A11. Teoría de la producción. Caracterización de la tecnología de la empresa a corto y largo plazo. El conjunto de posibilidades de producción. La función de producción. Rendimientos locales y globales a escala. Elasticidad de sustitución. Producción conjunta

1. Fundamentos de la teoría de la producción

La teoría de la producción concibe la empresa como un agente racional que procura obtener, con una tecnología dada, el mayor *output* posible de los *inputs* que emplea. Excluye, por ello, los precios y los costes, y se centra en las restricciones técnicas que condicionan físicamente la producción.

1.1. Planes de producción y tecnología

El conjunto de elección se delimita en tres pasos: del espacio de todos los planes de producción al subconjunto de los técnicamente posibles y, dentro de este, a su frontera, formada por los técnicamente eficientes.

1.1.1. Espacio de planes de producción

Definición: un **plan de producción** recoge las combinaciones de *output* e *inputs* de un proyecto de producción. El **espacio de planes de producción** (EPP) reúne todos los planes, vectores $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ en los que los componentes positivos son *outputs* y los negativos, *inputs*. En símbolos:

$$\text{EPP} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid y_i > 0 \to x_i\text{: output; } y_i < 0 \to z_i\text{: input}\}$$

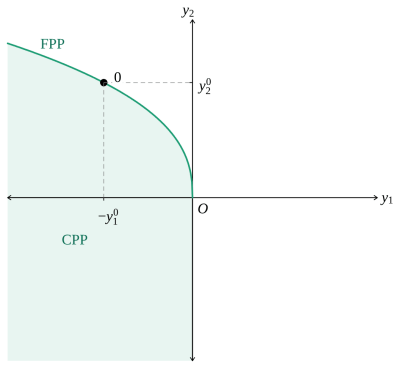
Pero los recursos son limitados. La empresa solo tiene a su alcance los planes que permite el conocimiento técnico y que su dotación de recursos le deja ejecutar, los físicamente posibles, que forman el **conjunto de posibilidades de producción**, CPP $\subseteq$ EPP.

1.1.2. CPP: axiomas de delimitación

Propiedades: el CPP se delimita con seis axiomas.

- *No vacío*: existe al menos un plan a disposición de la empresa.
- *Cerrado*: el límite de una secuencia de planes posibles es posible, de modo que el CPP incluye su frontera y los planes eficientes son posibles.
- *Libre disposición*: si un plan es posible, también lo es cualquier otro que emplee los mismos *inputs* o más y obtenga el mismo *output* o menos. La capacidad productiva puede derrocharse sin coste, y la frontera tiene pendiente no positiva. Formalmente, $\mathbf{y}_0 \in$ CPP, $\mathbf{y}_1 \leq \mathbf{y}_0 \Rightarrow \mathbf{y}_1 \in$ CPP, y, con la inacción, deja dentro del CPP el ortante negativo.
- *Imposibilidad de producción gratuita* (*no free lunch*): no puede obtenerse *output* sin emplear algún *input*, CPP $\cap \mathbb{R}^n_+ \subseteq \{\mathbf{0}\}$. Gráficamente, el CPP no tiene ningún punto en el ortante positivo salvo, a lo sumo, el origen.
- *Posibilidad de inacción*: el plan nulo es posible, $\mathbf{0} \in$ CPP. Puede incumplirse a corto plazo, con factores fijos o costes irrecuperables. Con el axioma anterior, el origen queda sobre la frontera.
- *Irreversibilidad*: si un plan no nulo es posible, su inverso no lo es: no se pueden recuperar los *inputs* a partir del *output*. Formalmente, $\mathbf{y} \in$ CPP, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{y} \notin$ CPP.

Gráficamente, en el plano *input-output*, (y_1, y_2), con el *input* en negativo, el CPP es la región que reúne los planes posibles, y la FPP, su límite superior, una curva que pasa por el origen. Un plan eficiente, como el 0, emplea y_1^0 unidades de *input* para obtener y_2^0 de *output*.



Conjunto (CPP) y frontera (FPP) de posibilidades de producción: el conjunto reúne los planes factibles y la frontera, los eficientes.

1.1.3. FPP: eficiencia técnica y rendimientos

Eficiencia técnica: en la **frontera de posibilidades de producción** (FPP), la restricción tecnológica efectiva de la empresa, no es posible obtener más *output* con los mismos *inputs* ni el mismo *output* con menos.

Axiomas de regularidad: la forma de la frontera depende de tres axiomas sobre la escala.

- *Aditividad*, o libre entrada: sumar dos planes posibles da otro posible, porque pueden ejecutarse a la vez en unidades independientes. Implica rendimientos no decrecientes. Garantiza que duplicar un plan es posible, pero nada impide planes más productivos que esa duplicación.
- *Proporcionalidad*, o divisibilidad: todo plan posible puede reducirse a escala en cualquier proporción. Implica rendimientos no crecientes. Formalmente, $\mathbf{y}_0 \in \text{CPP} \Rightarrow \lambda\mathbf{y}_0 \in \text{CPP}$ para $\lambda \in [0, 1]$.
- *Convexidad*: toda combinación de dos planes posibles es posible. Las mezclas equilibradas de factores son al menos tan productivas como las extremas. En la producción simple equivale a una función de producción cóncava. Formalmente, $\alpha\mathbf{y}_0 + (1-\alpha)\mathbf{y}_1 \in$ CPP para todo $\alpha \in [0, 1]$, y la convexidad estricta excluye los rendimientos crecientes y, por tanto, los mixtos.

Rendimientos: solo con rendimientos constantes se cumplen los tres a la vez.

1. Con proporcionalidad y aditividad, el CPP es un cono convexo, los rendimientos son **constantes** y la frontera es una recta desde el origen. Todo plan admite cualquier cambio de escala.
2. Un CPP estrictamente convexo admite reducciones proporcionales, pero no la suma de planes, de modo que los rendimientos son **decrecientes** y la frontera, estrictamente cóncava.
3. Con aditividad y sin proporcionalidad, el CPP deja de ser convexo, un plan grande rinde más que varios pequeños, los rendimientos son **crecientes** y la frontera, convexa. La teoría neoclásica excluye este caso, que recupera la organización industrial.

1.2. La función de producción

1.2.1. Función de producción y propiedades

Definición: la **función de producción** es una relación exclusivamente técnica que da, para cada vector de *inputs*, el *output* máximo que permite la tecnología. Describe la frontera del CPP:

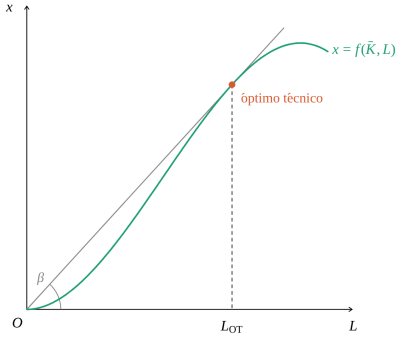
$$x = f(\mathbf{z}), \qquad f : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$$

En la versión dual, la tecnología se describe con el conjunto de requerimientos de *inputs*, $V(x)$, las combinaciones que obtienen al menos x, cuya frontera es la isocuanta. Con varios *outputs*, se usa una función de transformación implícita, $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$. El conjunto de requerimientos es $V(x) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_+ : f(\mathbf{z}) \geq x\}$.

Propiedades:

- Es continua y dos veces diferenciable, lo que permite definir productividades marginales y relaciones de sustitución. Supone la perfecta divisibilidad de factores y producto.
- Es **cardinal**, porque sus variables son observables y medibles. A diferencia de la utilidad, no admite transformaciones que alteren sus valores.
- Es no decreciente en cada factor, por la libre disposición, con productividades marginales positivas en la región económica, y cuasicóncava, con isocuantas convexas que recogen la sustituibilidad decreciente entre factores.
- Comparar $f(\lambda\mathbf{z})$ con $\lambda f(\mathbf{z})$ ante un cambio equiproporcional de todos los factores define los rendimientos a escala: si es homogénea de grado h, crecientes, constantes o decrecientes según h sea mayor, igual o menor que uno.
- Si es homogénea de grado h, por el teorema de Euler, $\sum_i z_i \partial f/\partial z_i = h \cdot f(\mathbf{z})$: con rendimientos constantes, pagar a cada factor su productividad marginal agota exactamente el producto; con crecientes, los pagos lo superan, y con decrecientes, no lo agotan.
- No es directamente observable, porque las empresas no siempre producen sobre la frontera, pero puede estimarse con datos de factores y de producto, separando la tecnología de la ineficiencia de cada empresa.

Gráficamente, con un *output*, trabajo, L, y capital, K, la función es una colina en $\mathbb{R}^3$. Fijando $\bar{K}$, el corte vertical es la función a corto plazo, de la que salen las productividades. Fijando el *output*, el corte horizontal es la isocuanta, de la que salen la RMST y la elasticidad de sustitución. Con rendimientos mixtos, la función a corto plazo es primero convexa y luego cóncava, y en el óptimo técnico, L_{OT}, el radio-vector le es tangente y la productividad media es máxima.



Función de producción a corto plazo: en el óptimo técnico, la productividad media es máxima.

1.2.2. Productividad marginal y media

Productividad marginal: el aumento del producto ante un aumento infinitesimal del factor variable, *ceteris paribus*. Es la pendiente de la función de producción:

$$\mathrm{Pmg}_L \equiv f'_L = \frac{\partial f(K,L)}{\partial L}$$

Productividad media: el producto por unidad de factor variable, $\mathrm{Pme}_L = x/L$. Es la pendiente del radio-vector desde el origen, $\tan\beta$. Crece hasta que el radio-vector es tangente a la función de producción. La marginal, pendiente de la función, es creciente en su tramo convexo, decreciente en el cóncavo y nula en el máximo técnico.

Si la productividad marginal supera la media, cada trabajador adicional produce más que la media y esta sube. Si es inferior, la media cae. Ambas coinciden, por tanto, en el máximo de la productividad media, el **óptimo técnico**.

1.3. Las curvas isocuantas

Definición: una **isocuanta** (curva de nivel de la función de producción, proyectada sobre el plano de los factores) recoge los modos de combinar los factores que dan un mismo volumen de producto.

Propiedades: no se cortan, las más alejadas del origen reflejan más producto y, con eficiencia técnica, tienen pendiente negativa. Pueden ser lineales, con sustituibilidad perfecta; angulares o Leontief, con complementariedad perfecta; quebradas, con sustituibilidad limitada, como en la programación lineal, o continuas y convexas, con sustituibilidad continua e imperfecta.

1.3.1. Pendiente: la RMST

Definición: la **relación marginal de sustitución técnica** es la tasa a la que un factor sustituye a otro con la producción constante (cuántas unidades de capital libera la empresa al contratar una unidad más de trabajo). Se obtiene igualando a cero la diferencial total de la función; para dos factores i y j y, en particular, para el capital y el trabajo:

$$\mathrm{RMST}_{ji} = -\left.\frac{dz_j}{dz_i}\right|_{x_0} = \frac{f'_i}{f'_j}, \qquad \mathrm{RMST}_{KL} = -\left.\frac{dK}{dL}\right|_{x_0} = \frac{f'_L}{f'_K}$$

Si la Pmg_L es elevada en relación con la Pmg_K, una unidad de trabajo sustituye muchas unidades de capital y la RMST es alta. Al sustituir capital por trabajo, la Pmg_L tiende a caer y la Pmg_K a subir, y la cuasiconcavidad garantiza una RMST decreciente. Equivale a la RMS del consumidor, pero, como la función es cardinal, la magnitud de las contribuciones marginales sí tiene significado. Su limitación es que depende de las unidades en que se mide cada factor. Gráficamente, la isocuanta es convexa respecto al origen porque la RMST es decreciente, y su pendiente en cada punto, cambiada de signo, es la RMST.

1.3.2. Forma: elasticidad de sustitución (Hicks, 1932)

Definición: la **elasticidad de sustitución técnica** evita el problema de las unidades, porque relaciona dos variaciones porcentuales, la de la mezcla factorial y la de la RMST. Para dos factores i y j, $\sigma_{ji} = \partial \ln(z_j/z_i)/\partial \ln \mathrm{RMST}_{ji}$; con el capital y el trabajo:

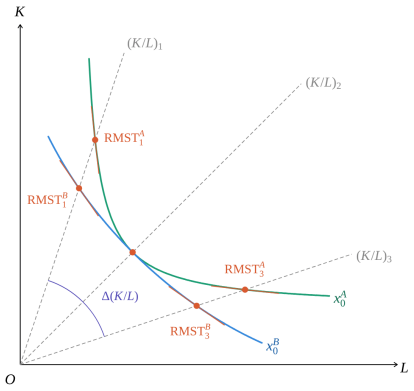
$$\sigma_{KL} = \left.\frac{\Delta\,\%(K/L)}{\Delta\,\%(\mathrm{RMST}_{KL})}\right|_{x_0} = \frac{\partial \ln(K/L)}{\partial \ln \mathrm{RMST}_{KL}}$$
$$= \frac{d(K/L)}{d\,\mathrm{RMST}_{KL}} \cdot \frac{\mathrm{RMST}_{KL}}{K/L} \geq 0$$

Si es alta, los factores se sustituyen con facilidad y la RMST, el cociente de productividades marginales, apenas se mueve aunque cambie la mezcla. Con dos factores y minimización de costes, $\mathrm{RMST} = w/r$, mide la respuesta de la mezcla al precio relativo de los factores. Con más de dos factores, se generaliza con la elasticidad parcial de Allen (1938).

Casos: la función lineal tiene $\sigma = \infty$, sustituibilidad perfecta; la Leontief, $\sigma = 0$, complementariedad perfecta, y la Cobb-Douglas, $\sigma = 1$. En esta última, la ratio K/L varía en la misma proporción que la RMST, y por eso, con minimización de costes, las participaciones relativas de los factores en el coste se mantienen constantes. En la CES, con $\alpha, \beta > 0$, la elasticidad es constante:

$$x = (\alpha K^\rho + \beta L^\rho)^{1/\rho} \;\rightarrow\; \sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

Desarrollo gráfico: para un mismo cambio de la proporción de factores, la RMST varía más en la isocuanta más convexa, de elasticidad baja, que en la más recta. Los movimientos sobre un radio-vector son cambios de escala, y el paso de uno a otro, $\Delta(K/L)$, un cambio en las proporciones de factores.

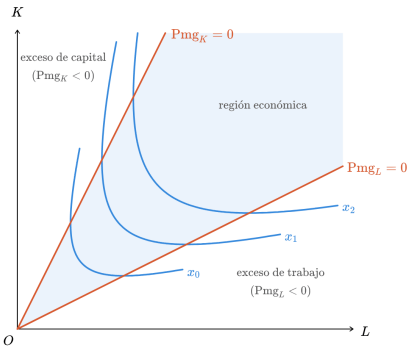


Elasticidad de sustitución: la RMST varía más en la isocuanta más convexa (σ^A baja).

1.3.3. Eficiencia técnica y región económica

Una empresa racional nunca emplea un factor con productividad marginal negativa, porque reduciéndolo obtendría más *output* con menos *input*. Solo interesa, por eso, el tramo de las isocuantas con pendiente negativa ($\mathrm{RMST} \geq 0$).

Región económica: en ella ambos factores tienen productividad marginal positiva, las isocuantas son decrecientes y hay eficiencia técnica. La limitan las **líneas de contorno** (*ridge lines*), sobre las que la productividad marginal de un factor vale cero. Son isoclinas rectas si la función es homotética e irregulares en otro caso. Fuera, uno de los factores tiene productividad marginal negativa y las isocuantas son crecientes, zona que solo existe si se prescinde de la libre disposición, que excluye cualquier productividad marginal negativa.



Región económica.

Relación con las etapas: con rendimientos constantes, la región económica corresponde a la etapa II del corto plazo, la región exterior superior, con exceso de capital, a la etapa I, y la inferior, con exceso de trabajo, a la III. En general, solo es exacta la correspondencia entre la región inferior y la etapa III.

1.4. De la tecnología a la decisión

La empresa se estudia aquí solo como unidad técnica. El conjunto de elección son los planes técnicamente posibles, y su ordenación, la función de producción y sus isocuantas. Para decidir hacen falta dos tipos de consideraciones más.

Económicas: los precios de los factores y el presupuesto definen la recta isocoste, y el equilibrio resulta de combinarla con la tecnología, minimizando el coste de un nivel de producción o maximizando el *output* para un coste dado.

De mercado: decidir cuánto producir y a qué precio exige conocer el mercado del producto y su precio.

En suma, la teoría caracteriza la empresa por sus restricciones técnicas: los axiomas delimitan los planes posibles y la frontera, los de escala fijan los rendimientos, y la función de producción da las productividades, la RMST y la elasticidad de sustitución. No basta para decidir cuánto producir, pero ordena la respuesta del *output* cuando varían un factor, todos o la tecnología.

2. Leyes de producción

La empresa puede aumentar su producción alterando la combinación de factores, pero con restricciones temporales, porque con poco tiempo o costes de ajuste la mezcla es difícil de modificar. Se distinguen cuatro horizontes:

1. En el **muy corto plazo**, la producción ya está hecha y la cantidad ofrecida es fija (periodo de mercado).
2. En el **corto plazo**, al menos un factor es fijo, y rige la ley de las proporciones variables.

3. En el **largo plazo**, todos los factores son variables, y lo relevante son los rendimientos a escala.
4. En el **muy largo plazo**, también cambia la tecnología (el progreso técnico).

2.1. Corto plazo: proporciones variables

Ley: con un factor fijo y la tecnología dada, solo cabe aumentar la producción con más factor variable. Como cambia la proporción entre factores, llegado cierto punto la contribución marginal del factor variable es decreciente y, llevada al extremo, negativa.

2.1.1. Elasticidad-producto

Definición: la **elasticidad-producto** mide la respuesta porcentual del *output* al factor variable y es el cociente entre las productividades marginal y media:

$$\varepsilon_{xL} = \frac{\partial x}{\partial L} \cdot \frac{L}{x} = \frac{\text{Pmg}_L}{\text{Pme}_L}$$

Desempeña en el corto plazo el papel de la elasticidad de escala en el largo. Indica la etapa de la producción y, con el precio del factor dado, fija la forma de las curvas de costes a corto plazo. Es mayor que uno mientras la productividad media crece, menor cuando decrece e igual a uno en el óptimo técnico. En la Cobb-Douglas, es constante e igual al exponente del factor.

2.1.2. Etapas de la producción

Etapa I: llega hasta el margen extensivo, el óptimo técnico, L_{OT}, con $\varepsilon_{xL} > 1$. Sobra factor fijo respecto al variable, el capital no se aprovecha bien y, con rendimientos constantes, su productividad marginal es incluso negativa, de modo que conviene seguir contratando trabajadores. Formalmente, $\varepsilon_{xL} > 1$ para todo $L \in (0, L_{\text{OT}})$ y, con rendimientos constantes, $\text{Pmg}_K < 0$ en toda la etapa, fuera de la región económica.

– La función es primero creciente y convexa, con rendimientos marginales crecientes que pueden deberse a indivisibilidades, y después, desde el punto de inflexión, creciente y cóncava. En símbolos, $f'_L > 0$ y $f''_{LL} > 0$ en el tramo convexo, y $f'_L > 0$ y $f''_{LL} < 0$ en el cóncavo.

Ley de rendimientos marginales decrecientes (Turgot, 1767): si se aumenta un factor variable con el resto constante, a partir de cierto punto el producto crece, $f' > 0$, cada vez menos, $f'' < 0$. Observada en múltiples industrias, explica la forma de las curvas de costes, $\text{Cmg} = w/\text{Pmg}_L$, de la demanda de factores y de la oferta a corto plazo.

Etapa II: va del margen extensivo al intensivo, el máximo técnico, L_{MT}, con $\varepsilon_{xL} \in [0, 1]$, y en ella se altera la intensidad de uso. Con rendimientos constantes coincide con la región económica, de modo que ambas productividades marginales son positivas. La empresa debe producir en esta etapa, pero el punto exacto depende de los costes y, como la teoría de la producción no puede determinarlo por sí sola, hace falta la teoría de costes.

Etapa III: es la de sobreexplotación, con $\varepsilon_{xL} < 0$ a partir del máximo técnico, donde $\text{Pmg}_L = 0$. El factor variable es tan abundante que cada trabajador adicional reduce el producto total, y ninguna empresa racional produce aquí. Con jornadas laborales, el producto crece en proporción a las horas hasta unas 49 semanales, a ritmo decreciente a partir de ahí y, por encima de unas 55, prácticamente deja de aumentar (Pencavel, 2014).

Gráficamente, la Pmg_L alcanza su máximo en el punto de inflexión, corta a la Pme_L en el máximo de esta, en L_{OT}, y se anula en L_{MT}, donde el producto total es máximo. Así, la elasticidad-producto delimita las tres etapas:

$$\begin{aligned} \text{Etapa I:} \quad & \varepsilon_{xL} > 1, && L \in (0, L_{\text{OT}}) \\ \text{Etapa II:} \quad & \varepsilon_{xL} \in [0, 1], && L \in [L_{\text{OT}}, L_{\text{MT}}] \\ \text{Etapa III:} \quad & \varepsilon_{xL} < 0, && L > L_{\text{MT}} \end{aligned}$$

Los rendimientos marginales decrecientes parecen independientes del tipo de rendimientos a escala. Si la función es homogénea de grado $h \leq 1$ y cuasicóncava, es cóncava y la productividad marginal es no creciente, mientras que con rendimientos crecientes puede ser creciente en algún tramo.

2.2. Largo plazo: rendimientos a escala

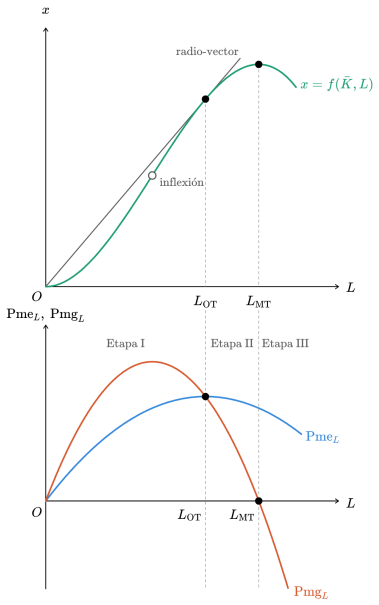
2.2.1. Elasticidad de escala

Definición: la **elasticidad de escala** es la variación porcentual del *output* ante una variación porcentual de todos los factores, con su proporción constante, y es la suma de las elasticidades-producto:

$$\varepsilon_{x\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{xz_i} = \varepsilon_{xK} + \varepsilon_{xL}$$

Clasificación: los rendimientos pueden ser de tres tipos.

1. *Crecientes*, $\varepsilon_{x\lambda} > 1$: por indivisibilidades (Wicksell, Edgeworth, Kaldor), por la especialización y la división del trabajo (Smith, 1776) o por razones físicas, como el oleoducto que, al duplicar el diámetro, cuadruplica el volumen con el doble de material. Con la especialización, cada factor se dedica a una etapa concreta del proceso, lo que aumenta la eficiencia global.
2. *Constantes*, $\varepsilon_{x\lambda} = 1$: por la posibilidad de replicar los procesos y de reducirlos a escala (aditividad y proporcionalidad).
3. *Decrecientes*, $\varepsilon_{x\lambda} < 1$: por capacidades rígidas y problemas de organización, como la pérdida de control al pasar la información por cada nivel de la jerarquía (Williamson, 1967), la burocracia, los fallos de coordinación y los costes de transacción.



Etapas de la producción a corto plazo ($\bar{K}$ fijo).

Funciones homogéneas: si $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^h f(K, L)$, la elasticidad de escala es constante e igual al grado, h, que en la Cobb-Douglas es $\alpha + \beta$. La homogeneidad implica homoteticidad: la RMST depende solo de la proporción de factores, las isocuantas son expansiones radiales unas de otras y la senda de expansión es una recta por el origen. Con $h = 1$, las productividades dependen solo de esa proporción. Con rendimientos crecientes o decrecientes, en cambio, la función no tiene por qué ser homogénea, porque la elasticidad de escala puede variar con la producción.

2.2.2. Rendimientos locales y globales

Rendimientos locales: los de un rango restringido de producción, el entorno de una combinación concreta de factores, $\mathbf{z}$. Se miden con la elasticidad de escala en ese punto, que informa de lo que ocurre si, desde ahí, todos aumentan en la misma proporción en una cuantía infinitesimal:

$$\varepsilon_{x\lambda}(\mathbf{z}) = \frac{df(\lambda \mathbf{z})}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{f(\lambda \mathbf{z})}\bigg|_{\lambda=1}$$

Intuitivamente, indican si, con el tamaño actual de la empresa, un aumento del 1 % de todos los factores eleva el *output* en más, en igual o en menos del 1 %. Son localmente crecientes, constantes o decrecientes en $\mathbf{z}$ según $\varepsilon_{x\lambda}(\mathbf{z})$ sea mayor, igual o menor que uno.

Rendimientos globales: los de todo el rango de producción, para cualquier combinación de factores y cualquier escala. Son una propiedad de toda la tecnología, como los axiomas de escala, y se comprueban comparando $f(\lambda \mathbf{z})$ con $\lambda f(\mathbf{z})$. Son crecientes si $f(\lambda \mathbf{z}) > \lambda f(\mathbf{z})$ para todo $\mathbf{z}$ y todo $\lambda > 1$, y constantes o decrecientes con la igualdad o la desigualdad contraria. Multiplicar todos los factores por cualquier $\lambda > 1$ multiplica siempre el *output* por más de λ, por λ o por menos de λ.

Relación: a lo largo de cada radio-vector, la elasticidad de escala es la derivada logarítmica del *output* respecto a la escala:

$$\frac{d \ln f(\lambda \mathbf{z})}{d \ln \lambda} = \varepsilon_{x\lambda}(\lambda \mathbf{z})$$

Los globales resultan, por tanto, de acumular los locales. Si la elasticidad de escala es mayor que uno en todos los puntos, al integrar se obtiene $f(\lambda \mathbf{z}) > \lambda f(\mathbf{z})$ para todo $\lambda > 1$, y análogamente en los otros dos casos. En una función homogénea, la elasticidad vale h en todos los puntos y ambos coinciden. Pero, en general, la elasticidad cambia con la producción y puede no haber rendimientos globales de ningún tipo, como con rendimientos mixtos. La producción tiene forma de S sobre el radio-vector, creciente a pequeña escala y decreciente a gran escala, la tecnología que subyace al coste medio a largo plazo en U. Así ocurre con $x = KL/(1 + KL)$, con rendimientos localmente crecientes si $x < 1/2$, constantes en $x = 1/2$ y decrecientes si $x > 1/2$, porque cada

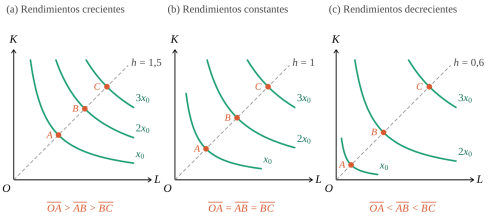
elasticidad-producto vale $1/(1+KL)$ y:

$$\varepsilon_{x\lambda} = \varepsilon_{xK} + \varepsilon_{xL} = \frac{2}{1+KL} = 2(1-x)$$

Costes: si la empresa minimiza costes, la elasticidad del coste respecto al *output* es la inversa de la de escala, $\varepsilon_{Cx} = 1/\varepsilon_{x\lambda}$, de modo que, con precios de los factores dados, los rendimientos localmente crecientes equivalen a **economías de escala**, y los decrecientes, a deseconomías.

2.2.3. Análisis gráfico

Con una función homogénea, los rendimientos se ven en la distancia, sobre un radio-vector, entre isocuantas de niveles x_0, $2x_0$ y $3x_0$. Dependen de la posición de las isocuantas, no de su forma, que fija la elasticidad de sustitución. Con rendimientos crecientes, las isocuantas sucesivas están cada vez más juntas; con constantes, equidistantes, y con decrecientes, cada vez más separadas. Si las isocuantas x_0, $2x_0$ y $3x_0$ cortan el radio-vector en A, B y C, $\overline{OA} > \overline{AB} > \overline{BC}$ con rendimientos crecientes, $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC}$ con constantes y $\overline{OA} < \overline{AB} < \overline{BC}$ con decrecientes.



Rendimientos a escala: crecientes (a), constantes (b) y decrecientes (c).

2.3. Muy largo plazo: progreso técnico

2.3.1. Definición y efectos

Definición: en el muy largo plazo, la función de producción incluye un factor que recoge las mejoras de los métodos de producción. El **progreso técnico** se manifiesta como innovación de producto, que crea variedades o bienes nuevos, de proceso, que permite producir más con los mismos *inputs*, o mejora de la calidad.

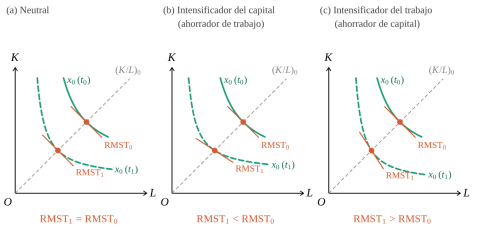
Efectos: se estudian en tres planos, con $x = A \cdot f(K, L)$ y un parámetro de eficiencia que pasa de A_0 a $A_1 > A_0$. La curva de productividad marginal se desplaza hacia fuera, de $\text{Pmg}_L(L; A_0)$ a $\text{Pmg}_L(L; A_1)$, la función a corto plazo pivota hacia arriba, de $A_0 f(\bar{K}, L)$ a $A_1 f(\bar{K}, L)$, y la isocuanta se desplaza hacia el origen. Los tres planos expresan la misma idea: un producto dado se obtiene con menos factores y, si los factores se mantienen, la producción es mayor. El progreso es neutral o sesgado según el criterio con que se mida su efecto sobre los factores.

2.3.2. Clasificación del progreso técnico

Su clasificación importa porque sus efectos alcanzan al reparto de la renta: si el progreso eleva la productividad marginal de un factor más que la del otro, con una proporción de factores dada, ese factor gana remuneración relativa y peso en la renta. Hicks (1932) y Harrod (1937; 1948) propusieron los dos criterios más usados.

Hicks (1932): compara la RMST, f'_L/f'_K, sobre un radio-vector dado antes y después del progreso.

- *Neutral*: el cociente de productividades marginales no varía, ambas suben en la misma proporción y la isocuanta se desplaza radialmente: $x_t = A(t) \cdot f(K_t, L_t)$, donde $A(t)$ recoge lo que influye en x sin ser K ni L, como el saber empresarial o la cualificación.
- *Intensificador del capital*, o ahorrador de trabajo: eleva más la productividad marginal del capital, la RMST disminuye y la empresa sustituye trabajo por capital. La isocuanta se hace más plana sobre el radio-vector.
- *Intensificador del trabajo*, o ahorrador de capital: eleva más la del trabajo, la RMST aumenta y la empresa sustituye capital por trabajo. La isocuanta se hace más inclinada sobre el radio-vector.



Clasificación de Hicks: neutral (a), ahorrador de trabajo (b) y de capital (c).

Harrod (1937; 1948): el progreso es neutral si las participaciones de los factores en la renta no cambian con una relación capital-producto dada. Como mostraron Robinson (1938) y Uzawa (1961), exige que el progreso aumente la productividad del trabajo, de modo que, con una misma cantidad de capital, se precisa cada vez menos trabajo para obtener la misma producción. Uzawa demostró además que es la condición necesaria y suficiente para un estado estacionario. Por eso es la hipótesis estándar de los modelos de tipo Solow, ya que es la única forma de progreso compatible con una senda de crecimiento equilibrado.

Solow (1960): es neutral si las participaciones no cambian con una relación trabajo-producto dada.

Síntesis: cada criterio de neutralidad corresponde a una forma de la función, según $A(t)$ multiplique a toda la función, al trabajo o al capital:

$$\begin{aligned} \text{Hicks: } x_t &= A(t) \cdot f(K_t, L_t) \\ \text{Harrod: } x_t &= f(K_t, A(t) \cdot L_t) \\ \text{Solow: } x_t &= f(A(t) \cdot K_t, L_t) \end{aligned}$$

Con una Cobb-Douglas, los tres tipos de progreso neutral son equivalentes.

Conclusiones: el progreso técnico es un determinante fundamental del crecimiento a largo plazo, y la clasificación distingue sus efectos distributivos: el ahorrador de trabajo puede generar desempleo tecnológico, mientras que el neutral de Harrod favorece un crecimiento equilibrado. Pero, como con una Cobb-Douglas las tres neutralidades coinciden, se limita la capacidad del modelo para captar los efectos asimétricos observados en la práctica.

En suma, a corto plazo la elasticidad-producto sitúa a la empresa en una etapa, y solo la II es racional; a largo plazo, la elasticidad de escala clasifica los rendimientos, y a muy largo plazo el progreso técnico desplaza la función y su sesgo altera el reparto de la renta.

3. Extensiones

Las leyes suponen un único *output* y producción sobre la frontera. Las extensiones relajan ambos supuestos: la producción de varios bienes con recursos dados, paso previo al equilibrio general, y la medición de la distancia de las empresas reales a la frontera.

3.1. Producción conjunta o multiproducto

Con un solo producto, bastaba situarse en el tramo decreciente de la isocuanta para la eficiencia técnica, pero con varios, ya no.

3.1.1. Planteamiento

Se producen dos bienes, x e y, con dos factores, mediante funciones f_x y f_y, sujetas a la dotación de la economía, $L_0 = L_x + L_y$ y $K_0 = K_x + K_y$. La eficiencia técnica exige que reasignar los factores no permita producir más de un bien sin producir menos del otro, es decir, igual RMST en ambas producciones:

$$\text{RMST}^x_{KL} = \text{RMST}^y_{KL}$$

Esta condición es la de eficiencia productiva del equilibrio general, donde un precio relativo de los factores común, w/r, garantiza la igualdad de forma descentralizada. En productividades, $\text{Pmg}^x_L/\text{Pmg}^x_K = \text{Pmg}^y_L/\text{Pmg}^y_K$, sin necesidad de precios. El caso equivale a una economía con dos productores, uno por bien, o a un único productor que obtiene los dos.

3.1.2. Caja de Edgeworth-Bowley

En la caja, de dimensiones iguales a las dotaciones, todo punto interior es una asignación de pleno empleo, aunque no necesariamente eficiente. Las isocuantas de cada empresa tienen mayor nivel cuanto más lejos de su origen, pendiente negativa y son convexas si la sustituibilidad es imperfecta.

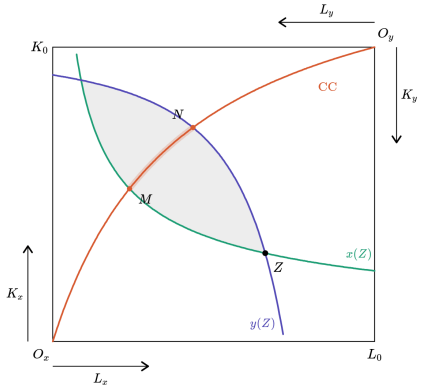
Superioridad de Pareto: desde una asignación, los puntos de la lente que forman las isocuantas que pasan por ella, el "área del excedente distribuible" de Allais (1943), son superiores en el sentido de Pareto. Lo son también las de su frontera, salvo sus dos vértices, la asignación de partida y el otro corte de ambas isocuantas.

Curva de contratos: las asignaciones en que ninguna empresa puede producir más sin que la otra produzca menos son eficientes en el sentido de Pareto, y su lugar geométrico nace de la tangencia de las isocuantas. No son comparables entre sí, porque pasar de una a otra aumenta un bien a costa del otro. En todos sus puntos se cumple $\text{RMST}^x_{KL} = \text{RMST}^y_{KL}$.

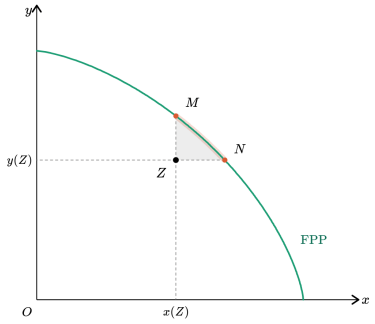
La curva no es necesariamente una isoclina e incluye los vértices de la caja. Su forma depende de la intensidad factorial: se curva por encima de la diagonal si x es más intensivo en capital, por debajo si lo es menos y es recta si la intensidad es idéntica. En los vértices, una empresa usa todos los factores y la otra, ninguno.

3.1.3. Curva de transformación

Definición: proyectando la curva de contratos sobre el plano de bienes se obtiene la **curva de transformación**, la máxima cantidad de x producible para cada cantidad de y, dadas la tecnología y las dotaciones. Todos sus puntos son óptimos de Pareto. Los exteriores no son alcanzables, y los interiores son ineficientes, por recursos ociosos o mal repartidos. Desde un punto interior cabría mantener el *output* de un bien y aumentar el del otro, y el progreso técnico podría poner a su alcance los exteriores.



(a) Caja de Edgeworth de la producción



(b) Frontera de posibilidades de producción

Caja de Edgeworth-Bowley de la producción y curva de transformación.

Pendiente: sin externalidades y con productividades marginales positivas, producir más de un bien exige producir menos del otro. La **relación marginal de transformación** mide ese coste de oportunidad; entre dos bienes i y j, $\mathrm{RMT}_{ji} = -dx_j/dx_i$, y con los bienes x e y:

$$\mathrm{RMT}_{yx} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{K_0,L_0} = \frac{\mathrm{Pmg}_L^y}{\mathrm{Pmg}_L^x} = \frac{\mathrm{Pmg}_K^y}{\mathrm{Pmg}_K^x}$$

Desde la teoría de costes, la RMT es el cociente de costes marginales, $\mathrm{Cmg}_x/\mathrm{Cmg}_y$: al producir más de x y menos de y, el Cmg_x sube y el Cmg_y baja, y la RMT aumenta a lo largo de la curva.

Forma: es cóncava, por tres razones.

- Rendimientos decrecientes a escala.
- Especialización de factores, más adecuados para un bien que para otro, con sustituibilidad imperfecta entre ellos.
- Distinta intensidad factorial de los bienes, incluso con rendimientos constantes. Con factores homogéneos y rendimientos constantes, basta que cada bien requiera proporciones de factores distintas.

Con tecnología convexa y preferencias estrictamente convexas, la tangencia con la curva de indiferencia más alta, $\mathrm{RMT}_{yx} = \mathrm{RMS}_{yx}$, es el equilibrio general de una economía de un solo agente, tipo Robinson Crusoe, o representada por una curva de indiferencia social.

3.1.4. Producción conjunta en sentido técnico

Si un mismo proceso da varios productos, como lana y carne, la tecnología es $F(x, y, \mathbf{z}) = 0$, no separable. Con factores dados, la empresa precio-aceptante maximiza $p_x x + p_y y$ sobre su curva de transformación y elige la mezcla donde $\mathrm{RMT}_{yx} = p_x/p_y$. Con proporciones fijas, $y = \kappa x$, solo elige la escala, y produce hasta que $p_x + \kappa\, p_y$ iguala el coste marginal del proceso (oferta conjunta de Marshall).

3.2. Fronteras de eficiencia

Idea: en la práctica, empresas con la misma tecnología obtienen *outputs* distintos con los mismos *inputs*. El análisis empírico mide la **eficiencia productiva**, la distancia de cada empresa a una frontera no observable, estimada a partir de la mejor práctica.

Farrell (1957): distingue dos componentes, cuyo producto es la eficiencia económica, $\mathrm{EE} = \mathrm{ET} \cdot \mathrm{EA}$, el cociente entre el coste mínimo y el observado.

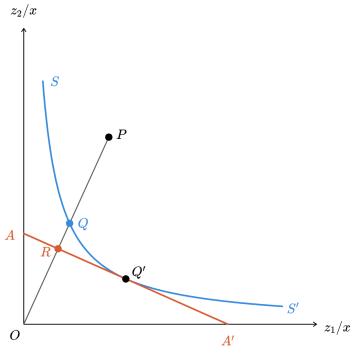
- *Eficiencia técnica*: la máxima reducción radial de los *inputs* compatible con el *output* observado, el menor $\theta \in (0, 1]$ tal que $\theta\mathbf{z} \in V(x)$. Vale uno sobre la isocuanta y no depende de las unidades. Puede orientarse también al *output*, y ambas orientaciones coinciden con rendimientos constantes. En símbolos:

$$\mathrm{ET} = \min\{\theta \in (0, 1] : \theta\mathbf{z} \in V(x)\}$$

- *Eficiencia asignativa*: si la mezcla de factores minimiza el coste a los precios vigentes. Vale uno en la tangencia de la isocuanta con la isocoste.

Desarrollo gráfico: con rendimientos constantes, la tecnología se resume en la isocuanta unitaria SS', en el plano $(z_1/x, z_2/x)$. El radio-vector de la empresa observada, OP, corta la isocuanta en Q y la isocoste AA', tangente en Q', en R:

$$\mathrm{ET} = \frac{OQ}{OP}, \qquad \mathrm{EA} = \frac{OR}{OQ}, \qquad \mathrm{EE} = \frac{OR}{OP} = \mathrm{ET} \cdot \mathrm{EA}$$



Medición de la eficiencia (Farrell, 1957).

Análisis envolvente de datos, DEA (Charnes, Cooper y Rhodes, 1978): método no paramétrico que toma como frontera la menor tecnología que contiene todas las observaciones y cumple libre disposición, convexidad y rendimientos constantes. Un programa lineal da la ET de cada empresa, la menor fracción θ de sus *inputs* con la que una combinación de empresas observadas obtiene al menos su *output*. Si se admiten rendimientos variables (Banker, Charnes y Cooper, 1984), el cociente entre ambas medidas aísla la eficiencia de escala. No exige forma funcional y admite varios *outputs*, pero es determinista, porque atribuye a ineficiencia cualquier desviación, y sensible a los atípicos.

Fronteras estocásticas, SFA (Aigner et al., 1977; Meeusen y van den Broeck, 1977): método paramétrico con un error compuesto de ruido simétrico, v_i, e ineficiencia, $u_i \geq 0$, estimado por máxima verosimilitud:

$$\ln x_i = \ln f(\mathbf{z}_i; \beta) + v_i - u_i$$

La eficiencia técnica de cada empresa, $\exp(-u_i)$, se infiere de la distribución de u_i condicionada al residuo. A diferencia del DEA, separa ruido e ineficiencia y permite la inferencia, a costa de imponer una forma funcional y una distribución a la ineficiencia. La función suele ser Cobb-Douglas o translog, y u_i sigue una distribución asimétrica, seminormal o exponencial.

Con datos de panel, el índice de Malmquist descompone la variación de la productividad en cambio de eficiencia y cambio técnico. Ambos métodos se aplican a hospitales, centros educativos y bancos, y a la competencia por comparación. La ineficiencia-X ofrece una explicación de la distancia a la frontera.