A9. Teoría de la demanda del consumidor (II). Dualidad e integrabilidad de las preferencias. Sistemas de demanda utilizados en estudios empíricos. Medidas de cambio en el bienestar

1. Fundamentos del análisis dual: el problema primal

La teoría neoclásica trata al consumidor como un agente racional que persigue la mayor utilidad que le permite su renta, exógena, en un marco estático y de certidumbre, y la utilidad nace de comprar bienes de consumo final.

1.1. El problema primal: maximizar la utilidad

Planteamiento: dados precios y renta, exógenos, el consumidor elige en el conjunto asequible, $\text{CA} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq M_0\}$, la cesta de máxima utilidad. Este problema primal es el punto de partida, y el dual se presentará como su imagen especular:

$$\max_{\mathbf{x}} \; u(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} \sum p_i x_i \leq M_0 \\ x_i \geq 0 \; \forall i \end{cases}$$

- El lagrangiano es $\mathcal{L} = u(\mathbf{x}) + \lambda\,(M_0 - \sum p_i x_i)$, con λ la utilidad marginal de la renta. Por la envolvente, $\lambda = \partial v/\partial M$, el precio sombra de la renta.

CPO: con preferencias monótonas y solución interior, el consumidor agota su renta e iguala la RMS al precio relativo, $\text{RMS}_{ji} \equiv u_i'/u_j' = p_i/p_j$, es decir, la tasa subjetiva de intercambio iguala a la objetiva y, en general, $u_i'/p_i = \lambda$. La utilidad marginal por euro gastado es así la misma en todos los bienes e igual a la utilidad marginal de la renta.

CSO: con utilidad estrictamente cuasicóncava, es decir, curvas de indiferencia estrictamente convexas, la tangencia es el máximo y la solución es única.

Solución: las demandas marshallianas, $d_i(\mathbf{p}, M)$, y, como función de valor óptimo, la función indirecta de utilidad, $v(\mathbf{p}, M) = u(\mathbf{d}(\mathbf{p}, M))$, ambas con réplica en el problema dual. En el caso Cobb-Douglas, $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$, el gasto se reparte a partes iguales y:

$$x_1^m = \frac{M}{2p_1}, \qquad v(\mathbf{p}, M) = \frac{M}{2p_1^{1/2}p_2^{1/2}}$$

1.2. Demanda marshalliana

Definición: resolviendo las CPO y la restricción para cualesquiera precios y renta se obtienen las demandas ordinarias, **marshallianas** o walrasianas, $x_i^m = d_i(\mathbf{p}, M)$. Son *no compensadas*, porque ante una variación de los precios la renta monetaria permanece fija y la utilidad alcanzada cambia.

Propiedades:

- *Continuidad y diferenciabilidad*: son continuas por el teorema del máximo, y diferenciables si u es C^2 con curvatura estrictamente positiva (hessiano orlado no singular), lo que permite la estática comparativa.
- *Transformaciones*: son homogéneas de grado cero en precios y renta, sin ilusión monetaria, e invariantes ante transformaciones monótonas de u. En símbolos, $d_i(k\mathbf{p}, kM) = d_i(\mathbf{p}, M)$, y dependen de las preferencias y no de su representación.
- *Inclinación*: en el precio propio, pendiente indeterminada, porque suman efecto renta y sustitución, negativa salvo en los bienes Giffen; en la renta, crecientes para los normales y decrecientes para los inferiores.
- *Forma*: la teoría no restringe su curvatura; la restricción de segundo orden recae sobre la matriz de Slutsky, simétrica y semidefinida negativa.
- *Otras*: agotan la renta, $\sum_i p_i d_i(\mathbf{p}, M) = M$, la ley de Walras; se obtienen de la FIU por la identidad de Roy; coinciden con las hicksianas evaluadas en la utilidad máxima, $d_i(\mathbf{p}, M) = h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M))$; de ellas pueden recuperarse la función de gasto y las preferencias si cumplen las condiciones del teorema de la integrabilidad; y son **observables**, estimables con datos de precios, rentas y cantidades.

1.3. Función indirecta de utilidad

Definición: la **función indirecta de utilidad**, FIU, es la utilidad máxima alcanzable para cada par de precios y renta. Se obtiene sustituyendo las demandas marshallianas en la función objetivo:

$$v(\mathbf{p}, M) = u(\mathbf{d}(\mathbf{p}, M)) = \max_{\mathbf{x}} \; u(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.: } \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = M$$

Propiedades:

- *Continuidad*: es continua y diferenciable cuando lo son las demandas, lo que permite aplicar el teorema de la envolvente.
- *Transformaciones*: es homogénea de grado cero en precios y renta. Como la utilidad es ordinal, toda transformación monótona creciente de v es otra FIU, lo que permite una representación monetaria. En símbolos, $v(k\mathbf{p}, kM) = v(\mathbf{p}, M)$.
- *Inclinación*: estrictamente creciente en la renta, $\partial v/\partial M = \lambda > 0$, y no creciente en los precios, $\partial v/\partial p_i = -\lambda x_i \leq 0$. Estas derivadas dan, por el teorema de la envolvente, la identidad de Roy.
- *Forma*: es cuasiconvexa en precios: un vector de precios promedio de dos situaciones no es mejor que al menos una de ellas.

Identidad de Roy (1942): el cociente de sus derivadas, cambiado de signo, recupera la demanda marshalliana:

$$d_i(\mathbf{p}, M) = -\frac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial M}$$

Dualidad: evaluada en el gasto mínimo, devuelve la utilidad exigida, $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0)) = u_0$, de modo que invirtiéndola respecto a la renta se obtiene la función de gasto. No es observable, porque la utilidad no lo es. En símbolos, $v(\mathbf{p}, M) = e^{-1}(\mathbf{p}, M)$.

En suma, el primal da unas demandas observables y homogéneas de grado cero, con pendiente indeterminada en el precio propio, y una FIU no observable cuya inversión abre el problema dual, que intercambia los papeles de la renta y la utilidad.

2. Análisis de dualidad

El problema dual se desarrolla con la misma estructura que el primal, problema, demanda y función de valor, y después se comparan ambos.

2.1. El problema dual: minimizar el gasto

Idea: el dual invierte los papeles de la función objetivo y de la restricción. Dados los precios y un nivel de utilidad exigido, el consumidor busca la cesta que lo alcanza con el mínimo gasto. La renta pasa a ser el resultado y la utilidad, el dato. Su primer producto es la misma cesta óptima que la del primal. Al generalizar para cualesquiera precios y utilidad, se obtienen además la demanda hicksiana y la función de gasto.

Planteamiento: suponiendo solución interior:

$$\min_{\mathbf{x}} \; G = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \quad \text{s.a.:} \begin{cases} u(\mathbf{x}) \geq u_0 \\ x_i \geq 0 \; \forall i \end{cases}$$

- En el lagrangiano, $\mathcal{L} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \mu\,(u_0 - u(\mathbf{x}))$, el multiplicador $\mu = 1/\lambda = \partial G^*/\partial u$ es el **coste marginal de la utilidad**, el gasto adicional para una unidad más de utilidad: el precio sombra de la utilidad, simétrico del de la renta en el primal. En el caso Cobb-Douglas, $\mu = 2p_1^{1/2}p_2^{1/2} = 1/\lambda$.

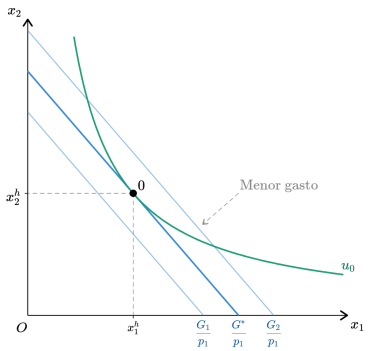
CPO: el consumidor alcanza exactamente la utilidad exigida, sin exceso, e iguala el precio de cada bien a su utilidad marginal valorada al coste marginal de la utilidad, $u_i' = p_i/\mu$. Resulta la misma tangencia que en el primal, $\text{RMS}_{21} = p_1/p_2$. Formalmente:

$$u(\mathbf{x}^*) = u_0, \qquad u_i' = \frac{p_i}{\mu} \;\Rightarrow\; \text{RMS}_{ji} = \frac{p_i}{p_j}$$

CSO: la tangencia es un mínimo si la utilidad es cuasicóncava, la misma condición que en el primal, porque ahora el contorno superior de u actúa de restricción. El conjunto de cestas que alcanzan u_0 es entonces convexo.

Solución: las demandas hicksianas y, como función de valor óptimo, la función de gasto.

Desarrollo gráfico: en el plano (x_1, x_2), la curva de indiferencia objetivo, u_0, es la restricción y permanece fija. Las rectas isogasto tienen pendiente $-p_1/p_2$ y el gasto disminuye al acercarse al origen. El equilibrio, en el punto 0, es la tangencia entre u_0 y la isogasto más baja compatible con ella, G^*. Una isogasto menor no alcanza u_0 y una mayor la alcanza con más gasto. Cada isogasto corta el eje horizontal en G/p_1, y en 0 se elige la cesta (x_1^h, x_2^h).



El problema dual: tangencia de la curva de indiferencia objetivo, u_0, con la isogasto más baja compatible con ella.

2.2. Demanda hicksiana

Definición: resolviendo las CPO y la restricción de utilidad para cualesquiera precios y utilidad se obtienen las **demandas hicksianas**, $x_i^h = h_i(\mathbf{p}, u_0)$ (la cesta que alcanza una utilidad dada con el mínimo

gasto). Son **compensadas**: ante un cambio de precios el gasto no permanece fijo, sino que se reajusta para mantener la utilidad. Mantienen así constante la renta real en el sentido de Hicks mediante una compensación hipotética de renta.

Propiedades:

- *Continuidad y diferenciabilidad*: son continuas por el teorema del máximo y diferenciables bajo los supuestos habituales, lo que permite la estática comparativa.
- *Transformaciones*: son homogéneas de grado cero en precios: si todos suben en la misma proporción, el gasto sube igual y la cesta no cambia. En símbolos, $h_i(k\mathbf{p}, u_0) = h_i(\mathbf{p}, u_0)$.
- *Inclinación*: solo recogen el efecto sustitución, por lo que **nunca crecen con el precio propio**, la ley de la demanda compensada, y no admiten bienes Giffen. Para un bien normal son más inclinadas, menos elásticas, que las marshallianas, porque no incorporan el efecto renta.
- *Forma*: la teoría no restringe su curvatura. La restricción de segundo orden recae sobre la función de gasto, cóncava en precios, y por eso las pendientes de las hicksianas forman una matriz simétrica y semidefinida negativa. Así, la concavidad de e en precios es la pendiente negativa de la demanda compensada, $\partial^2 e/\partial p_i^2 = \partial h_i/\partial p_i \leq 0$.
- *Otras*: alcanzan exactamente u_0; son el gradiente de la función de gasto, por el lema de Shephard; coinciden con las marshallianas evaluadas en el gasto mínimo; y no son observables, porque la utilidad no lo es, de modo que solo se recuperan indirectamente por dualidad. En símbolos, $u(\mathbf{h}(\mathbf{p}, u_0)) = u_0$ y $h_i = \partial e/\partial p_i$.

2.3. Función de gasto

Definición: sustituyendo las demandas hicksianas en el objetivo se obtiene la **función de gasto**, FG, el mínimo gasto necesario para cada vector de precios y nivel de utilidad:

$$e(\mathbf{p}, u_0) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}, u_0) = \min_{\mathbf{x}} \ \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \quad \text{s.a.: } u(\mathbf{x}) = u_0$$

- Da el gasto mínimo para cualesquiera precios y utilidad sin repetir el problema, y sus propiedades son análogas a las de la función de costes de la empresa. En el óptimo, $G^* = e(\mathbf{p}, u_0)$.

Propiedades:

- *Continuidad*: es continua en precios y utilidad y diferenciable en precios, lo que permite aplicar el teorema de la envolvente.
- *Transformaciones*: es **homogénea de grado uno** en precios: un cambio equiproporcional deja la cesta igual y multiplica el gasto en la misma proporción. En símbolos, $e(k\mathbf{p}, u_0) = k \cdot e(\mathbf{p}, u_0)$.
- *Inclinación*: estrictamente creciente en la utilidad, $\partial e/\partial u = \mu > 0$, y no decreciente en precios, $\partial e/\partial p_i = h_i \geq 0$.
- *Forma*: es **cóncava en precios**, es decir, al subir un precio, el gasto mínimo aumenta menos que si la cesta se mantuviera fija, porque se puede sustituir. Por eso la matriz de Slutsky es semidefinida negativa. El consumo compensado del bien encarecido no aumenta, pero puede caer también el de sus complementarios netos: si sube la electricidad, se sustituye por gas, y puede caer la compra de electrodomésticos eléctricos.

Lema de Shephard (1953): la derivada de la función de gasto respecto a un precio es la demanda hicksiana:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, u_0)}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, u_0)$$

- Al subir marginalmente un precio, el gasto mínimo aumenta en la cantidad que se consumía, porque el reajuste de la cesta es de segundo orden. El lema es el análogo de la identidad de Roy, pero más simple, porque el objetivo ya está en dinero. Con $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, la tangencia da $p_1 x_1 = p_2 x_2 = G^*/2$ y, sustituyendo en la restricción de utilidad, se obtiene la función de gasto, inversa de la FIU respecto a la renta, y de ella la hicksiana:

$$e(\mathbf{p}, u_0) = 2u_0\, p_1^{1/2} p_2^{1/2} \quad \rightarrow \quad x_1^h = \frac{\partial e}{\partial p_1} = u_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2}$$

Dualidad e integrabilidad: evaluada en la utilidad máxima que permite una renta, devuelve esa renta, $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M$, de modo que es la inversa de la FIU, $e(\mathbf{p}, u_0) = v^{-1}(\mathbf{p}, u_0)$. Recíprocamente, toda función continua, homogénea de grado uno, no decreciente y cóncava en precios, y creciente en la utilidad, es la función de gasto de unas preferencias de buen comportamiento. No es observable, pero al medirse en dinero es la base de las medidas del bienestar.

2.4. Relaciones de dualidad y pendientes

Entre la maximización de la utilidad, PMU, y la minimización del gasto, PMG, que tienen los mismos componentes, hay tres relaciones de dualidad, a las que se añade la comparación de las pendientes de las demandas.

2.4.1. Teorema básico de la dualidad

Las cestas óptimas de ambos problemas son idénticas con el debido intercambio de información.

- *Del primal al dual*: si $\mathbf{x}^*$ resuelve el primal con renta M_0, resuelve el dual cuando la utilidad exigida es la obtenida, $u_0 = v(\mathbf{p}, M_0)$. Entonces $G^* = M_0$.
- *Del dual al primal*: si $\mathbf{x}^*$ resuelve el dual con utilidad u_0, resuelve el primal cuando la renta es el gasto mínimo, $M_0 = e(\mathbf{p}, u_0)$. Entonces $u^* = u_0$.

El resultado se refiere a las cestas, porque las demandas marshallianas y hicksianas dependen de variables distintas.

2.4.2. Dualidad entre funciones de demanda

Hallada la demanda de un problema, la del otro se obtiene con la función de valor de este último: la marshalliana, de la hicksiana y la FIU; la hicksiana, de la marshalliana y la función de gasto. Esta relación extiende el teorema básico a las funciones de demanda:

$$d_i(\mathbf{p}, M) = h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)), \qquad h_i(\mathbf{p}, u_0) = d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0))$$

2.4.3. Dualidad entre funciones de valor

La FIU es la inversa de la función de gasto respecto a su segundo argumento, y viceversa, de modo que basta resolver un problema:

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M, \qquad v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0)) = u_0$$

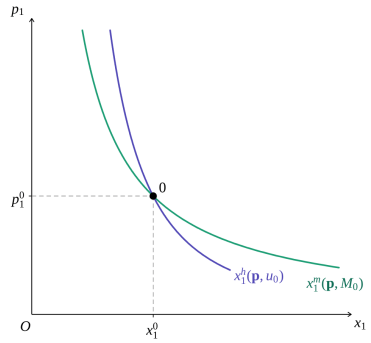
2.4.4. Pendientes de las curvas de demanda

Idea: la marshalliana recoge el efecto total y la hicksiana solo el de sustitución, de modo que su diferencia es el **efecto renta**. En elasticidades:

$$\varepsilon_{ii}^m = \varepsilon_{ii}^c - s_i\, \varepsilon_{iM}$$

- Para un bien normal, la marshalliana es más elástica que la hicksiana; para un inferior no Giffen, menos; para un bien frontera, coinciden. Aquí ε_{ii}^c es la elasticidad compensada, s_i la participación del bien en el gasto y ε_{iM} su elasticidad-renta.

Desarrollo gráfico: en el plano (x_1, p_1), la marshalliana añade, ante una bajada del precio, el salto a una curva de indiferencia superior. La hicksiana mantiene fija la curva de indiferencia y solo recoge el movimiento a lo largo de ella. Ambas se cortan en el punto 0, al precio inicial. Allí la utilidad exigida en el dual, u_0, es la máxima que permite la renta M_0 en el primal, y la recta de balance coincide con la isogasto.



Demanda marshalliana y hicksiana: la compensada recoge solo el efecto sustitución y es menos elástica para un bien normal.

En suma, el dual fija la utilidad y minimiza el gasto. Sus demandas hicksianas, no observables, nunca crecen con el precio propio, y la función de gasto, cóncava y homogénea de grado uno en precios, las reúne. Las relaciones de dualidad permiten resolver un solo problema y obtener todas las funciones del otro.

3. Extensiones y aplicaciones

Conocidas las herramientas, la dualidad tiene implicaciones teóricas, fundamenta los sistemas de demanda empíricos y proporciona las medidas de bienestar.

3.1. Ecuación de Slutsky e integrabilidad

La dualidad tiene dos implicaciones en direcciones opuestas: hacia delante, de las preferencias a la conducta, la ecuación de Slutsky; hacia atrás, de la conducta a las preferencias, la integrabilidad.

3.1.1. Ecuación de Slutsky: derivación formal

Derivación: se parte de la dualidad entre demandas, $h_i(\mathbf{p}, u_0) = d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0))$. Derivando respecto a p_j por la regla de la cadena, sustituyendo $\partial e/\partial p_j = x_j$ por el lema de Shephard y teniendo en cuenta que en el óptimo $M = G^*$:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^m}{\partial M} \cdot x_j$$

- El primer término es el **efecto sustitución** y el segundo, con su signo, el **efecto renta**. Su suma es el efecto total.

– En elasticidades, $\varepsilon^m_{ij} = \varepsilon^c_{ij} - s_j \cdot \varepsilon_{iM}$, con s_j la participación del bien j en el gasto. Se obtiene multiplicando por p_j/x_i, y para $i = j$ es la comparación de pendientes de las dos demandas.

Consecuencias: el efecto sustitución queda definido formalmente por las derivadas de la demanda hicksiana. El propio es **no positivo** en todo caso, por la concavidad de la función de gasto. El cruzado tiene signo indeterminado y clasifica los bienes en sustitutivos netos, si es positivo, complementarios netos, si es negativo, e independientes, si es nulo. Las clasificaciones por efectos totales, como ordinarios, Giffen o sustitutivos brutos, proceden del efecto total. En símbolos, $\partial h_i/\partial p_i \leq 0$, y el bien j es sustitutivo neto de i si $\partial h_i/\partial p_j > 0$.

3.1.2. Matriz de Slutsky

Definición: con cambios en varios precios, los efectos sustitución se ordenan en la **matriz de Slutsky**, la hessiana de la función de gasto. Por Shephard, $\partial e/\partial p_i = h_i$, y derivando de nuevo:

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 e(\mathbf{p}, u_0)}{\partial p_i \, \partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, u_0)}{\partial p_j}$$

– Los propios están en la diagonal y los cruzados fuera de ella, y el efecto de cualquier vector de cambios de precios sobre las demandas compensadas es $d\mathbf{h} = \mathbf{S}\, d\mathbf{p}$. Para dos bienes:

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \partial h_1/\partial p_1 & \partial h_1/\partial p_2 \\ \partial h_2/\partial p_1 & \partial h_2/\partial p_2 \end{pmatrix}$$

– Por la ecuación de Slutsky, cada elemento se calcula con magnitudes observables, $S_{ij} = \partial x_i^m/\partial p_j + (\partial x_i^m/\partial M)\, x_j$, lo que hace la matriz contrastable.

Propiedades:

– *Simétrica*: $\partial h_i/\partial p_j = \partial h_j/\partial p_i$, lo que en general no ocurre con las demandas ordinarias, salvo, por ejemplo, con preferencias homotéticas. Las relaciones netas son simétricas, pero las brutas no, porque el efecto renta introduce asimetría: Coca-Cola puede ser sustitutivo bruto de Pepsi y no al revés. Además, no todos los bienes pueden ser complementarios netos a la vez.
– **Semidefinida negativa**, por la concavidad de la función de gasto: los efectos propios compensados son no positivos, y las hicksianas cumplen la ley de la demanda compensada.

3.1.3. Integrabilidad (Antonelli, 1886)

Problema: solo se observan las demandas marshallianas. La cuestión es si un sistema completo de demandas estimado es compatible con unas preferencias de buen comportamiento y si estas pueden reconstruirse. Antonelli lo planteó y resolvió en 1886, y Hurwicz y Uzawa (1971) le dieron su formulación moderna.

Teorema: la solución pasa por la función de gasto, en tres pasos. La función de gasto contiene toda la información sobre las preferencias, y sus derivadas son observables a través de la ecuación de Slutsky.

1. De las demandas observadas se calcula la matriz de Slutsky, sin conocer las hicksianas.
2. Como $\partial e/\partial p_i = d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0))$, la función de gasto se obtiene integrando ese sistema, lo que exige tres condiciones: **ley de Walras**, que con la simetría implica homogeneidad; **simetría**, la condición de integrabilidad propiamente dicha (teorema de Frobenius); y **semidefinición negativa**, que garantiza una función de gasto cóncava. Esa función procede, así, de una minimización del gasto.
3. De la función de gasto se recupera la FIU por inversión y, con ella, las preferencias.

Las tres condiciones son **necesarias y suficientes**: toda demanda que procede de maximizar una utilidad de buen comportamiento las cumple, y todo sistema completo que las cumple procede de alguna utilidad. Las condiciones de homogeneidad, Engel y Cournot, consecuencias de la ley de Walras y la homogeneidad, son solo necesarias, porque un sistema puede cumplirlas sin proceder de ninguna utilidad. La dualidad añade la simetría y la negatividad, y con ellas el conjunto basta.

Consecuencias: permite contrastar la teoría sin especificar ninguna utilidad, comprobando o imponiendo las condiciones en las demandas estimadas, y garantiza que de ellas se recupera la función de gasto, la métrica del bienestar, lo que cierra el círculo del análisis dual.

3.2. Sistemas de demanda empíricos

Definición: un **sistema completo de demanda** especifica conjuntamente las n ecuaciones de demanda, o de participaciones en el gasto, $s_i = p_i x_i/M$, y las estima simultáneamente. Su fundamento es la dualidad: se parte de una función de gasto o una FIU y se obtienen las demandas por Shephard o Roy, de modo que las restricciones teóricas se convierten en restricciones sobre los parámetros, que pueden imponerse o contrastarse. Agregación, homogeneidad y simetría se traducen en restricciones lineales, y la negatividad, en desigualdades.

3.2.1. Sistema lineal de gasto (Stone, 1954)

Origen: Klein y Rubin (1948) propusieron la forma funcional, Geary (1950) derivó la utilidad que la genera y Stone (1954) lo estimó con datos británicos como sistema completo, el primero no homotético estimado.

Planteamiento: parte de la utilidad Stone-Geary, $u = \sum_i \gamma_i \ln(x_i - \bar{x}_i)$, con $\sum_i \gamma_i = 1$ y consumos de *subsistencia* $\bar{x}_i$ cubiertos con independencia de precios y renta. Su función de gasto es de la forma polar de Gorman, $e(\mathbf{p}, u) = a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})\, u$, donde $a(\mathbf{p}) = \sum_k p_k \bar{x}_k$ es el coste de la subsistencia, y el gasto en cada bien es lineal en la renta, de ahí el nombre:

$$p_i x_i = p_i \bar{x}_i + \gamma_i \left(M - \sum_k p_k \bar{x}_k \right)$$

– Cada bien recibe una proporción γ_i de la renta supernumeraria. Las restricciones se cumplen por construcción, tiene pocos parámetros, $2n - 1$, y sus curvas de Engel son rectas que no pasan por el origen, lo que, si los parámetros son comunes a los consumidores, permite el consumidor representativo de Gorman. Con el índice de utilidad $\prod_k (x_k - \bar{x}_k)^{\gamma_k}$, $b(\mathbf{p}) = \prod_k (p_k/\gamma_k)^{\gamma_k}$, y la elasticidad-precio propia es $\varepsilon^m_{ii} = -1 + (1 - \gamma_i)\bar{x}_i/x_i$, mayor que -1 si $\bar{x}_i > 0$.

Conclusiones: es parsimonioso y coherente con la teoría, pero rígido: todos los bienes son normales, con $\varepsilon_{iM} = \gamma_i M/p_i x_i > 0$, sustitutivos netos y complementarios brutos, y la demanda propia es inelástica si $\bar{x}_i > 0$. Al no admitir bienes inferiores ni complementarios netos, impone la teoría en lugar de contrastarla.

3.2.2. Modelo de Rotterdam (Barten, 1964; Theil, 1965)

Idea: en vez de partir de una utilidad, especifica el sistema en diferenciales logarítmicas y aplica la ecuación de Slutsky, con un efecto renta real y efectos precio compensados:

$$s_i \, d\ln x_i = b_i \, d\ln Q + \sum_j c_{ij} \, d\ln p_j$$

– $d\ln Q = \sum_k s_k \, d\ln x_k$ es el índice de volumen de Divisia, la variación de la renta real, y $b_i = p_i \, \partial x_i/\partial M$, la participación marginal en el gasto, positiva si el bien es normal y negativa si es inferior. Los coeficientes de Slutsky, $c_{ij} = (p_i p_j/M)\, \partial h_i/\partial p_j$, constantes en el modelo, cumplen $c_{ii} < 0$, y los cruzados son positivos entre sustitutivos netos y negativos entre complementarios netos.
– La agregación, $\sum_i b_i = 1$ y $\sum_i c_{ij} = 0$, la homogeneidad, $\sum_j c_{ij} = 0$, y la simetría, $c_{ij} = c_{ji}$, son restricciones lineales que pueden imponerse o contrastarse con tests convencionales. La negatividad, que exige una matriz $[c_{ij}]$ semidefinida negativa, no es lineal.

Conclusiones: fue el primero en contrastar sistemáticamente homogeneidad y simetría, con rechazos frecuentes de la homogeneidad, pero sus coeficientes constantes solo son compatibles globalmente con una Cobb-Douglas, así que es una aproximación local.

3.2.3. AIDS (Deaton y Muellbauer, 1980a)

Idea: el sistema casi ideal reúne las ventajas de los anteriores: procede de una función de gasto, como el SLG, con restricciones lineales contrastables, como Rotterdam; aproxima en primer orden cualquier sistema y agrega exactamente sobre consumidores. Parte de una función de gasto **PIGLOG**, logarítmicamente lineal en la utilidad, $\ln e = (1 - u)\ln a(\mathbf{p}) + u \ln b(\mathbf{p})$, con $\ln a(\mathbf{p})$ translogarítmica, y, por el lema de Shephard, las participaciones son:

$$s_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln \left(\frac{M}{P} \right)$$

– Las restricciones de agregación, $\sum_i \alpha_i = 1$ y $\sum_i \gamma_{ij} = \sum_i \beta_i = 0$, de homogeneidad, $\sum_j \gamma_{ij} = 0$, y de simetría, $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, son lineales, y la negatividad se comprueba en la muestra. La elasticidad-renta es $\varepsilon_{iM} = 1 + \beta_i/s_i$, de modo que $\beta_i > 0$ identifica los bienes de lujo y $\beta_i < 0$, los de primera necesidad. Las curvas de Engel en participaciones son lineales en el logaritmo de la renta, la forma de Working-Leser, lo que preserva la agregación exacta de Muellbauer con un índice de distribución de la renta.
– Con el índice de Stone, $\ln P^* = \sum_k s_k \ln p_k$, el sistema es lineal en los parámetros, LA-AIDS, y su generalización cuadrática, QUAIDS (Banks et al., 1997), admite curvas de Engel en U invertida. El índice de precios exacto, que el de Stone aproxima, es:

$$\ln P = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + \tfrac{1}{2} \sum_k \sum_j \gamma_{kj} \ln p_k \ln p_j$$

Conclusiones: satisface los axiomas, agrega, contrasta la teoría y se ajusta a los presupuestos familiares, de ahí su uso generalizado. Pero tiene muchos parámetros, y el índice de Stone sesga las elasticidades.

3.2.4. Aplicaciones empíricas

Los sistemas de demanda llevan la teoría del consumidor a los datos en cuatro usos.

1. *Elasticidades*: precio, cruzadas y renta por grupos de bienes, con encuestas de presupuestos familiares o series agregadas, que alimentan los modelos de equilibrio general aplicado y las previsiones.
2. *Contraste de la teoría*: los tests de homogeneidad y simetría. El rechazo frecuente de la homogeneidad en series temporales se atribuye a la agregación, la dinámica omitida y los errores de medida, más que a la irracionalidad.
3. *Evaluación de políticas*: con la función de gasto estimada se calculan la VC y la VE de una reforma de la imposición indirecta o de una subida de precios regulados, y su distribución por hogares.
4. *Coste de la vida*: el sesgo de sustitución del IPC se cuantifica comparando Laspeyres con el índice verdadero implícito en el sistema.

3.3. Medidas de cambio de bienestar

La pregunta normativa es cómo medir el cambio de bienestar de un consumidor cuando los precios pasan de $\mathbf{p}^0$ a $\mathbf{p}^1$, con renta M_0 y utilidades u_0 y u_1. El cambio puede deberse a la inflación, al poder de mercado o a impuestos.

3.3.1. Utilidad métrica monetaria (Samuelson, 1974)

Definición: como la utilidad es ordinal, la función de gasto permite elegir la representación que la mide en dinero. La **función de utilidad métrica monetaria** es el gasto mínimo, a unos precios de referencia $\mathbf{q}$, para alcanzar la utilidad de una cesta, $m(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{q}, u(\mathbf{x}))$. Su versión indirecta, $e(\mathbf{q}, v(\mathbf{p}, M))$, mide en dinero, a los precios $\mathbf{q}$, la utilidad máxima que permiten los precios $\mathbf{p}$ y la renta M:

$$\tilde{m}(\mathbf{q}; \mathbf{p}, M) = e(\mathbf{q}, v(\mathbf{p}, M))$$

- Ambas son transformaciones monótonas crecientes de la utilidad, válidas para representar las preferencias, pero en unidades monetarias. Heredan las propiedades de u y v: la directa es creciente y cuasicóncava en las cantidades; la indirecta, homogénea de grado cero, creciente en la renta y cuasiconvexa en precios. Su continuidad y diferenciabilidad son las de la función de gasto y las de u o de v.
- Con precios de referencia iguales a los vigentes, la indirecta es la renta. No son observables, porque exigen la función de gasto, pero son la base de las medidas exactas del bienestar. En símbolos, $\tilde{m}(\mathbf{p}; \mathbf{p}, M) = e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M$.

3.3.2. VC, VE y VEC

Variación compensatoria (Hicks, 1939b): es la diferencia entre la renta y la que, a los precios finales, permitiría alcanzar la utilidad inicial. Responde a ¿cuánto dinero hay que dar o quitar al consumidor después del cambio para restaurar su bienestar inicial?

$$\mathrm{VC} = M_0 - e(\mathbf{p}^1, u_0) = \int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(\mathbf{p}, u_0)\, dp_i$$

- Es la diferencia de utilidad métrica monetaria con referencia $\mathbf{p}^1$. Al valorar el cambio a la utilidad de partida, mide lo que habría que pagar o cobrar a los afectados para dejarlos como estaban, por lo que es la medida natural para compensar a quienes soportan un cambio. En símbolos, $\mathrm{VC} = e(\mathbf{p}^1, u_1) - e(\mathbf{p}^1, u_0)$, porque a los precios finales $M_0 = e(\mathbf{p}^1, u_1)$.

Variación equivalente: es la diferencia entre la renta que, a los precios iniciales, permitiría alcanzar la utilidad final y la renta. Responde a ¿cuánto dinero hay que dar o quitar antes del cambio para alterar el bienestar en la misma cuantía?

$$\mathrm{VE} = e(\mathbf{p}^0, u_1) - M_0 = \int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(\mathbf{p}, u_1)\, dp_i$$

- Es la diferencia de utilidad métrica monetaria con referencia $\mathbf{p}^0$. Al usar unos precios fijos, los iniciales, cualesquiera que sean las alternativas, es la adecuada para comparar y ordenar de forma coherente varias políticas. En símbolos, $\mathrm{VE} = e(\mathbf{p}^0, u_1) - e(\mathbf{p}^0, u_0)$, porque a los precios iniciales $M_0 = e(\mathbf{p}^0, u_0)$.

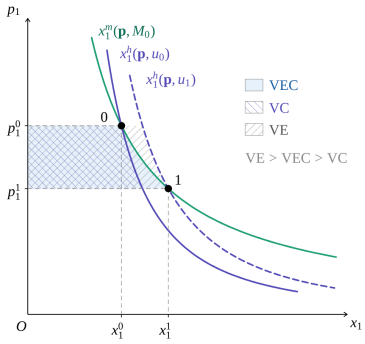
Variación del excedente del consumidor (Dupuit, 1844; Marshall, 1890): a diferencia de las anteriores, usa la demanda ordinaria. El excedente es la diferencia entre la disposición máxima a pagar y el precio pagado, y su variación es el área bajo la demanda marshalliana entre ambos precios, $\int_{p_i^1}^{p_i^0} d_i(p_i, M_0)\, dp_i$. Gráficamente, es el área entre la curva de demanda ordinaria y las cotas de precios.

Comparación: las tres tienen el signo del cambio de bienestar, pero difieren según el efecto renta. Para un bien normal:

$$\begin{aligned} \text{bajada de } p_i: &\quad \mathrm{VE} > \mathrm{VEC} > \mathrm{VC} \\ \text{subida de } p_i: &\quad |\mathrm{VC}| > |\mathrm{VEC}| > |\mathrm{VE}| \end{aligned}$$

- La razón es que la hicksiana a la utilidad final está a la derecha de la hicksiana a la inicial y la marshalliana, entre ambas. Con un bien inferior ocurre lo contrario en cada caso y, sin efecto renta, las tres coinciden.

Desarrollo gráfico: en el plano (x_1, p_1), una bajada de p_1^0 a p_1^1 lleva al consumidor de 0 a 1. Cada medida es el área a la izquierda de una curva entre ambos precios: la marshalliana, que pasa por 0 y 1, da la VEC; la hicksiana a u_0, que pasa por 0, la VC; y la hicksiana a u_1, que pasa por 1, la VE. La hicksiana a u_1 queda a la derecha de la de u_0 porque, para un bien normal, una utilidad mayor exige más cantidad a cada precio.



Medidas monetarias del bienestar ante una bajada de precio: VC, VEC y VE como áreas a la izquierda de cada curva de demanda.

Conclusiones: VC y VE, diferencias de utilidad métrica monetaria, jerarquizan rigurosamente las situaciones, pero exigen conocer la función de gasto, que se estima con un sistema de demanda. La VEC solo es exacta sin efecto renta, con preferencias cuasilineales o bienes frontera, y por ello se usa como aproximación en equilibrio parcial.

3.3.3. Números índice

Cuando no hay demandas hicksianas, pero sí cestas y precios, el bienestar se aproxima con **números índice**.

- *Índice de variación compensatoria*: es el factor de actualización de la renta que mantiene constante la utilidad inicial, $e(\mathbf{p}^1, u_0)/e(\mathbf{p}^0, u_0) \le P_L$. El índice de **Laspeyres** (1871) valora la cesta base a los nuevos precios. Como esa cesta sigue siendo asequible con la renta $P_L \cdot M_0$, pero el consumidor puede sustituir, sobrestima la subida del coste de la vida. Con $u = x_1 x_2^2$, $\mathbf{p}^0 = (10, 20)$, $M_0 = 300$ y $\mathbf{p}^1 = (15, 40)$, el índice verdadero es $545{,}1/300 \approx 1{,}817$ y el de Laspeyres, $550/300 \approx 1{,}833$.
- *Índice de variación equivalente*: mantiene constante la utilidad final, $e(\mathbf{p}^1, u_1)/e(\mathbf{p}^0, u_1) \ge P_P$. El de **Paasche** (1874) valora la cesta corriente a los precios de ambos periodos y, por el argumento simétrico, la subestima. Los dos índices son:

$$P_L = \frac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^0}, \qquad P_P = \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^1}$$

Índice de Konüs (1924): el índice verdadero del coste de la vida, $P_K(u) = e(\mathbf{p}^1, u)/e(\mathbf{p}^0, u)$, es el de variación compensatoria con $u = u_0$ y el de variación equivalente con $u = u_1$. Con preferencias homotéticas no depende del nivel de utilidad y queda entre Paasche y Laspeyres, y, en general, lo está para una utilidad intermedia entre u_0 y u_1. El índice ideal de Fisher (1922), su media geométrica, es exacto con preferencias homotéticas cuadráticas. En símbolos, $P_P \le P_K \le P_L$ con preferencias homotéticas, y $P_F = \sqrt{P_L\, P_P}$.

Alcance: el análisis vale para un individuo aislado. Con utilidad ordinal, la utilidad marginal de la renta no es comparable entre agentes, y el bienestar colectivo solo es medible en casos restringidos, como preferencias idénticas, cuasilineales o un agente representativo. El análisis del bienestar social trata de cubrir estas lagunas con criterios de deseabilidad colectiva.

En suma, la dualidad conecta la función de gasto y la demanda hicksiana, no observables, con las demandas marshallianas observables: la ecuación de Slutsky descompone los efectos precio, la integrabilidad recupera las preferencias, los sistemas de demanda convierten la teoría en restricciones estimables y las medidas de bienestar usan la función de gasto como métrica monetaria.