gráficamente, mide la curvatura: cuanto mayor es σ, más plana es la curva. Con más de dos bienes, la elasticidad de sustitución de Allen (1938), $\sigma_{ij}^{\text{Allen}}$, deja que se ajuste el consumo de los demás.

1.3. Restricción presupuestaria

Definición: las preferencias dicen qué desea el consumidor. Unos precios positivos, $\mathbf{p}$, y una renta fija, M_0, dicen qué puede pagar. El **conjunto asequible**, $\mathrm{CA} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{CE} : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq M_0\}$, es no vacío, cerrado, acotado y convexo, y hace el problema genuinamente económico. Es acotado porque los precios positivos y la renta finita limitan el consumo de cada bien, y convexo porque es la intersección de un semiplano con el ortante no negativo.

Recta de balance: por monotonía se agota la renta y la restricción se cumple con igualdad. Con dos bienes:

$$x_2 = \frac{M_0}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

- Corta los ejes en M_0/p_1 y M_0/p_2, y su pendiente, $-p_1/p_2$, es el precio relativo objetivo (lo que el mercado exige del bien 2 por cada unidad del bien 1).
- Como una de las tres variables sobra, puede escribirse en términos reales, tomando un bien o la renta como numerario. Con el bien 2 como numerario, $\frac{p_1}{p_2}x_1 + x_2 = \frac{M_0}{p_2}$, y con la renta, $\frac{p_1}{M_0}x_1 + \frac{p_2}{M_0}x_2 = 1$.

Bien compuesto: si los precios de un grupo de bienes se mueven a la par, su gasto, G, se trata como un solo bien, $p_1x_1 + G \leq M_0$, y el problema de n bienes se reduce a dos dimensiones.

1.4. Decisión de consumo y demanda individual

1.4.1. Equilibrio del consumidor

Planteamiento: el consumidor elige la cesta que maximiza su utilidad dentro de su presupuesto y sin consumos negativos:

$$\max_{\mathbf{x}} \; u(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq M_0 \\ x_i \geq 0 \; \forall i \end{cases}$$

- En el lagrangiano, $\mathcal{L} = u(\mathbf{x}) + \lambda(M_0 - \sum_i p_i x_i)$, el multiplicador λ es el precio sombra de la renta, es decir, la utilidad marginal de la renta en el óptimo. Formalmente, $\lambda = \partial u^*/\partial M \equiv u_M'$.

CPO: las condiciones de Kuhn-Tucker exigen, para cada bien:

$$u_i' - \lambda p_i \leq 0, \quad x_i \geq 0, \quad x_i\,(u_i' - \lambda p_i) = 0$$

- Por la holgura complementaria, o el bien se consume y la condición se cumple con igualdad, o no se consume. Por monotonía, $\lambda > 0$ y se agota la renta.

CSO: como la restricción es lineal, las CPO son suficientes si la utilidad es cuasicóncava, y el máximo es único si lo es estrictamente.

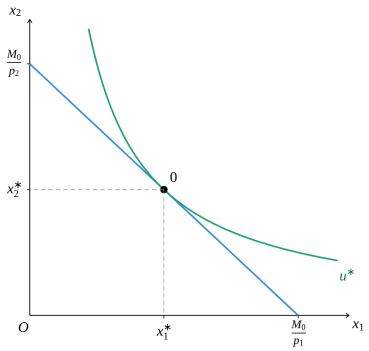
Solución interior: la RMS, que es subjetiva, iguala el precio relativo, que es objetivo. Dicho de otro modo, la utilidad marginal por euro gastado es la misma en todos los bienes e igual a λ, que es la segunda ley de Gossen. Para cada par de bienes i, j:

$$\mathrm{RMS}_{ji} = \frac{p_i}{p_j} \;\Leftrightarrow\; \frac{u_i'}{p_i} = \frac{u_j'}{p_j} = \lambda$$

- Si la igualdad no se cumpliera, reasignar el gasto de un bien a otro elevaría la utilidad.

Solución de esquina: con dos bienes, si $x_2^* = 0$, la valoración subjetiva del bien 1 es al menos su precio relativo, $\text{RMS}_{21} \geq p_1/p_2$, y toda la renta va al bien 1. Si $x_1^* = 0$, la desigualdad se invierte.

Desarrollo gráfico: el equilibrio 0 es la tangencia entre la curva de indiferencia más alta alcanzable, u^*, y la recta de balance, en la cesta (x_1^*, x_2^*).



Equilibrio del consumidor: tangencia de la curva de indiferencia más alta con la recta de balance.

1.4.2. Demanda marshalliana

Definición: resolviendo las CPO, por el teorema de la función implícita, la cantidad óptima de cada bien depende solo de los precios y la renta (**demandas marshallianas**, ordinarias o walrasianas):

$$x_i^m = d_i(\mathbf{p}, M) = d_i(k\mathbf{p}, kM)$$

- La solución existe por el teorema de Weierstrass, porque el conjunto asequible es compacto y la utilidad continua, y es única por la cuasiconcavidad estricta.
- Con una Cobb-Douglas, $u = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, la solución es interior, la tangencia da $p_2 x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} p_1 x_1$ y cada bien absorbe una fracción constante del gasto:

$$x_1^m = \frac{\alpha M}{p_1}, \qquad x_2^m = \frac{(1-\alpha)M}{p_2}$$

Propiedades:

- Son continuas, por el teorema del máximo, y diferenciables si la utilidad es regular, lo que permite la estática comparativa.
- Son **homogéneas de grado cero** en precios y renta: multiplicar todo por k no cambia nada, porque el consumidor no padece ilusión monetaria. Tampoco cambian ante transformaciones monótonas de la utilidad, porque la cesta óptima depende de las preferencias y no de su representación.
- Agotan la renta, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = M$, que en el agregado es la ley de Walras.
- Coinciden con las hicksianas (las que minimizan el gasto para una utilidad dada) evaluadas en la utilidad máxima, $d_i(\mathbf{p}, M) = h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M))$, y, si su matriz de Slutsky es simétrica y semidefinida negativa, de ellas pueden recuperarse las preferencias que las generan, propiedad de integrabilidad.
- Respecto al precio propio pueden tener cualquier pendiente, porque combinan el efecto renta y el efecto sustitución. Respecto a la renta, crecen para los bienes normales y decrecen para los inferiores.
- Son observables, a diferencia de la utilidad.

1.4.3. Función indirecta de utilidad

Definición: llevando las demandas a la utilidad se obtiene la **función indirecta de utilidad**, la utilidad máxima alcanzable con cada combinación de precios y renta:

$$v(\mathbf{p}, M) = u(d_1(\mathbf{p}, M), \dots, d_n(\mathbf{p}, M))$$

De ella se recuperan las demandas con la identidad de Roy, $d_i = -(\partial v/\partial p_i)/(\partial v/\partial M)$. Con la Cobb-Douglas y $\alpha = 1/2$, $v = M/(2p_1^{1/2}p_2^{1/2})$.

En suma, con pocos axiomas la teoría obtiene una utilidad ordinal y demandas con propiedades contrastables. Sus límites son unos axiomas de regularidad elegidos por conveniencia analítica, un marco estático y una utilidad que no se observa.

2. Estática comparativa

Conocida la demanda marshalliana, la estática comparativa estudia cómo responde a cambios en la renta y en los precios, para identificar leyes de demanda y construir la curva de demanda individual y, por agregación, la de mercado.

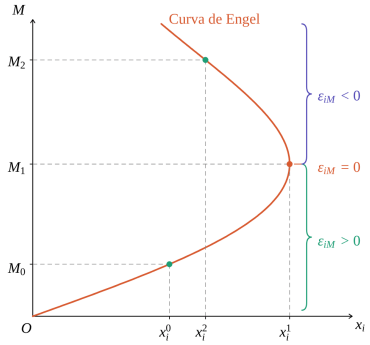
2.1. Cambios en la renta

2.1.1. Curva renta-consumo y curva de Engel

Un cambio de la renta, con precios y preferencias constantes, desplaza en paralelo la recta de balance, porque su pendiente no varía, y el nuevo equilibrio está en una curva de indiferencia más alejada del origen, o más próxima si la renta cae. Su efecto es $\partial d_i/\partial M$, cuyo signo no fijan los axiomas.

Curva renta-consumo: une las cestas óptimas al variar la renta. Tiene pendiente positiva si ambos bienes son normales, se inclina hacia el eje del bien normal si el otro es inferior y, aunque su forma puede ser irregular, es una recta desde el origen con preferencias homotéticas.

Curva de Engel: proyecta esa curva sobre el plano cantidad-renta, $x_i^* = f_i(M)$. Es creciente para un bien normal, más que proporcionalmente si es de lujo, decreciente para uno inferior y una recta desde el origen con preferencias homotéticas.



Curva de Engel: el bien es normal hasta M_1 e inferior a partir de ese nivel.

2.1.2. Elasticidad-renta

Definición: la **elasticidad-renta** es la variación porcentual de la cantidad demandada ante una variación porcentual de la renta, a precios constantes. Gráficamente, es la elasticidad de la curva de Engel en cada punto:

$$\varepsilon_{iM} = \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i}$$

2.1.3. Clasificación de los bienes

Clasificación: un bien es inferior si $\varepsilon_{iM} < 0$, como las marcas blancas; frontera si es nula, y normal si es positiva. Entre los normales, es de primera necesidad si está entre cero y uno, como el pan; de elasticidad unitaria si vale uno, con una participación en el gasto que no varía, y de lujo si supera la unidad. Si todos los bienes tienen elasticidad unitaria, las preferencias son homotéticas.

La clasificación no es del bien, sino de su relación con el consumidor. El transporte público puede ser normal para una renta e inferior para otra.

Ley de Engel (1857): al crecer la renta, cae la fracción que se dedica a alimentos, y por eso esa fracción sirve como indicador del nivel de vida.

En política económica, la elasticidad-renta explica cómo cambia la estructura del consumo con el crecimiento y la progresividad de los impuestos indirectos: gravar los bienes de primera necesidad es regresivo y gravar los de lujo, progresivo.

2.2. Cambios en los precios

Si todos los precios varían en la misma proporción, la homogeneidad hace que equivalga a un cambio de renta de signo contrario. Si varía un solo precio, cambian a la vez el precio relativo y el poder adquisitivo de la renta.

2.2.1. Efectos sustitución y renta: Slutsky

Para separar los dos efectos hay que definir la renta real constante.

- Para Slutsky (1915), es la que permite comprar la cesta inicial a los nuevos precios. Es observable y no exige conocer las preferencias.
- Para Hicks (Hicks y Allen, 1934), es la que permite alcanzar la utilidad inicial. Exige conocer las preferencias, pero aísla el efecto sustitución puro. Ambas coinciden para cambios infinitesimales.

La definición de Hicks requiere la **demanda hicksiana o compensada**, $h_i(\mathbf{p}, u_0)$: la cantidad que minimiza el gasto necesario para alcanzar la utilidad u_0.

Ecuación de Slutsky: el efecto total de p_j sobre el bien i se descompone en un efecto sustitución y un efecto renta:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j}}_{\text{ET}} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}}_{\text{ES}} \underbrace{- \frac{\partial x_i^m}{\partial M} x_j}_{\text{ER}}$$

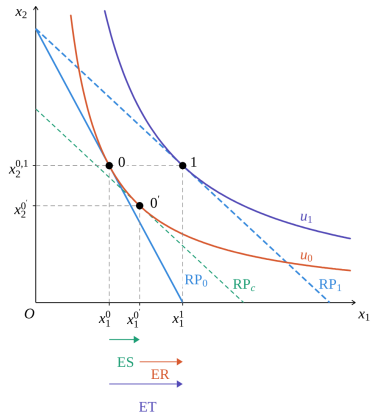
- El término x_j mide cuánto poder adquisitivo se pierde por cada unidad que sube p_j.
- Si la renta procede de vender una dotación inicial, ω_j, aparece un efecto renta-dotación de signo contrario al ordinario, y el efecto renta depende de la demanda neta, $z_j = x_j^m - \omega_j$. Así, el vendedor neto de un bien normal puede demandar más de él cuando sube su precio sin que el bien sea Giffen:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^m}{\partial M} z_j$$

Efecto sustitución: es el movimiento a lo largo de la curva de indiferencia inicial. El propio es **siempre no positivo** (ley de la demanda compensada), por la concavidad de la función de gasto, y solo es nulo con complementarios perfectos. El cruzado tiene signo indeterminado.

Efecto renta: es el paso a otra curva de indiferencia. El propio refuerza el efecto sustitución si el bien es normal y lo contrarresta si es inferior, hasta poder dominarlo.

Gráficamente, al bajar p_1, la recta pivota sobre su corte con el eje de x_2. Una recta auxiliar con la nueva pendiente y tangente a u_0 da la cesta 0': de 0 a 0' va el efecto sustitución y de 0' a 1, ya en u_1, el efecto renta. Solo el efecto total, de 0 a 1, es observable.



Ecuación de Slutsky: efecto sustitución ($0 \to 0'$) y efecto renta ($0' \to 1$) de una bajada de p_1.

2.2.2. Elasticidad-precio

Definición: la elasticidad-precio propia, ε_{ii}, y la cruzada, ε_{ij}, miden la respuesta porcentual de la cantidad al precio del propio bien o al de otro, *ceteris paribus*:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}$$

Las marshallianas recogen el efecto total y las compensadas, ε_{ij}^c, solo el de sustitución. Se relacionan por la ecuación de Slutsky en elasticidades, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c - s_j \varepsilon_{iM}$, donde s_j es la participación del bien j en el gasto.

2.2.3. Clasificación de los bienes

Según el efecto propio: los bienes normales y los frontera son siempre ordinarios. Un bien inferior es ordinario si domina el efecto sustitución, rígido si ambos se igualan y **Giffen** si domina el efecto renta, de modo que su cantidad sube con el precio.

- El bien Giffen no debe confundirse con el bien Veblen, cuya demanda sube con el precio por consumo ostentoso. La ley de la demanda es, así, un teorema condicionado y no un axioma, porque el caso Giffen es posible, pero raro.

Según la elasticidad propia: la demanda es inelástica si $\varepsilon_{ii} \in (-1, 0)$, unitaria si vale -1 y elástica si es menor que -1, con los extremos de la demanda perfectamente inelástica y perfectamente elástica.

Relaciones brutas: con el efecto total cruzado, dos bienes son sustitutivos brutos si $\partial x_i / \partial p_j > 0$, complementarios brutos si es negativo e independientes si es nulo. Son observables, pero asimétricas, porque los efectos renta difieren entre bienes.

Relaciones netas: con el efecto sustitución, son sustitutivos netos si $\partial h_i / \partial p_j > 0$ y complementarios netos si es negativo. No son observables, pero sí simétricas, $\partial h_i / \partial p_j = \partial h_j / \partial p_i$. Con dos bienes y RMS decreciente, ambos son siempre sustitutivos netos. La razón es la homogeneidad de grado cero de la demanda hicksiana, $p_1 \, \partial h_1 / \partial p_1 + p_2 \, \partial h_1 / \partial p_2 = 0$, que con un efecto sustitución propio negativo exige uno cruzado positivo.

2.3. Curva de demanda

2.3.1. Curva precio-consumo

Curva precio-consumo: haciendo pivotar la recta de balance para distintos precios del bien 1, *ceteris paribus*, se obtiene el lugar de las cestas óptimas. Es creciente si la demanda es inelástica, horizontal si es unitaria y decreciente si es elástica. Con demanda inelástica, el gasto en x_1 aumenta al subir su precio, y la relación entre la elasticidad y la forma de la curva se sigue de la condición de Cournot.

Proyectada sobre el plano cantidad-precio, da la curva de demanda precio-propio del consumidor.

2.3.2. Demanda individual

Definición: la **curva de demanda individual** es la sección de la demanda marshalliana en su propio precio, $x_i^* = d_i(p_i)$, con los otros precios, la renta nominal y las preferencias constantes. Un cambio del precio propio es un movimiento a lo largo de la curva, mientras que cualquier otro determinante la desplaza.

Hereda la continuidad y la homogeneidad de grado cero, y su pendiente es el efecto total propio de Slutsky, negativa salvo en los bienes rígidos y Giffen. Con una Cobb-Douglas es una hipérbola rectangular de elasticidad unitaria.

Las demandas compensadas solo recogen el efecto sustitución y cumplen siempre la ley de la demanda, pero solo la hicksiana no es observable. Para un bien normal, la marshalliana es más elástica que la hicksiana.

2.3.3. Demanda de mercado

Definición: la **demanda de mercado** es la suma horizontal de las demandas individuales de los H consumidores: $D_i(p_i) = \sum_{h=1}^{H} d_i^h(p_i, \mathbf{p}_{-i}^0, M_0^h)$.

Hereda la continuidad, con posibles quiebros, la homogeneidad y la ley de Walras agregada, y es decreciente si lo son las individuales. En general, en cambio, no hereda la simetría ni la ley de la demanda compensada. La pendiente negativa de las individuales es condición suficiente, no necesaria, y la de mercado puede decrecer aunque algún consumidor tenga una demanda Giffen.

Es más plana que cada demanda individual, aunque no necesariamente más elástica, y se desplaza con la renta y su distribución, los demás precios, las preferencias y el número de consumidores. Su elasticidad, a un precio dado, es la media de las individuales ponderada por la participación de cada consumidor en la cantidad total.

En conjunto, la estática comparativa deja cinco leyes: ausencia de ilusión monetaria, ley de Walras, efecto sustitución propio negativo, efecto sustitución cruzado simétrico y bienes normales siempre ordinarios. Su límite es que ni las preferencias ni la utilidad son observables y que los datos de mercado suman a muchos consumidores.

3. Extensiones

La teoría ordinal se completa con la agregación y las restricciones de los sistemas de demanda, la preferencia revelada, las teorías de Lancaster y de Becker y los precios hedónicos.

3.1. Agregación y restricciones de la demanda

3.1.1. Agregación de bienes

Bien compuesto (Hicks, 1939b; Leontief, 1936): si los precios de un grupo varían siempre en la misma proporción, el gasto del grupo se comporta como la demanda de un solo bien.

Separabilidad débil: si la RMS entre dos bienes de un grupo no depende del consumo de los demás grupos, el consumidor decide en dos etapas: reparte la renta entre grupos y después, dentro de cada uno, atiende solo a sus precios.

Ambas vías justifican los agregados, los deflactores y la estimación por etapas. Su incumplimiento sesga las elasticidades estimadas del grupo.

3.1.2. Agregación de consumidores

Condición de Gorman (1953): la demanda de mercado no depende de la distribución de la renta si las curvas de Engel de todos los consumidores son rectas paralelas, como con preferencias homotéticas e idénticas o cuasilineales.

Esta condición es el fundamento, frágil, del agente representativo. Sin ella, la demanda de mercado pierde la simetría y la negatividad de Slutsky.

3.1.3. Restricciones del sistema de demanda

La homogeneidad y la ley de Walras imponen tres restricciones en elasticidades a todo sistema completo de demanda, con $s_i = p_i x_i / M$ la participación de cada bien en el gasto:

$$\sum_j \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{iM} = 0$$

$$\sum_i s_i \, \varepsilon_{iM} = 1$$

$$\sum_i s_i \, \varepsilon_{ij} = -s_j$$

- *Homogeneidad*: los efectos de todos los precios y de la renta sobre cada bien se compensan exactamente.
- *Agregación de Engel*: la media ponderada de las elasticidades-renta es uno, de modo que no todos los bienes pueden ser inferiores y los de lujo conviven con otros por debajo de la unidad.
- *Agregación de Cournot*: el encarecimiento de la cesta al subir p_j se absorbe con cambios en todas las cantidades. Con dos bienes, el 1 es sustitutivo bruto del 2 si y solo si la demanda del 2 es elástica.

Las tres son condiciones necesarias, no suficientes: que el sistema proceda de maximizar una utilidad exige además una matriz de Slutsky simétrica y semidefinida negativa.

3.1.4. Conclusiones

Las restricciones de homogeneidad, Engel y Cournot hacen contrastable la teoría, pero las condiciones de agregación exacta son muy restrictivas.

3.2. Preferencia revelada

Idea: como la utilidad no se observa, la preferencia revelada invierte el enfoque y es inductiva: parte de las cestas elegidas a unos precios y una

renta y se pregunta qué revelan de las preferencias. Supone una cesta única en cada situación y que se agota la renta.

3.2.1. ADPR (Samuelson, 1938)

ADPR: si a los precios $\mathbf{p}^0$ el consumidor elige $\mathbf{x}^0$ pudiendo comprar $\mathbf{x}^1$, la primera se revela directamente preferida, y la segunda nunca podrá revelarse preferida a ella. Cuando elija $\mathbf{x}^1$, por tanto, $\mathbf{x}^0$ tiene que ser inasequible:

$$\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0 \geq \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^1 \rightarrow \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 < \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0$$

Del ADPR se sigue, en primer lugar, la estabilidad: ante las mismas opciones, el consumidor elige siempre lo mismo. Además, sin función de utilidad, basta para el efecto sustitución propio no positivo y para la pendiente negativa de la demanda de los bienes normales.

Con dos bienes, el ADPR garantiza también la transitividad, pero no con más de dos, y por eso es condición necesaria pero no suficiente de racionalidad.

3.2.2. AFPR (Houthakker, 1950)

Puede ocurrir que dos cestas no sean comparables directamente, porque ninguna es asequible cuando se elige la otra. Se define entonces la preferencia revelada indirecta, una cadena de preferencias directas. En símbolos, con $\succ_d$ una elección observada y $\succ_i$ una inferencia a partir de una cadena de elecciones:

$$\mathbf{x}^0 \succ_d \mathbf{x}^1 \text{ y } \mathbf{x}^1 \succ_d \mathbf{x}^2 \rightarrow \mathbf{x}^0 \succ_i \mathbf{x}^2 \rightarrow \neg(\mathbf{x}^2 \succ_d \mathbf{x}^0)$$

AFPR: si $\mathbf{x}^0$ se revela preferida a $\mathbf{x}^2$, directamente o a través de una cadena de elecciones, $\mathbf{x}^2$ nunca podrá revelarse preferida a $\mathbf{x}^0$. Añade la transitividad y es **condición necesaria y suficiente** de racionalidad.

Teorema de Afriat (1967): si un conjunto finito de observaciones cumple el AFPR generalizado, GARP, existe una utilidad continua, monótona y cóncava que las racionaliza. El teorema ofrece un contraste no paramétrico, sin forma funcional.

3.2.3. Conclusiones

Con las cestas observadas se construyen el índice de Laspeyres, que sobreestima la subida del coste de la vida por ignorar la sustitución, y el de Paasche, que la subestima, además de contrastes de racionalidad con encuestas y experimentos.

Pero exige muchas elecciones con preferencias estables, sus contrastes tienen poca potencia y, por Afriat, no relaja la racionalidad: la expresa en términos observables.

3.3. Restricciones tecnológicas

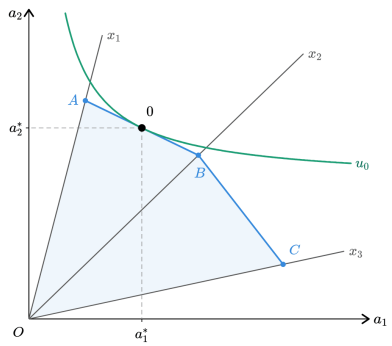
En las dos teorías que siguen, la utilidad no procede de los bienes en sí, sino de lo que el consumidor produce con ellos.

3.3.1. Demanda de características (Lancaster, 1966)

Idea: ante la incapacidad de la teoría con bienes homogéneos para explicar las variedades, Lancaster sostiene que se demandan las **características** de los bienes, que estos combinan en proporciones distintas.

Tecnología: es lineal y objetiva, $a_j = \sum_i \beta_{ji} x_i$, donde β_{ji} es la cantidad de la característica j que aporta una unidad del bien i. Cada bien es un rayo en el plano de características.

Frontera eficiente de consumo: une los puntos que se alcanzan gastando toda la renta en cada bien. Es cóncava, y los bienes que quedan dentro son dominados y no se consumen. El óptimo es la tangencia con la curva de indiferencia más alta, en un tramo, combinando dos bienes, o en un vértice.



Demanda de características: tres bienes, frontera eficiente quebrada A-B-C y equilibrio en el tramo AB.

Explica la diferenciación de producto como fenómeno de demanda. Sus límites son la tecnología lineal, las características objetivas y la falta de una teoría de los precios de las variedades.

3.3.2. Producción familiar (Becker, 1965)

Idea: el hogar produce actividades o bienes finales con bienes de mercado y tiempo, $a_j = f_j(x_j, t_j)$, y el coste de oportunidad del tiempo es el salario.

Planteamiento: al unir las restricciones de tiempo y de presupuesto se obtiene la de **renta completa**, en la que $\pi_j = p_j b_j + w\tau_j$ es el precio sombra de cada actividad, con b_j y τ_j los bienes y el tiempo por unidad de actividad:

$$\max_{\mathbf{a}} \; u(\mathbf{a}) \quad \text{s.a.:} \quad \sum_j \pi_j a_j = wT_0 + M_0$$

CPO: la habitual, con precios sombra en lugar de precios de mercado:

$$\frac{\partial u/\partial a_j}{\partial u/\partial a_k} = \frac{\pi_j}{\pi_k}$$

Estática comparativa: si sube el salario, se encarecen las actividades intensivas en tiempo, que se sustituyen por otras intensivas en bienes, como la comida preparada o la guardería. La teoría funda la economía de la familia, aunque ignora las relaciones de poder dentro del hogar.

3.4. Precios hedónicos (Court, 1939; Griliches, 1961; Rosen, 1974)

Origen: Court valoró automóviles por sus atributos, y Griliches y Rosen formalizaron el marco, versión empírica de Lancaster que recupera de los precios observados el precio implícito de cada característica.

3.4.1. Supuestos

Cada variedad es un vector de características observables, $\mathbf{z}$, como la superficie o la antigüedad de una vivienda. El mercado es competitivo, y consumidores y productores son precio-aceptantes ante la función de precios hedónicos, $p(\mathbf{z})$, en general no lineal.

3.4.2. Modelo

Planteamiento: el consumidor elige las características de la variedad, $\mathbf{z}$, y el gasto en el resto de bienes, y:

$$\max_{\mathbf{z}, y} \; u(\mathbf{z}, y) \quad \text{s.a.:} \quad y + p(\mathbf{z}) = M_0$$

CPO: la RMS entre cada característica y el resto de bienes iguala su **precio implícito**, es decir, lo que el mercado cobra por una unidad más de esa característica:

$$\frac{\partial u/\partial z_j}{\partial u/\partial y} = \frac{\partial p(\mathbf{z})}{\partial z_j}$$

CSO: la CPO basta si la utilidad es cuasicóncava y $p(\mathbf{z})$ es convexa en las características. Si $p(\mathbf{z})$ es cóncava, la elección se desplaza a los extremos.

Equilibrio: Rosen muestra que $p(\mathbf{z})$ es la envolvente de las tangencias entre las curvas de oferta de las empresas y las de puja de los consumidores. Se estima por MCO, con especificación lineal, semilogarítmica o doble logarítmica. En esta última, cada coeficiente es directamente la elasticidad del precio respecto a la característica.

3.4.3. Conclusiones

Su aplicación principal son los índices de precios ajustados por calidad: un ordenador que cuesta lo mismo que hace cinco años con el doble de capacidad ha bajado de precio en términos ajustados por calidad. Institutos como el BLS o Eurostat usan estos métodos en los índices de precios de consumo y de vivienda.

Se aplica también a la vivienda y a la valoración de bienes ambientales, como el ruido, a través del mercado inmobiliario.

Sus límites son que los precios implícitos son propios de un mercado concreto, que el segundo paso de Rosen plantea problemas de identificación y que solo admite características cuantificables.

En suma, la sección delimita cuándo la demanda agregada conserva las propiedades individuales, recupera las preferencias desde la conducta y traslada la utilidad a las características, las actividades y el tiempo.