1. Riesgo: teoría de la utilidad esperada

En la **paradoja de San Petersburgo** (Nicolaus Bernoulli, 1713), se tira una moneda hasta que sale cara y el premio se duplica con cada lanzamiento. El valor esperado es infinito, pero nadie paga mucho por jugar. Daniel Bernoulli (1738) la resolvió: a los individuos no les importan los premios, sino su utilidad.

1.1. Conjunto de elección y preferencias

Idea: la **teoría de la utilidad esperada** (TUE), formulada axiomáticamente por von Neumann y Morgenstern (1944) y extendida a probabilidades subjetivas por Savage (1954), obtiene una función de utilidad a partir de axiomas sobre las preferencias entre loterías. Parte de dos premisas: no hay certeza sobre los sucesos, pero se conoce la distribución de probabilidades de los estados de la naturaleza.

Conjunto de elección: el consumidor ordena un conjunto $\mathcal{L}$, no vacío y compacto, de **loterías simples**, distribuciones de probabilidad objetivas sobre un vector fijo de pagos $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{l} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

Por el axioma de reducción de loterías compuestas, la premisa "consecuencialista", una lotería sobre otras loterías equivale a la lotería simple que asigna a cada resultado su probabilidad final, y basta analizar $\mathcal{L}$.

El agente no elige cestas de utilidad cierta, sino alternativas de riesgo, y sobre ellas define la indiferencia, $\sim$, la preferencia estricta, $\succ$, y la preferencia débil, $\succsim$.

1.1.1. Axiomas de orden

Completitud: ante dos loterías cualesquiera, el consumidor siempre puede ordenarlas: $\mathbf{l}_1 \succsim \mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_2 \succsim \mathbf{l}_1$ o ambas, y entonces le son indiferentes.

Reflexividad: toda lotería es comparable consigo misma, $\mathbf{l}_0 \succsim \mathbf{l}_0$.

Transitividad: si $\mathbf{l}_1 \succsim \mathbf{l}_2$ y $\mathbf{l}_2 \succsim \mathbf{l}_3$, entonces $\mathbf{l}_1 \succsim \mathbf{l}_3$ (coherencia entre comparaciones).

1.1.2. Axiomas de regularidad

Monotonía: la preferencia por una lotería aumenta cuando aumenta la probabilidad del suceso más favorable.

Continuidad: pequeños cambios en las probabilidades no alteran la ordenación entre dos loterías, lo que excluye las preferencias lexicográficas.

Independencia: si dos loterías se mezclan con una tercera, la ordenación entre las mezclas no depende de la tercera lotería:

$$\mathbf{l}_1 \succsim \mathbf{l}_2 \leftrightarrow \alpha\mathbf{l}_1 + (1-\alpha)\mathbf{l}_3 \succsim \alpha\mathbf{l}_2 + (1-\alpha)\mathbf{l}_3, \quad \alpha \in (0,1]$$

El axioma de independencia, el más controvertido, es el corazón de la teoría. Como solo uno de los estados llegará a ocurrir, los pagos en estados distintos, los bienes contingentes, no pueden ser sustitutivos ni complementarios en la utilidad, es decir, la utilidad marginal del pago en un estado no depende del pago en otro.

Diferenciabilidad, opcional: evita puntos angulares en la función de utilidad.

1.2. Utilidad esperada y perfiles de riesgo

1.2.1. Función de utilidad esperada

Representación: por el teorema de Debreu (1954), la racionalidad y la continuidad garantizan una utilidad continua que preserva el orden. Pero en riesgo hace falta una forma que recoja el "valor moral" de la lotería (la utilidad de los pagos, no los pagos).

Teorema de la utilidad esperada (von Neumann y Morgenstern, 1944): si a la racionalidad y la continuidad se une la independencia, la ordenación se representa con una **función de utilidad esperada**, donde $u(x_i)$ es la utilidad de Bernoulli de cada pago y p_i su probabilidad objetiva:

$$U(\mathbf{l}) \equiv u^e(\mathbf{l}) = \mathbb{E}[u(\mathbf{l})] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u(x_i)$$

Propiedades:

- Es continua en las probabilidades, y la utilidad de Bernoulli se supone dos veces diferenciable en los pagos.
- Es única salvo transformaciones afines positivas, las únicas que conservan la forma de esperanza, por lo que la utilidad esperada es **cardinal**.
- Es creciente en la probabilidad del suceso más favorable y en los pagos, y lineal en las probabilidades. La curvatura de $u(x)$ queda libre y caracteriza la actitud ante el riesgo.

San Petersburgo: con una utilidad de Bernoulli suficientemente cóncava, como la logarítmica que propuso Bernoulli, la esperanza de $u(x)$ es finita aunque la de x no lo sea.

1.2.2. Perfiles de riesgo

El individuo elige la lotería que maximiza su utilidad esperada, y su conducta depende de su **actitud frente al riesgo**: del distinto efecto que la renta ganada y la perdida tienen sobre su utilidad. Se caracteriza con tres claves: (i) la lotería degenerada, $\mathbf{l}_d$, que paga con certeza la esperanza, frente a la lotería $\mathbf{l}$, y $u(\mathbb{E}(\mathbf{l}))$ frente a $\mathbb{E}[u(\mathbf{l})]$; (ii) el signo de $u''(x)$, y (iii) la prima de riesgo.

Prima de riesgo: $\rho = \mathbb{E}(\mathbf{l}) - x_c$, la diferencia entre la esperanza y el **equivalente cierto**, el pago cuya utilidad iguala la utilidad esperada de la lotería. Esta diferencia es el sobreprecio máximo que el agente pagaría, sobre una prima actuarialmente justa, por eliminar el riesgo. El equivalente cierto resuelve $u(x_c) = \mathbb{E}[u(\mathbf{l})]$, de modo que $x_c < \mathbb{E}(\mathbf{l})$ con aversión y $x_c > \mathbb{E}(\mathbf{l})$ con propensión.

Averso al riesgo: prefiere el valor esperado cierto a la lotería y paga por evitar el riesgo:

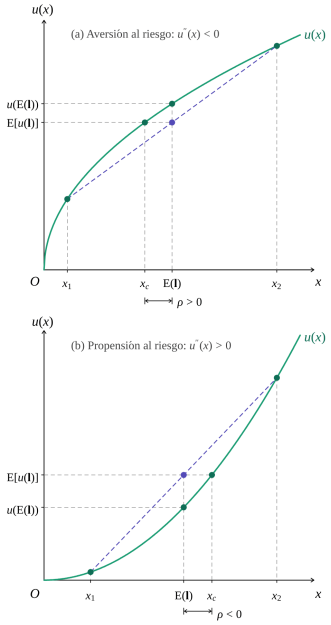
$$\mathbf{l}_d \succ \mathbf{l} \leftrightarrow u(\mathbb{E}(\mathbf{l})) > \mathbb{E}[u(\mathbf{l})], \qquad u''(x) < 0, \qquad \rho > 0$$

Su utilidad de Bernoulli es estrictamente cóncava, de modo que, con utilidad marginal decreciente, ante variaciones iguales al alza y a la baja, la renta perdida resta más utilidad de la que suma la ganada.

Neutral al riesgo: le es indiferente la lotería degenerada o cualquier otra de igual esperanza, con $u''(x) = 0$ y $\rho = 0$. Su utilidad es una recta, y ni paga por evitar el riesgo ni exige compensación por asumirlo.

Propenso al riesgo: prefiere la lotería, con $u''(x) > 0$ y $\rho < 0$. Su utilidad es estrictamente convexa, el equivalente cierto supera la esperanza y exige una compensación por renunciar al riesgo.

Desarrollo gráfico: la altura de la cuerda entre x_1 y x_2 sobre $\mathbb{E}(\mathbf{l})$ es la utilidad esperada, por debajo de $u(\mathbb{E}(\mathbf{l}))$ con aversión y por encima con propensión. La distancia entre x_c y $\mathbb{E}(\mathbf{l})$ es la prima de riesgo.



Perfiles de riesgo: utilidad cóncava con aversión (a) y convexa con propensión (b).

1.2.3. Coeficientes de Arrow-Pratt

Motivo: $u''(x)$ da el signo del perfil, pero no es invariante ante transformaciones afines y no permite cuantificar ni ordenar las actitudes. Los coeficientes toman como referencia el perfil averso y suponen preferencias monótonas.

Aversión absoluta (Pratt, 1964; Arrow, 1965): el **CAA** es la curvatura relativa de la utilidad de Bernoulli. Dividir por $u'(x)$ lo hace invariante, y el signo menos, creciente con la aversión:

$$\text{CAA} = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

- Su signo caracteriza al agente, y su valor ordena la aversión entre individuos y entre niveles de renta. La evidencia sugiere que es decreciente (Guiso y Paiella, 2008): con más riqueza se asume más fácilmente un riesgo de cuantía absoluta dada.
- Aproxima, con un desarrollo de Taylor de segundo orden, la prima de riesgo, proporcional a la aversión por la varianza de los pagos: $\rho \approx \frac{1}{2} \cdot \text{CAA} \cdot \sigma_x^2$. Con $u(x) = x^{1/2}$ y una lotería que paga 36 o 100 con probabilidad 1/2, $\mathbb{E}(\mathbf{l}) = 68$ y $\mathbb{E}[u(\mathbf{l})] = 8$, de modo que $x_c = 64$ y $\rho = 4$. Con $\text{CAA} = 1/(2x)$, que en $x = 68$ vale $1/136$, y $\sigma_x^2 = 1024$, la aproximación da $\rho \approx 3{,}76$.

Aversión relativa: el CAA depende de las unidades monetarias. El **CAR** tiene en cuenta la riqueza y es la elasticidad de la utilidad marginal respecto a los pagos, cambiada de signo:

$$\text{CAR} = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \cdot x$$

Si es constante, la proporción de la riqueza en activos con riesgo no varía con la riqueza. Con una utilidad CRRA, el CAR es constante, θ, y, en un contexto intertemporal, su inversa, $1/\theta$, es la elasticidad de sustitución intertemporal.

1.3. Aplicaciones financieras

La TUE se aplica a dos decisiones financieras simétricas. En la de **aseguramiento**, el agente parte de una exposición al riesgo, fuera de la línea de certeza, y la reduce con un seguro. En la de **cartera**, parte de la certeza y aumenta su exposición comprando acciones.

1.3.1. Demanda de seguros

Idea: el agente elige la cuantía asegurada igualando la tasa subjetiva a la que intercambia renta entre dos estados de la naturaleza con la tasa objetiva que ofrece el mercado de seguros.

Supuestos: hay información imperfecta y simétrica y dos estados: sin pérdida, con la riqueza inicial M_0 y probabilidad p_1, y con pérdida, con $M_0 - L$ y probabilidad p_2. Un agente averso al riesgo elige la cuantía asegurada, M_s, y paga una prima γ por unidad asegurada, de modo que obtiene $x_1 = M_0 - \gamma M_s$ sin pérdida y $x_2 = x_1 - L + M_s$ con ella.

Recta de aseguramiento: despejando M_s y sustituyendo, su pendiente, $-(1-\gamma)/\gamma$, es la tasa objetiva a la que el mercado intercambia renta entre estados:

$$x_2 = \frac{M_0}{\gamma} - L - \frac{1-\gamma}{\gamma}\, x_1$$

Planteamiento: el agente elige la cuantía asegurada que maximiza su utilidad esperada:

$$\max_{M_s}\ u^e = p_1 \cdot u(x_1) + p_2 \cdot u(x_2) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} x_1 = M_0 - \gamma M_s \\ x_2 = x_1 - L + M_s \\ M_s \geq 0 \end{cases}$$

CPO: la **relación marginal de sustitución estocástica**, tasa subjetiva de intercambio de renta entre estados, iguala el precio relativo de la renta entre ambos, la indemnización neta por unidad de prima:

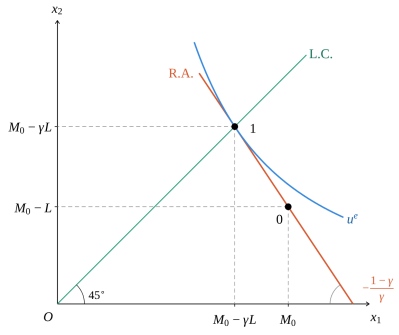
$$\text{RMSE}_{21} = \frac{p_1 \cdot u'(x_1)}{p_2 \cdot u'(x_2)} = \frac{1-\gamma}{\gamma}$$

CSO: la segunda derivada respecto a M_s, $\gamma^2 p_1 u''(x_1) + (1-\gamma)^2 p_2 u''(x_2)$, es negativa por la concavidad de la utilidad de Bernoulli, y la CPO da un máximo global.

Solución: depende de la prima frente a la probabilidad de pérdida, es decir, de la competencia y de los costes de gestión del mercado:

1. Con prima **actuarialmente justa**, $\gamma = p_2$, propia de competencia perfecta sin costes de gestión, el agente se asegura por toda la pérdida, $M_s^* = L$, y queda sobre la línea de certeza, $x_1 = x_2$.
2. Con prima desfavorable, $\gamma > p_2$, por costes de gestión o poder de mercado, se infraasegura, $M_s^* < L$. La recta de aseguramiento es menos inclinada que la curva de indiferencia sobre la línea de certeza, y $x_1 > x_2$.
3. Con prima favorable, $\gamma < p_2$, se sobreasegura, $M_s^* > L$. La recta es más inclinada, y $x_1 < x_2$.

Desarrollo gráfico: en el plano de rentas contingentes, la recta de aseguramiento parte del punto sin seguro, $(M_0, M_0 - L)$. Con prima justa, la curva de indiferencia más alta le es tangente sobre la línea de certeza, y el agente obtiene $M_0 - \gamma L$ en ambos estados.



Demanda de seguro: con prima justa, el averso se asegura por completo.

Estática comparativa: por el teorema de la función implícita, la demanda de aseguramiento depende de la aversión y de los parámetros de la lotería:

$$M_s^* = d_s(\underset{+}{\text{CAA}},\ \underset{-}{p_1},\ \underset{+}{p_2},\ \underset{\pm}{M_0},\ \underset{+}{L},\ \underset{\pm}{\gamma})$$

Extensiones: que la competencia lleve la prima a la justa exige una aseguradora casi neutral al riesgo, gracias a la **agrupación de riesgos**, que con n riesgos independientes reduce la varianza de la pérdida media a σ^2/n, aunque solo elimina el riesgo idiosincrásico, y al **reparto de riesgos**, que entre muchos partícipes lleva la prima de riesgo total hacia cero, como en el argumento de Arrow y Lind (1970).

Conclusiones: el modelo da los fundamentos de la demanda de seguros, sus determinantes y su estática comparativa. Su extensión más relevante es la información asimétrica, *ex ante*, la selección adversa, y *ex post*, el riesgo moral.

1.3.2. Decisión de cartera

Origen: Markowitz (1952) formaliza la selección de carteras con el enfoque media-varianza, Tobin (1958) añade un activo sin riesgo y Sharpe (1963) la simplifica con el modelo de índice único. En utilidad esperada, se busca qué empuja a un averso a abandonar la línea de certeza.

Supuestos: el agente tiene su riqueza M_0 en un bono de rentabilidad cierta r y puede invertir una proporción α en una acción que rinde r_a con probabilidad $1-p$ y r_b con probabilidad p, con $r_a > r > r_b$.

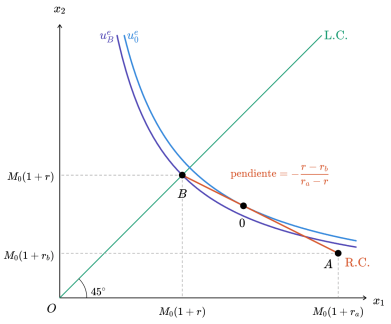
Planteamiento: elige la proporción α que maximiza su utilidad esperada:

$$\max_{\alpha}\ u^e = (1-p) \cdot u(x_1) + p \cdot u(x_2) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} x_1 = M_0[1 + r + \alpha(r_a - r)] \\ x_2 = M_0[1 + r - \alpha(r - r_b)] \end{cases}$$

CPO: el óptimo es la tangencia entre la curva de indiferencia más alta y la recta de cartera, cuyos extremos son las carteras solo de bonos y solo de acciones. La RMSE iguala la tasa objetiva a la que la cartera intercambia renta entre estados:

$$\text{RMSE}_{21} = \frac{(1-p) \cdot u'(x_1)}{p \cdot u'(x_2)} = \frac{r - r_b}{r_a - r}$$

El averso abandona la línea de certeza si el rendimiento esperado de la acción supera a r.



Decisión de cartera.

CSO: la aversión garantiza el máximo. Con neutralidad o propensión, la solución es de esquina, $\alpha^* \in \{0, 1\}$.

Solución: la demanda de activo con riesgo cae con la aversión y con la probabilidad del resultado desfavorable, es ambigua con la riqueza y depende de la ganancia y la pérdida frente al bono:

$$\alpha^* = d(\underset{-}{\text{CAA}},\ \underset{-}{p},\ \underset{\pm}{M_0},\ \underset{+}{r_a},\ \underset{+}{r_b},\ \underset{-}{r})$$

Solo el signo de r_b es inequívoco porque, al subir, reduce la pérdida en el estado desfavorable, y los efectos sustitución y renta actúan en el mismo sentido. El de r_a exige CAR ≤ 1, y el de r, CAA constante o creciente. Según los tres rendimientos, la cartera va toda al bono, se diversifica o va toda a la acción.

Conclusiones: explica la demanda de activos con riesgo a partir de la aversión y la riqueza, y enlaza la TUE con la selección de carteras. Pero, con dos estados y un solo activo arriesgado, no recoge la correlación entre rendimientos, de la que dependen las ganancias de diversificar.

1.4. Dominancia y preferencia por estados

1.4.1. Dominancia estocástica

Idea: los coeficientes de Arrow-Pratt caracterizan al individuo, mientras que la **dominancia estocástica** caracteriza las loterías y las ordena parcialmente sin conocer la utilidad concreta. Con F y G las funciones de distribución de dos loterías:

- F domina a G en **primer orden** si $F(x) \leq G(x)$ para todo x: la probabilidad de no alcanzar cualquier pago nunca es mayor con F, y todo agente con utilidad creciente la prefiere.
- F domina a G en segundo orden si $\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]\, dt \geq 0$ para todo x: todo averso al riesgo la prefiere, y, con igual media, G es una versión de F con más dispersión (Rothschild y Stiglitz, 1970).

La de segundo orden formaliza que, a igual rendimiento esperado, el averso elige la lotería menos arriesgada. El criterio media-varianza es un caso particular, con distribuciones normales o utilidad cuadrática.

1.4.2. Preferencia por estados

Idea: Arrow (1953) y Debreu (1959) tratan el consumo en cada estado de la naturaleza como un bien distinto.

Planteamiento: con dos estados, el individuo maximiza $p_1u(x_1) + p_2u(x_2)$ sujeto a $q_1x_1 + q_2x_2 = M_0$, donde q_s es el precio de un **activo Arrow**, que paga una unidad si ocurre el estado s y nada en otro caso.

CPO: la RMS entre el consumo de los dos estados, ponderada por sus probabilidades, iguala el precio relativo de los activos contingentes. Es suficiente por la concavidad de u y la restricción lineal:

$$\frac{p_1u'(x_1)}{p_2u'(x_2)} = \frac{q_1}{q_2}$$

Solución: con precios actuarialmente justos, $q_1/q_2 = p_1/p_2$, el averso iguala el consumo en ambos estados y se asegura plenamente, como en el modelo de seguro.

Conclusiones: convierte la elección con riesgo en un problema ordinario de demanda y muestra que un sistema completo de mercados contingentes asigna el riesgo de forma eficiente. Pero ese sistema no existe, porque crear un mercado por estado es costoso, y los estados deben ser observables y verificables, lo que excluye la información asimétrica.

En suma, con un aparato mínimo la TUE representa las preferencias sobre loterías como una esperanza de utilidades, mide la actitud ante el riesgo y resuelve el seguro y la cartera. Sus límites son la independencia, el axioma más contestado, la inestabilidad de los perfiles y el supuesto de probabilidades objetivas.

2. Críticas y teoría de la perspectiva

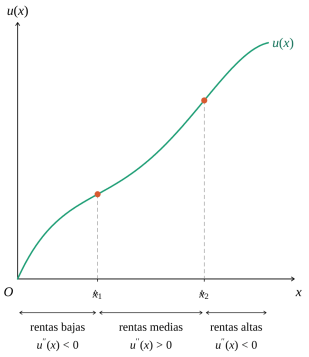
Los perfiles de riesgo pueden cambiar con distintas variables, lo que ha motivado críticas teóricas, sobre la forma de la utilidad, y empíricas, sobre los axiomas. Todas mantienen probabilidades objetivas, es decir, riesgo.

2.1. Críticas teóricas: forma de la utilidad

2.1.1. Friedman y Savage (1948)

Origen: un mismo agente compra seguros, como un averso, y participa en juegos de azar desfavorables, como un propenso, algo incoherente con los perfiles de la TUE.

Idea: una utilidad de Bernoulli cóncava, convexa y de nuevo cóncava, con dos puntos de inflexión, $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$: hay aversión en las rentas bajas y altas y propensión en las intermedias, y la actitud cambia con la renta.



Utilidad de Friedman y Savage: tramos cóncavo, convexo y cóncavo.

Conclusiones: permitía entender conductas observadas, pero, como señaló Markowitz (1952), sus implicaciones chocan con la evidencia. Los ricos, en el último tramo cóncavo, no aceptarían apuestas desfavorables, y no existirían los casinos de Montecarlo. Las rentas intermedias desearían apuestas simétricas de gran cuantía.

2.1.2. Utilidad de la riqueza (Markowitz, 1952)

Idea: Markowitz cuestiona que las loterías se evalúen por la renta final. Importan los cambios, $x = M_0 + \Delta x$, respecto a la riqueza habitual, M_0, que actúa como punto de referencia o "ancla" del comportamiento.

Forma: la utilidad tiene tres puntos de inflexión, el central en la riqueza habitual. Es convexa ante ganancias pequeñas y cóncava ante las grandes, cóncava ante pérdidas pequeñas y convexa ante las grandes.

Conclusiones: ofrece más matices que la de Friedman y Savage e influyó en los trabajos de Kahneman y Tversky sobre la aversión a la pérdida. Pero es difícil postular funciones de este tipo y puede haber incoherencias entre perfiles.

2.2. Críticas empíricas: los axiomas

Idea: el contraste experimental revela violaciones sistemáticas de la TUE, que se ordenan según el supuesto que incumplen.

Independencia (Allais, 1953): la **paradoja de Allais** muestra que cambiar un componente común a dos loterías, que no debería alterar la elección, sí la altera. Con dos pares de loterías sobre los mismos resultados, la mayoría prefiere $\mathbf{l}_1^1$ en el primero y $\mathbf{l}_2^2$ en el segundo, aunque los pares solo difieren en una consecuencia común. MacCrimmon y Larsson (1979) distinguen dos manifestaciones:

- *Efecto consecuencia común*: la preferencia cambia al modificar un premio que ambas loterías comparten con la misma probabilidad. Cuanto mayor es el pago común, más averso se vuelve el agente ante la parte incierta.
- *Efecto razón común*, o efecto certeza (Kahneman y Tversky, 1979): la preferencia cambia al reducir en la misma proporción todas las probabilidades de ganar, porque se sobrevaloran los resultados ciertos frente a los meramente probables.

Invarianza: la TUE supone que la elección depende de las loterías y no de cómo se presentan ni de cómo se pregunta por ellas. Lo contradicen dos resultados:

- *Efecto marco* (Tversky y Kahneman, 1981): describir un mismo problema en ganancias o en pérdidas lleva a elecciones distintas, por sesgos cognitivos.
- *Inversiones de preferencia* (Lichtenstein y Slovic, 1971): la lotería elegida entre dos no siempre es la mejor valorada por separado, lo que contradice la transitividad y la invarianza del procedimiento.

2.3. Perspectiva (Kahneman y Tversky, 1979)

Origen: esas regularidades han guiado enfoques que rompen la independencia, unos preservando la dominancia estocástica de primer orden, como la utilidad dependiente del rango (Quiggin, 1982), y otros transformando las probabilidades en pesos de decisión.

Idea: el más influyente es la **teoría de la perspectiva** de Daniel Kahneman (Nobel 2002) y Amos Tversky, formulada en 1979 para el riesgo. Los agentes valoran las loterías como ganancias y pérdidas respecto a un punto de referencia, con una función de valor y una función de ponderación que sustituyen a la utilidad de Bernoulli y a las probabilidades objetivas.

2.3.1. Supuestos

Entorno: loterías con probabilidades objetivas, como en la TUE, pero cuyos resultados se codifican como ganancias y pérdidas, Δx_i, respecto a un punto de referencia (habitualmente la riqueza actual, aunque puede ser una expectativa o una aspiración). Sigue siendo riesgo, con pesos de decisión sobre probabilidades conocidas.

Agentes: el agente evalúa la lotería en dos fases y elige la de mayor valor ponderado.

- *Edición*: simplifica y codifica el problema: fija el punto de referencia, clasifica los resultados en ganancias y pérdidas y elimina los componentes comunes, lo que hace posibles los efectos marco.
- *Evaluación*: valora cada lotería con una función de valor, $v(\cdot)$, sobre ganancias y pérdidas, y una función de ponderación, $\pi(\cdot)$, sobre las probabilidades.

2.3.2. Modelo

Planteamiento: en el caso discreto, con $v(\cdot)$ creciente, $v(0) = 0$ y definida sobre $\Delta x_i = x_i - x_0$, y $\pi(\cdot)$ no lineal, las loterías se evalúan según:

$$V(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{n} \pi(p_i) \cdot v(\Delta x_i)$$

Como los pesos se aplican a cada probabilidad por separado, puede elegirse una lotería dominada en primer orden. Kahneman y Tversky lo evitan suponiendo que en la edición el agente descarta las alternativas dominadas.

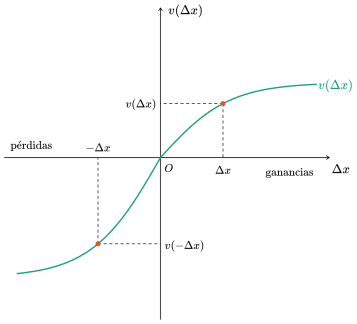
Función de valor: tiene tres rasgos.

- *Dependencia del punto de referencia*: se define sobre ganancias y pérdidas, porque el sistema perceptivo responde más a cambios que a magnitudes absolutas.
- *Aversión a la pérdida*: los agentes son más sensibles a las pérdidas que a ganancias de igual magnitud, y la función es más inclinada en las pérdidas: $-v(-\Delta x) > v(\Delta x)$ para $\Delta x > 0$.
- *Sensibilidad decreciente*: es cóncava en ganancias y convexa en pérdidas, lo que implica aversión al riesgo en las ganancias y propensión en las pérdidas, para probabilidades moderadas. Gráficamente, $v(\Delta x)$ pasa por el origen, que es el punto de referencia.

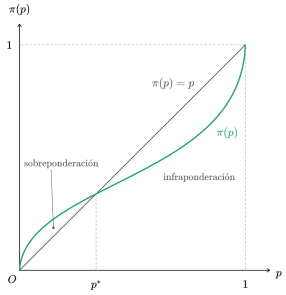
Función de ponderación: $\pi(\cdot)$ sobrepondera las probabilidades bajas e infrapondera las altas, en forma de S invertida, de modo que pesan más las colas. No son creencias erróneas, sino pesos de decisión. Con la función de valor explica el **patrón cuádruple**: aversión al riesgo ante ganancias probables y pérdidas improbables, y propensión ante ganancias improbables, como las loterías, y pérdidas probables.

2.3.3. Conclusiones

Aspectos positivos: recoge las violaciones de la independencia y de la invarianza con un aparato formal comparable al de la TUE. Camerer (2000) reúne diez regularidades de campo contrarias a la utilidad esperada que así se explican, y conceptos derivados, como el efecto dotación o la contabilidad mental (Thaler), son hoy el núcleo de la economía conductual.



Función de valor: cóncava en ganancias, convexa y más inclinada en pérdidas.



Función de ponderación de probabilidades (Tversky y Kahneman, 1992).

Limitaciones: es difícil de aplicar. En una decisión de cartera, no es evidente si el punto de referencia es la riqueza total, el valor de la cartera o cada activo. Además, la fase de edición no está formalizada, y la teoría es descriptiva, no normativa.

En suma, la teoría de la perspectiva reúne las críticas teóricas y empíricas con el punto de referencia de Markowitz, la aversión a la pérdida y la ponderación no lineal, aunque en su versión de 1979 sigue limitada a probabilidades objetivas.

3. Elección en incertidumbre

Rara vez las situaciones se reducen a probabilidades objetivas. Lo habitual es la incertidumbre en sentido de Knight, en la que la "probabilidad" es una estimación subjetiva.

3.1. Probabilidad subjetiva y acumulativa

Las dos teorías del riesgo se extienden a la incertidumbre: la utilidad esperada, con la teoría de la probabilidad subjetiva, y la perspectiva, con la perspectiva acumulativa.

3.1.1. Probabilidad subjetiva (Anscombe y Aumann, 1963)

Origen: las formulaciones de Savage (1954) y de Anscombe y Aumann (1963) buscan determinar a la vez una utilidad, los gustos, y una medida de probabilidad, las creencias, a partir de las preferencias. La de Anscombe y Aumann es la más próxima a la TUE: el agente se comporta *como si* estableciera probabilidades subjetivas.

Supuestos: hay un conjunto finito de estados, $j = 1, \dots, s$, sin probabilidades dadas, y cada alternativa asigna a cada estado una lotería objetiva F_j sobre los pagos. El agente cumple los axiomas de la TUE, con la independencia ampliada a valoraciones estado-dependientes.

Razonamiento: la representación se obtiene en tres pasos.

1. Por el teorema de la utilidad esperada ampliada, cada alternativa se evalúa con valoraciones estado-dependientes, $\sum_j \int u_j(x)\, dF_j(x)$. Con pagos ciertos se reduce a $\sum_j u_j(x_j)$.
2. Para separar las probabilidades de la utilidad, se imponen preferencias **estado-uniformes**: la valoración de una consecuencia no depende del estado en que se logre. En símbolos, $\succsim_j = \succsim_{j'}$ para todo j, j'.
3. Por el teorema de la utilidad esperada subjetiva, existen probabilidades π_j positivas, que suman uno, y una utilidad $u(\cdot)$ que representan las preferencias.

Utilidad esperada subjetiva: la diferencia con la TUE está en π_j, probabilidades subjetivas reveladas por las elecciones:

$$(x_1, \dots, x_s) \succsim (x'_1, \dots, x'_s) \leftrightarrow \sum_j \pi_j \cdot u(x_j) \geq \sum_j \pi_j \cdot u(x'_j)$$

Conclusiones: unifica riesgo e incertidumbre y hace de las creencias objeto de análisis, porque se revelan en las elecciones y se actualizan con información. Pero hereda las críticas a la TUE y tiene problemas propios.

Paradoja de Ellsberg (1961): los individuos prefieren apostar con una urna de probabilidades conocidas antes que con otra de probabilidades desconocidas, un patrón que ninguna asignación de probabilidades subjetivas justifica, conocido como **aversión a la ambigüedad**. La incorporan la utilidad esperada *maxmin* (Gilboa y Schmeidler, 1989), que evalúa el peor caso de un conjunto de probabilidades, y las probabilidades no aditivas (Schmeidler, 1989).

3.1.2. Perspectiva acumulativa (Tversky y Kahneman, 1992)

Idea: Tversky y Kahneman (1992) reformulan la versión de 1979, limitada al riesgo y expuesta a violar la dominancia de primer orden, con la ponderación dependiente del rango de Quiggin (1982) y las probabilidades no aditivas de Schmeidler (1989). La función de valor no cambia, pero el peso de cada resultado depende de su posición en la ordenación y se obtiene de las probabilidades acumuladas, por separado para ganancias y pérdidas.

Razonamiento: con incertidumbre, el agente no asigna probabilidades aditivas, sino capacidades, pesos no aditivos que dependen de la fuente de la incertidumbre, y así acomoda la aversión a la ambigüedad.

Conclusiones: respeta la dominancia de primer orden, unifica riesgo e incertidumbre y reproduce con pocos parámetros el patrón cuádruple. Hereda la dificultad de especificar el punto de referencia y el carácter descriptivo, y exige estimar más parámetros.

3.2. Análisis bayesiano (Bayes, 1763)

Idea: es la contrapartida operativa de la probabilidad subjetiva. Muestra cómo formar las creencias y revisarlas con información experimental.

Probabilidad total: la probabilidad de un suceso B se calcula con las probabilidades condicionadas a los sucesos A_i de una partición del espacio muestral:

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

Teorema de Bayes (1763): da la probabilidad de un suceso condicionada a otro cuando se conoce la del condicionado inverso:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Árboles de decisión: representan el problema como una sucesión de nodos de decisión, donde elige el agente, y de azar, donde actúa la naturaleza, y se resuelven hacia atrás. En cada nodo de azar se calcula el valor esperado, o la utilidad esperada si el agente no es neutral al riesgo, y en cada nodo de decisión se elige la rama de mayor valor.

El teorema de Bayes actualiza las probabilidades con información experimental, como un ensayo o una encuesta, y permite valorarla: el **valor esperado de la información** es la diferencia entre el valor del problema con ella y sin ella. Si la demanda de un producto nuevo es alta, A_1, con probabilidad 0,4 y un estudio da un informe favorable, B, con probabilidad 0,8 si es alta y 0,3 si es baja, $P(B) = 0{,}32 + 0{,}18 = 0{,}50$ y $P(A_1 \mid B) = 0{,}32/0{,}50 = 0{,}64$.

3.3. Criterios de decisión en incertidumbre

Idea: si el agente no está dispuesto a asignar probabilidades, ni siquiera subjetivas, decide con reglas definidas sobre la matriz de resultados de cada acción en cada estado:

1. *Wald*, pesimista: el mejor de los peores resultados, *maximin* en ganancias o *minimax* en costes. Asegura el mejor resultado posible en el peor escenario.
2. *Optimista*, *maximax*: el mejor de los mejores resultados.
3. *Hurwicz*: combina ambos con un índice de optimismo $\alpha \in [0, 1]$, valora cada acción como α por su mejor resultado más $1 - \alpha$ por el peor y elige la de mayor valor. Wald y *maximax* son los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. En símbolos, cada acción vale:

$$\alpha \cdot (\text{mejor resultado}) + (1 - \alpha) \cdot (\text{peor resultado})$$

4. *Savage*: calcula el coste de oportunidad de cada acción en cada estado, el mejor resultado del estado menos el obtenido, y elige la acción que minimiza el máximo, el *minimax* del arrepentimiento.
5. *Laplace*: por el principio de razón insuficiente, da a todos los estados el peso $1/s$ y elige la acción de mayor resultado esperado, lo que devuelve el problema a la probabilidad subjetiva.