1. Fundamentos de la teoría de juegos

Conviene fijar primero los elementos de un juego, sus tipos, la noción de estrategia y los conceptos de solución.

1.1. Definición y elementos de un juego

Definición: un **juego** es la representación formal de una situación en la que varios individuos interactúan en un entorno de interdependencia estratégica. Su *solución* es una predicción de cómo jugarán.

Elementos: todo juego queda definido por cuatro categorías de elementos.

- Jugadores, $N = \{1, 2, \dots, n\}$: individuos, empresas o países, generalmente en número fijo.
- *Reglas*: el conjunto de acciones de cada jugador, A_i; la temporalidad; la información sobre el juego y sobre las acciones ya tomadas, y los compromisos vinculantes. El caso extremo de conflicto son los juegos de suma cero.
- *Resultados*: el desenlace del juego para cada combinación de acciones.
- *Pagos*: las preferencias sobre los resultados, representadas por utilidades cardinales. La función de pagos $u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$ asigna a cada perfil de estrategias un pago para el jugador i.

1.2. Tipos de juego y representaciones

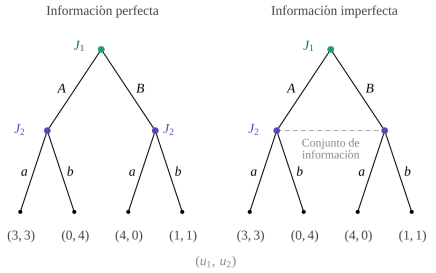
Según el tiempo: en los juegos **estáticos** los jugadores eligen simultáneamente, o sin observar las elecciones de los demás. En los **dinámicos** deciden secuencialmente, y al menos uno observa alguna acción previa de otro. Pueden ser **secuenciales**, jugados una vez por turnos, o **repetidos**, si un mismo juego estático, el juego de etapa, se juega varias veces, con horizonte finito o infinito.

Según la información: se distingue el conocimiento del juego en sí, completo o incompleto, y el de las acciones de los demás, perfecto o imperfecto.

- Con información completa, todos conocen jugadores, estrategias y pagos, y se supone *conocimiento común* (Aumann, 1976), es decir, cada jugador sabe que los otros lo saben, y así *ad infinitum*.
- Con información incompleta, algún jugador desconoce una característica relevante, típicamente los pagos o el "tipo" de algún rival, y se modeliza con la transformación de Harsanyi.
- Con información perfecta, cada jugador conoce al decidir todas las acciones previas, y con imperfecta, no.

Según los acuerdos: en los juegos **no cooperativos** la unidad de análisis es el jugador individual y no hay mecanismos externos que hagan exigibles los acuerdos. En los **cooperativos** la unidad es la coalición, los acuerdos son vinculantes y la pregunta es cómo repartir las ganancias de cooperar.

Representaciones: la **forma normal**, matricial o estratégica, es una matriz con las estrategias y los pagos de cada combinación, y es la natural en los juegos estáticos. La **forma extensiva** es un árbol con la secuencia de decisiones, la información en cada nodo y los pagos finales, y es la natural en los dinámicos, aunque todo juego en forma extensiva admite una forma normal. Los nodos que un jugador no puede distinguir forman un *conjunto de información*.



Forma extensiva: versión secuencial con información perfecta (izquierda) y simultánea con información imperfecta (derecha).

1.3. La estrategia

Acción y estrategia: una acción es cada alternativa disponible en un nodo de decisión. Una **estrategia** es un plan completo que indica qué acción tomar en cada conjunto de información del jugador, incluidos los nodos que ese mismo plan nunca alcanzará. Ambos conceptos coinciden en un juego estático con información completa, pero no en uno dinámico.

1.3.1. Estrategias puras

Definición: una **estrategia pura**, s_i^j, es un plan contingente completo que el jugador sigue con certeza. En un juego finito, el conjunto $S_i = \{s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^m\}$ es finito. Su tamaño crece rápido con la estructura del juego, y un jugador con k conjuntos de información y dos acciones en cada uno dispone de 2^k estrategias puras.

Un **perfil de estrategias** reúne una estrategia de cada jugador y se escribe $\mathbf{s} = (s_i, \mathbf{s}_{-i})$ para separar la del jugador i de las de todos los demás.

1.3.2. Estrategias mixtas

Definición: una **estrategia mixta** es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras del jugador:

$$\sigma_i = (p_1, p_2, \dots, p_m), \quad p_j \geq 0, \quad \sum_j p_j = 1$$

Toda estrategia pura es una mixta degenerada, y los pagos de un perfil mixto son pagos esperados, lo que presupone preferencias de von Neumann-Morgenstern.

Interpretación: aleatorización deliberada para no ser previsible, frecuencias en una población de jugadores o incertidumbre de los rivales, según Harsanyi.

1.3.3. Mejor respuesta y dominancia

Mejor respuesta: la estrategia s_i^* es una mejor respuesta a $\mathbf{s}_{-i}$ si ninguna otra da al jugador un pago mayor:

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i$$

La función de mejor respuesta, o de reacción, $s_i^* = R_i(\mathbf{s}_{-i})$, asigna a cada perfil de los rivales la respuesta óptima del jugador.

Dominancia: s_i está *estrictamente dominada* por s_i' si esta da más pago frente a todo $\mathbf{s}_{-i}$:

$$u_i(s_i', \mathbf{s}_{-i}) > u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall \mathbf{s}_{-i}$$

Está *débilmente dominada* si s_i' da al menos lo mismo siempre y más en algún caso, y una estrategia dominante domina a todas las demás. Un jugador racional nunca juega una estrategia estrictamente dominada, lo que, si la racionalidad es conocimiento común, justifica su eliminación iterativa, cuyo resultado no depende del orden de supresión. Eliminar las débilmente dominadas es menos seguro, porque el resultado sí puede depender del orden.

1.4. Soluciones a los juegos

1.4.1. Juegos no cooperativos

Los conceptos de solución responden a qué perfiles cabe esperar de jugadores racionales, pero difieren en lo que exigen y en el tipo de juego.

EED: si cada jugador dispone de una estrategia dominante, la juega con independencia de lo que espere de los demás, y ese perfil es el **equilibrio en estrategias dominantes**, la predicción más robusta, pero rara vez existe. La eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas amplía su alcance. Si tras repetirla sobrevive un único perfil, el juego es *resoluble por dominancia*.

EN: un **equilibrio de Nash** es un perfil en el que la estrategia de cada jugador es mejor respuesta a las de los demás:

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i, \ \forall i$$

Nadie gana desviándose unilateralmente, como en un acuerdo que se cumple solo. Exige más que el EED, porque cada jugador debe acertar al prever las estrategias rivales, pero se aplica a muchos más juegos, y todo EED es un EN.

- En estrategias puras puede no existir, como en el *matching pennies*, o no ser único, como en la batalla de los sexos.
- En estrategias mixtas, un jugador solo mezcla entre estrategias puras que le dan el mismo pago esperado, de modo que, en equilibrio, sus probabilidades dejan indiferentes a los rivales. El **teorema de Nash** (1950) garantiza que todo juego finito tiene al menos un EN en mixtas. La prueba aplica el teorema de punto fijo de Kakutani a la correspondencia de mejor respuesta.

ENPS: en un juego dinámico, el EN puede apoyarse en *amenazas no creíbles*, acciones previstas para nodos que no se alcanzan y que el jugador no ejecutaría si llegara a ellos. Selten (1965) las descarta exigiendo racionalidad también fuera de la senda. Un *subjuego* empieza en un nodo que forma por sí solo un conjunto de información y comprende todos sus sucesores sin partir ningún conjunto de información. Un **equilibrio de Nash perfecto en subjuegos** induce un EN en cada subjuego, se alcance o no. Con información perfecta se obtiene por *inducción hacia atrás*, desde los últimos nodos hasta el inicial. Cada nodo final se sustituye por el pago de la acción óptima y se retrocede. Todo ENPS es un EN, pero no a la inversa.

EBN: si algún jugador desconoce los pagos de los rivales, la **transformación de Harsanyi** (1967-1968) hace que la naturaleza elija primero el *tipo* de cada jugador según una distribución que es conocimiento común. Cada jugador observa solo su tipo. El **equilibrio de Bayes-Nash** es el EN de ese juego ampliado: cada tipo maximiza su pago esperado, dadas sus creencias. Una estrategia es así un plan que asigna una acción a cada tipo posible, y las creencias se refieren a los tipos de los rivales y a sus estrategias.

EBP: en los juegos dinámicos con información incompleta, las acciones revelan información sobre el tipo. El **equilibrio bayesiano perfecto**

une la racionalidad secuencial con creencias consistentes, obtenidas por la regla de Bayes siempre que sea posible. Fuera de la senda Bayes no impone nada, y esa libertad explica la multiplicidad de equilibrios. Las creencias son una distribución de probabilidad sobre los nodos de cada conjunto de información, y las estrategias han de ser óptimas en cada uno, dadas esas creencias. Refinamientos como el criterio intuitivo acotan la multiplicidad.

1.4.2. Juegos cooperativos

Planteamiento: la **función característica**, $V(S)$, asigna a cada coalición $S \subseteq N$ el valor que puede garantizarse por sí misma, y la pregunta es cómo repartir el de la gran coalición, $V(N)$, mediante un reparto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Núcleo (Gillies, 1959): un reparto es estable si ninguna coalición puede garantizar a sus miembros más de lo que reciben, porque, si no, lo *bloquearía*. El núcleo es el conjunto de repartos eficientes que ninguna coalición bloquea:

$$\mathcal{C}(V) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = V(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq V(S)\ \ \forall S \subseteq N \right\}$$

Puede contener infinitos repartos, si las demás coaliciones obtienen poco por sí solas, o ser vacío, si obtienen mucho. Las coaliciones de un solo jugador imponen la *racionalidad individual*, $x_i \geq V(\{i\})$. Un ejemplo de núcleo vacío es el de tres jugadores que se reparten una unidad cuando basta una mayoría de dos para quedársela, porque cada pareja debería recibir al menos la unidad y, sumando las tres condiciones, los pagos sumarían al menos 3/2.

Valor de Shapley (1953): busca un único reparto equitativo, caracterizado por cuatro axiomas: eficiencia, simetría, jugador nulo y aditividad. La única regla que los cumple asigna a cada jugador la media de sus contribuciones marginales:

$$\phi_i(V) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!}\,[V(S \cup \{i\}) - V(S)]$$

El peso es la probabilidad de que i encuentre formada exactamente la coalición S si los jugadores llegan en un orden aleatorio. Siempre existe y es único, pero puede quedar fuera del núcleo, porque la equidad no garantiza la estabilidad. Sí pertenece a él en los juegos convexos (Shapley, 1971). En ellos, la contribución marginal de cada jugador no disminuye cuando se amplía la coalición a la que se une.

En suma, los conceptos no cooperativos son cada vez más exigentes: el EN pide acertar con las estrategias rivales y existe en mixtas en todo juego finito, y el ENPS y el EBP añaden racionalidad fuera de la senda. En los cooperativos, el núcleo reparte por estabilidad y el valor de Shapley por equidad, y lo equitativo puede no ser estable.

2. Aplicaciones

Cada juego se presenta, en lo posible, con su planteamiento, su equilibrio y su bienestar.

2.1. Juegos estáticos con información completa

2.1.1. Dilema del prisionero

Planteamiento: dos sospechosos, interrogados por separado, pueden confesar (C) o no confesar (NC). Si ambos confiesan, reciben cinco años; si ninguno lo hace, un año, y si solo uno confiesa, queda libre y el otro recibe diez.

Equilibrio: confesar es estrictamente dominante, porque da más sea cual sea la elección del otro ($-5 > -10$ si confiesa y $0 > -1$ si no), de modo que (C, C) es el EED y el único EN.

Bienestar: el resultado es **Pareto-ineficiente**: (NC, NC), con pagos $(-1, -1)$, es mejor para ambos, pero no es sostenible, porque cada uno tiene incentivos a desviarse. Esta tensión entre racionalidad individual y eficiencia colectiva reaparece en la colusión, los bienes públicos o las guerras arancelarias. La cooperación exige compromisos vinculantes o repetición con castigos creíbles.

2.1.2. Batalla del mar de Bismarck (1943)

Planteamiento: es un juego histórico de suma cero. Un convoy japonés elige la ruta norte o sur de Nueva Bretaña y la aviación aliada, dónde concentrar su búsqueda. Los pagos son días de bombardeo.

Equilibrio: para Japón, el norte domina débilmente al sur, porque garantiza como máximo dos días de bombardeo frente a tres posibles. Eliminada la ruta sur, la mejor respuesta aliada es buscar en el norte, y (Norte, Norte) es el único EN en puras, que coincide con la solución *maximin* y con lo que hicieron ambos bandos.

Bienestar: en suma cero, cualquier perfil es óptimo de Pareto.

2.1.3. Cournot: EN único sin dominancia

Dos empresas eligen simultáneamente cantidades de un bien homogéneo. No hay estrategias dominantes, porque la cantidad óptima de cada una depende de la del rival, pero el EN, la intersección de las funciones de reacción, es único bajo los supuestos habituales. Se sitúa entre el monopolio y la competencia perfecta, y muestra que el EN es el concepto general de los juegos estáticos. La unicidad exige que las funciones de reacción tengan pendiente menor que uno en valor absoluto, como con demanda lineal y costes marginales constantes, con pendiente $-1/2$.

2.1.4. *Matching pennies*: sin EN en puras

Dos jugadores muestran a la vez una moneda: si coinciden, gana el 1, y si no, el 2. No hay EN en puras, porque en toda celda alguien gana desviándose. En mixtas, cada uno elige cara con $p = 1/2$, lo que deja al rival indiferente, con pago esperado nulo. Ilustra el teorema de Nash y por qué son necesarias las estrategias mixtas en los juegos de pura oposición.

2.1.5. Batalla de los sexos: equilibrios múltiples

Dos personas quieren pasar la tarde juntas, pero una prefiere el fútbol y la otra la ópera. Hay dos EN en puras, (Fútbol, Fútbol) y (Ópera, Ópera), óptimos de Pareto pero con distinto reparto, y uno en mixtas, con probabilidad 3/5 para la opción favorita, ineficiente porque a veces no se coordinan. La teoría no predice cuál se alcanzará, lo que motiva la selección por puntos focales de Schelling o por comunicación previa. En los juegos de coordinación, la historia y las instituciones importan tanto como los incentivos.

2.2. Juegos con incertidumbre

2.2.1. Información imperfecta

Idea: los jugadores no observan alguna acción de los rivales, propiedad distinta de la completitud, pues el dilema del prisionero tiene información completa pero imperfecta. Se representa con conjuntos de información y se resuelve con los mismos conceptos. En hundir la flota, cada jugador conoce el resultado de sus acciones, pero no la disposición de la flota rival, y el equilibrio se aproxima con reglas heurísticas.

2.2.2. Información incompleta: Bayes-Nash

Planteamiento: con dos estados de la naturaleza, crisis y no crisis, $\Omega = \{\omega_c, \omega_{nc}\}$, y una matriz de pagos distinta en cada uno, el jugador 1 observa el estado y el 2 solo conoce la probabilidad de crisis, P_c. En el EBN, el jugador 1 responde en cada estado con la matriz de ese estado, y el 2 elige la acción de mayor pago esperado. El equilibrio puede ser ineficiente *ex post* aunque sea óptimo *ex ante*. Sin información privada bastaría con hallar el EN de la matriz de pagos esperados, y la predicción es sensible a la distribución supuesta, que ha de ser conocimiento común.

2.2.3. Coches usados (Akerlof, 1970)

Planteamiento: con información asimétrica, los vendedores conocen la calidad de su coche, $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$, y los compradores solo su distribución, de modo que ofrecen un precio basado en la calidad esperada. Actualizan sus expectativas por la regla de Bayes a partir de la conducta de los vendedores, que deciden si vender según su información privada y el precio.

Equilibrio: si la proporción de coches buenos no es lo bastante alta, al precio medio se retiran los vendedores de alta calidad, lo que degrada la calidad esperada y el precio, en espiral. En el EBN resultante solo se intercambian los coches malos, los *lemons*.

Bienestar: el equilibrio no es óptimo de Pareto, porque quedan sin hacer intercambios beneficiosos. La información privada es un **fallo de mercado** por derecho propio.

2.2.4. Señalización (Spence, 1973; Cho y Kreps, 1987)

Idea: es un juego dinámico con información incompleta, resuelto con el EBP. El emisor informado elige una señal observable, y el receptor responde tras actualizar sus creencias.

Supuestos: un trabajador y varias empresas competitivas que pagan la productividad esperada. La productividad, $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$, es privada, y el tipo alto tiene probabilidad *a priori* μ_0. La educación, h, no altera la productividad, pero su coste, $c(h, \theta) = h/\theta$, es menor para el tipo productivo (*cruce único*).

Planteamiento: un EBP es una educación por tipo, unas creencias $\mu(h) = \Pr(\theta_H \mid h)$, obtenidas por Bayes en las educaciones de equilibrio, y un salario igual a la productividad esperada, tales que cada tipo resuelve:

$$\max_{h \geq 0}\ w(h) - c(h, \theta), \qquad w(h) = \mu(h)\,\theta_H + (1 - \mu(h))\,\theta_L$$

Equilibrio separador: el tipo bajo no se educa y cobra θ_L, y el alto elige h^* y cobra θ_H, siempre que ningún tipo prefiera imitar al otro:

$$\theta_H - \frac{h^*}{\theta_H} \geq \theta_L \qquad \text{y} \qquad \theta_L \geq \theta_H - \frac{h^*}{\theta_L}$$

Estas condiciones de compatibilidad de incentivos acotan la señal, $\theta_L(\theta_H - \theta_L) \leq h^* \leq \theta_H(\theta_H - \theta_L)$. Cualquier h^* del intervalo es un EBP separador con la creencia $\mu(h) = 1$ si $h \geq h^*$ y nula si no.

Equilibrio agrupador: ambos tipos eligen la misma h_p y cobran $\bar{w} = \mu_0\,\theta_H + (1 - \mu_0)\,\theta_L$, con creencias pesimistas fuera del equilibrio, $\mu(h) = 0$ para toda $h \neq h_p$. Basta con que el tipo bajo no prefiera desviarse a $h = 0$:

$$\bar{w} - \frac{h_p}{\theta_L} \geq \theta_L \implies h_p \leq \mu_0\,\theta_L(\theta_H - \theta_L)$$

Qué equilibrio surge depende del coste de la educación: separa porque es más cara para el tipo bajo, y la separación le cuesta al alto h^*/θ_H frente a una ganancia de $(1-\mu_0)(\theta_H-\theta_L)$.

Criterio intuitivo (Cho y Kreps, 1987): una desviación que no mejoraría al tipo bajo ni cobrando θ_H, pero sí al alto, debe atribuirse a este. Rompe todo agrupador y solo deja el separador de señal mínima, $h^*=\theta_L(\theta_H-\theta_L)$. La misma lógica explica el precio límite como señal de costes bajos (Milgrom y Roberts, 1982a) o la garantía como señal de calidad.

Conclusiones: una actividad improductiva puede ser valiosa como transmisora de información. Pero la libertad de creencias genera una multiplicidad que ningún refinamiento elimina del todo, y la educación es un coste puro.

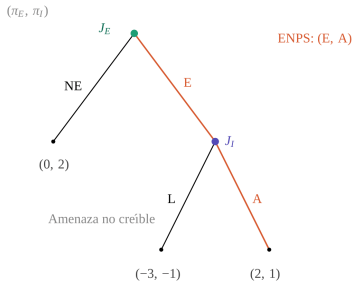
2.3. Juegos dinámicos

2.3.1. Juego de entrada

Planteamiento: una entrante decide entrar (E) o no (NE). Si entra, la incumbente lucha (L) o acomoda (A). Los pagos (entrante, incumbente) son $(0,2)$ sin entrada, $(-3,-1)$ con lucha y $(2,1)$ con acomodación.

EN y ENPS: hay dos EN en puras, (E, A) y (NE, L), pero el segundo descansa en una amenaza no creíble, porque ante una entrada real la incumbente acomodaría ($1>-1$). Por inducción hacia atrás, la entrante anticipa la acomodación y entra, de modo que el ENPS es (E, A), con pagos $(2,1)$. Para comprometerse a luchar, la incumbente puede hundir una inversión C_0, con π^M, π^D y π^L los beneficios de monopolio, duopolio y lucha. La entrada queda disuadida si la inversión hace creíble la lucha, esta causa pérdidas a la entrante y la inversión compensa:

$$\pi^L>\pi^D-C_0,\qquad \pi^L<0,\qquad \pi^M-C_0>\pi^D$$



Juego de entrada: la amenaza de lucha no es creíble y el ENPS es (E, A).

Conclusiones: la incumbente puede hacer creíble la lucha con costes hundidos, como inversiones irreversibles en capacidad, y el poder estratégico presente aumenta al reducir la propia libertad futura. La otra lección es la **ventaja de mover primero**, como la del líder de Stackelberg, aunque no es universal. En la competencia secuencial en precios con productos diferenciados, el seguidor obtiene más que el líder, porque fija un precio algo inferior.

2.3.2. Dilema del prisionero repetido finito

El juego de etapa se repite T veces, con T conocido. Cooperar (c) es no confesar y no cooperar (nc), confesar. Por inducción hacia atrás:

1. *Periodo T*: no hay futuro ni castigo creíble, luego no cooperar es dominante y se juega el EN de etapa.
2. *Periodo $T-1$ y anteriores*: como en T nadie cooperará, desviarse no tiene coste, y el argumento se extiende hasta el primero.

El único ENPS repite T veces el EN de etapa. Como su pago coincide con el *minimax*, ni siquiera otros EN sostienen la cooperación. Solo con varios EN de etapa cabe cooperar en las primeras rondas, usando la selección del equilibrio final como premio o castigo.

2.3.3. Repetición infinita: colusión tácita

Planteamiento: el juego se repite sin fin (o con probabilidad de continuar en cada periodo) y los jugadores descuentan con $\beta\in(0,1)$, el "superjuego" de Friedman (1971). La historia es $h^{t-1}=\{(s_1^\tau,s_2^\tau)\}_{\tau=1}^{t-1}$ y, con la *estrategia del gatillo*, $s_i^t(h^{t-1})=c$ si ambos han cooperado siempre y, ante una sola desviación, se vuelve para siempre al EN de etapa.

Condición de cooperación: cooperar debe valer al menos tanto como desviarse y sufrir el castigo. Con la serie geométrica:

$$\frac{\pi_{c,c}}{1-\beta}\geq\pi_{nc,c}+\frac{\beta}{1-\beta}\pi_{nc,nc}\implies\beta\geq\frac{\pi_{nc,c}-\pi_{c,c}}{\pi_{nc,c}-\pi_{nc,nc}}$$

El numerador es la ganancia inmediata de traicionar, y el denominador le suma la pérdida que el castigo inflige en cada periodo futuro. El castigo es creíble porque volver al EN de etapa es un equilibrio en cada subjuego. En el dilema del prisionero basta $\beta\geq1/5$, y en el duopolio de Bertrand, $\beta\geq1/2$ (A19).

Folk theorem: Friedman (1971) mostró que, con jugadores pacientes, puede sostenerse cualquier pago factible que mejore para todos el del EN de etapa, y Fudenberg y Maskin (1986) lo extendieron a todo pago factible superior al *minimax*, con una condición de dimensión si hay más de dos jugadores. La repetición resuelve la eficiencia a costa de la multiplicidad. Además del gatillo, caben el *tit-for-tat* (Axelrod, 1984), más indulgente, y el *castigo óptimo*, que castiga durante un número finito de periodos y vuelve después a cooperar. La aplicación central es la **colusión tácita**, cuya estabilidad depende del número de empresas, de la transparencia del mercado y del factor de descuento.

2.3.4. Reputación (Selten, 1978; Kreps y Wilson, 1982)

Paradoja de la cadena de tiendas: una cadena se enfrenta sucesivamente a K entrantes. La inducción hacia atrás dice que nunca debe luchar, pero la intuición dice que conviene luchar al principio para ganar reputación de dureza.

Extensiones: Kreps y Wilson (1982), y Milgrom y Roberts (1982b), introducen una probabilidad $\varepsilon>0$ de que la cadena sea un tipo duro que lucha siempre. En el EBP, acomodar revela el tipo racional, de modo que este imita al duro y soporta hoy el coste de luchar. Con los pagos del juego de entrada, un entrante solo entra si $\Pr(\text{luchar})<2/5$. Con K grande, una ε mínima sostiene la no entrada en casi todos los mercados. Explica la predación como inversión en reputación, pero la predicción depende del tipo duro que se postule. Muestra además la fragilidad de la inducción hacia atrás, porque una perturbación mínima de la información cambia por completo la predicción.

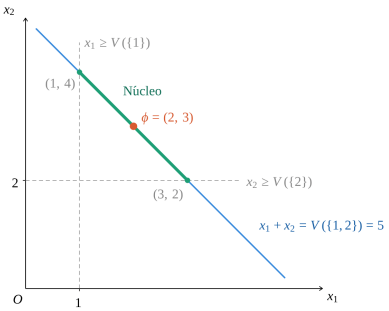
2.4. Juegos cooperativos y negociación

2.4.1. El núcleo: la *joint venture*

Dos empresas obtienen en solitario $V(\{1\})=1$ y $V(\{2\})=2$, y juntas, $V(\{1,2\})=5$. El núcleo son los repartos con $x_1+x_2=5$, $x_1\geq1$ y $x_2\geq2$, es decir, el segmento entre $(1,4)$ y $(3,2)$, estable pero no único.

2.4.2. Valor de Shapley y poder de voto

Promediando las contribuciones marginales en los dos órdenes de formación, el valor de Shapley da $\phi_1=2$ y $\phi_2=3$, un punto del núcleo.



Joint venture: el núcleo es el segmento de repartos eficientes no bloqueados; ϕ, el valor de Shapley.

Poder de voto: en los juegos de votación, el valor de Shapley da el **índice de Shapley-Shubik**, la proporción de ordenaciones en que cada partido es pivotal. El poder no es proporcional a los escaños. Con 45, 35 y 20 escaños y mayoría de 51, cualquier pareja es mayoría y cada partido tiene 1/3.

2.4.3. Negociación: Nash (1950) y Rubinstein (1982)

Solución de Nash: dos agentes se reparten un excedente y, sin acuerdo, obtienen su pago de desacuerdo, $d=(d_1,d_2)$. Nash exige invarianza a transformaciones afines, simetría, independencia de alternativas irrelevantes y eficiencia de Pareto, y la única solución que los cumple es:

$$\max_{(u_1,u_2)\in\mathcal{U}}(u_1-d_1)(u_2-d_2)\qquad\text{s.a.: } u_i\geq d_i,\ i=1,2$$

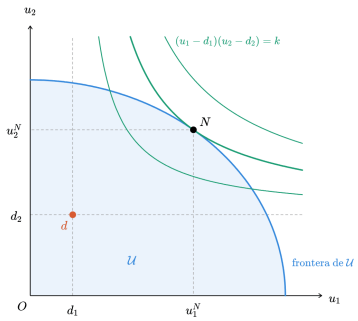
CPO: iguala la pendiente de la frontera de $\mathcal{U}$, en valor absoluto, a la ratio de ganancias netas. Al repartir un excedente Y con utilidades lineales, $u_1=x$ y $u_2=Y-x$, iguala las ganancias netas:

$$-\frac{du_2}{du_1}=\frac{u_2-d_2}{u_1-d_1}$$
$$x^*-d_1=Y-x^*-d_2\implies x^*=d_1+\tfrac{1}{2}(Y-d_1-d_2)$$

Cada parte recibe su alternativa exterior más la mitad del excedente sobre el desacuerdo, y obtiene más quien tiene mejor alternativa exterior.

Rubinstein: con ofertas alternas sin límite de periodos y factor de descuento β, el único ENPS tiene acuerdo inmediato y el proponente se queda $x^*=1/(1+\beta)$, porque ofrece al otro lo que este obtendría, descontado, si rechazase. Cuando $\beta\to1$ converge a la mitad, la solución de Nash simétrica. La ventaja del proponente nace de la impaciencia. El jugador 1 propone en los periodos pares y el 2 en los impares, y la oferta de equilibrio deja al otro indiferente, $1-x^*=\beta x^*$.

Conclusiones: la solución de Nash es la herramienta estándar del reparto bilateral que el mercado no fija, como la negociación salarial. Pero la independencia de alternativas irrelevantes es discutible (Kalai y Smorodinsky, 1975) y ambos modelos suponen información completa.



Solución de negociación de Nash.

En suma, los juegos estáticos recorren los casos del EN. Con incertidumbre, la información privada puede impedir intercambios beneficiosos, y en los dinámicos la disuasión y la cooperación se apoyan en compromisos irreversibles, en la repetición indefinida o en la reputación.

3. Teoría de las subastas

Las subastas aplican el equilibrio de Bayes-Nash a un problema de diseño.

3.1. Concepto (Vickrey, 1961; Myerson, 1981)

Teoría de subastas: iniciada por William Vickrey (1961, Nobel en 1996), analiza los mecanismos de venta con información asimétrica, en la que cada pujador conoce su valoración, pero no la de los demás. Myerson (1981) la extendió al diseño de la subasta óptima para el vendedor. Es la aplicación señera de los juegos con información incompleta.

3.2. Formatos básicos de subasta

Con un único objeto, se distinguen cuatro formatos básicos:

1. *Inglesa, ascendente*: el precio sube abiertamente hasta que queda un solo pujador, que paga el precio al que abandonó el último rival.
2. *Holandesa, descendente*: el precio baja desde un nivel alto hasta que un pujador lo acepta y paga ese precio.
3. *En sobre cerrado de primer precio*: con ofertas selladas, gana la más alta y paga su propia oferta.
4. En sobre cerrado de segundo precio, o de Vickrey: gana la oferta más alta, pero paga la segunda.

3.3. Pujas de equilibrio (Vickrey, 1961)

Idea: en la subasta de primer precio, pujar alto aumenta la probabilidad de ganar pero reduce lo que se gana, y la puja óptima rebaja la valoración (*bid shading*).

Supuestos: $n \geq 2$ pujadores neutrales al riesgo, con valoraciones privadas independientes, uniformes en $[0,1]$; un vendedor que valora el objeto en cero, y un equilibrio simétrico con pujas $b(v)$ crecientes.

Planteamiento: en la de primer precio, el pujador de valoración v maximiza la ganancia si vence por la probabilidad de que las $n-1$ valoraciones rivales queden por debajo:

$$\max_b \, (v-b)\cdot\left[b^{-1}(b)\right]^{n-1}$$

Equivale a elegir la valoración que aparenta, $\tilde{v}=b^{-1}(b)$:

$$\max_{\tilde{v}} \, (v-b(\tilde{v}))\cdot\tilde{v}^{n-1}$$

CPO: si en equilibrio no quiere aparentar una valoración distinta de la propia, el beneficio marginal de pujar un euro más, el aumento de la probabilidad de ganar por el excedente, iguala su coste marginal, la probabilidad de ganar:

$$\frac{(n-1)\,v^{n-2}}{b'(v)}\,[v-b(v)] = v^{n-1}$$

CSO: la derivada del objetivo respecto a $\tilde{v}$ tiene el signo de $v-\tilde{v}$, de modo que a quien aparenta menos de lo que valora le compensa subir la puja, y a quien aparenta más, bajarla. Por tanto, $\tilde{v}=v$ es el máximo global.

Solución: la CPO equivale a una ecuación diferencial que, integrada con $b(0)=0$, da la puja de equilibrio:

$$\frac{d}{dv}\left[v^{n-1}b(v)\right] = (n-1)\,v^{n-1} \implies b(v)=\frac{n-1}{n}\,v$$

En este equilibrio de Bayes-Nash simétrico, la puja es una fracción constante de la valoración, la mitad con dos pujadores, que tiende a la valoración cuando $n\to\infty$, porque la competencia elimina la rebaja.

Vickrey: pujar la propia valoración, $b(v)=v$, es **débilmente dominante**, porque pujar más solo añade victorias con pérdida y pujar menos solo hace perder victorias rentables. El ganador paga la segunda valoración, cuya esperanza es $\frac{n-1}{n}\,v$, lo mismo que puja en la de primer precio.

Conclusiones: la rebaja estratégica es una respuesta racional a la información privada, pero la solución cerrada depende de la simetría, la neutralidad al riesgo y la independencia.

3.4. Teorema de equivalencia de ingresos

Origen: Vickrey (1961) observó que, con valores privados independientes y uniformes, las subastas de primer y de segundo precio dan el mismo ingreso esperado, y Riley y Samuelson (1981) y Myerson (1981) lo generalizaron.

Teorema: con pujadores neutrales al riesgo y simétricos, valores privados independientes extraídos de la misma distribución continua y un formato en el que gane el de mayor valoración y el de valoración mínima obtenga excedente nulo, los cuatro formatos dan **el mismo ingreso esperado** al vendedor.

Razonamiento: en la de Vickrey y en la inglesa se puja la verdadera valoración. En la de primer precio y en la holandesa se rebaja, pero el ingreso esperado no cambia, porque depende de quién obtiene el objeto y no de las reglas de pago. Por el teorema de la envolvente, la utilidad de equilibrio del tipo v es $U(v)=\int_0^v P(x)\,dx$. Como la probabilidad de ganar, P, es la misma en todos los formatos, también lo son el pago esperado de cada tipo y el ingreso del vendedor, $\frac{n-1}{n+1}$ en el caso uniforme.

Extensiones: qué cambia al fallar los supuestos.

- *Precio de reserva (Myerson, 1981)*: el vendedor eleva su ingreso esperado fijando un $\underline{r}$ con $\underline{r}-\frac{1-F(\underline{r})}{f(\underline{r})}=0$, como un monopolista que iguala su coste nulo al valor virtual. En el caso uniforme $\underline{r}^*=1/2$, y con dos pujadores el ingreso pasa de $1/3$ a $5/12$. El valor virtual es el ingreso marginal de vender al tipo $\underline{r}$, descontada la renta informacional que cede a los tipos superiores, y $\underline{r}^*$ no depende de n.
- *Aversión al riesgo*: rompe la equivalencia a favor de la de primer precio y la holandesa, en las que los pujadores rebajan menos. Pujar algo más reduce el riesgo de quedarse sin el objeto, mientras que en la de Vickrey y en la inglesa pujar la valoración sigue siendo débilmente dominante y la recaudación no cambia.
- *Valores comunes*: surge la *maldición del ganador*, porque gana quien más ha sobrestimado el valor. Hay que pujar según el valor esperado condicionado a ganar, y más competidores no siempre elevan las pujas. La inglesa la mitiga, porque las retiradas revelan las señales.
- *Valores afiliados (Milgrom y Weber, 1982)*: la inglesa recauda al menos tanto como las de sobre cerrado, y la de segundo precio al menos tanto como la de primero, porque revelan más información.

Conclusiones: es la referencia de todos los formatos, pero sus supuestos rara vez se cumplen a la vez, y no contempla la colusión ni la venta de muchas unidades.

3.5. Aplicaciones

El Nobel de 2020 a Paul Milgrom y Robert Wilson premió nuevos formatos, de múltiples objetos y combinatorios. Cuando se venden muchas unidades la equivalencia falla: en la subasta de *precio uniforme* todos pagan el precio marginal, lo que invita a rebajar la puja de las últimas unidades, y en la *discriminatoria* cada uno paga su puja. Ninguna domina a la otra en general.

- *Deuda pública*: el Tesoro Público usa la subasta española u holandesa modificada, en la que las ofertas competitivas aceptadas pagan su precio si queda entre el mínimo aceptado y el medio ponderado, y el medio ponderado si lo igualan o superan (Orden ECM/2/2026). El Tesoro de EE. UU. aplica precio uniforme desde 1998.
- *Política monetaria*: el Eurosistema adjudicó sus operaciones principales de financiación a tipo variable y precios múltiples entre junio de 2000 y octubre de 2008. Desde entonces aplica tipo fijo con adjudicación plena, confirmado en 2024, y la subasta deja de ser un juego estratégico.
- *Derechos de emisión*: el RCDE UE subasta hasta el 57 % de sus derechos generales de 2021-2030 en la European Energy Exchange de Leipzig, en ronda única, sobre cerrado y precio uniforme.
- *Espectro*: Milgrom y Wilson diseñaron para la Comisión Federal de Comunicaciones de EE. UU. la subasta simultánea de rondas múltiples, que en julio de 1994 vendió diez licencias en 47 rondas por 617 M$. Vende a la vez todas las licencias, con pujas ascendentes en rondas sucesivas, para que cada operador ajuste sus pujas por licencias complementarias a la vista de los precios.
- *Contratación pública*: el riesgo es la colusión entre licitadores (*bid rigging*). En Long Island, el orden de las ofertas de cobertura del cártel no respondía a sus costes (Porter y Zona, 1993).