1. Fundamentos de la elección intertemporal

La elección intertemporal introduce el tiempo en la decisión del consumidor, con tres novedades: los bienes son consumos fechados, la dotación es una corriente de rentas y el precio relativo entre el consumo de hoy y el de mañana es $1+r$.

1.1. Conjunto de elección y preferencias

1.1.1. El conjunto de elección

Definición: los objetos de elección son **sendas de consumo**, $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_T) \in \mathbb{R}_+^{T+1}$, con c_t el consumo del periodo t. El tiempo convierte cada bien físico en tantas mercancías como periodos.

Propiedades: el conjunto tiene tres rasgos que la teoría estática no tiene.

- *Dimensión*: la fija el horizonte, finito en los modelos de ciclo vital e infinito en los de dinastías, que exigen condiciones adicionales.
- *Dotación*: es una corriente de rentas, $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_T)$, que solo se transforma en consumo de otros periodos mediante el ahorro y el endeudamiento.
- *Orden*: la senda $(1, 2)$ no es la $(2, 1)$, porque el tiempo se vive en una dirección.

1.1.2. La ordenación de las preferencias

Axiomas: la relación de preferencias cumple los axiomas estáticos, reinterpretados en el tiempo: completitud, transitividad, continuidad y monotonía, sin saciedad en ningún periodo. La **convexidad** es en el tiempo preferencia por la **suavización** y origen del ahorro por ese motivo.

Propiedades intertemporales: se añaden tres, que Koopmans (1960) axiomatizó y que llevan a la función de Samuelson.

- *Separabilidad*: la valoración del consumo de un periodo no depende del de los demás, lo que excluye hábitos y bienes duraderos.
- *Estacionariedad*: la ordenación entre dos sendas no cambia si ambas se desplazan un periodo, de modo que la utilidad de cada periodo es la misma y el descuento entre periodos consecutivos, constante.
- *Impaciencia*: el futuro se descuenta a una tasa positiva.

1.2. Utilidad y curvas de indiferencia

1.2.1. Función de utilidad (Samuelson, 1937)

Definición: los axiomas permiten representar las preferencias con la **función de utilidad descontada de Samuelson**, donde β es el factor de descuento, $\rho > 0$ la tasa de descuento subjetiva, que refleja la preferencia por el presente (mortalidad, impaciencia, sesgo de visibilidad), y $u(\cdot)$ la utilidad instantánea o función de "felicidad":

$$U_d = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t), \quad \beta = \frac{1}{1+\rho} \in (0,1)$$

Propiedades: es continua y dos veces diferenciable, creciente, $u' > 0$, y estrictamente cóncava, $u'' < 0$, de modo que las curvas de indiferencia son convexas.

- La representación aditiva exige que la utilidad instantánea sea **cardinal**, única salvo transformaciones afines positivas, como la de Bernoulli.
- Es **recursiva**: la utilidad de la senda es la de hoy más la descontada de la senda que empieza mañana, lo que permite resolver hacia atrás y garantiza la consistencia dinámica.

1.2.2. Curvas de indiferencia intertemporales

Pendiente: su valor absoluto es la **relación marginal de sustitución intertemporal**, el precio subjetivo del consumo presente en unidades de consumo futuro. Es mayor cuanto más escaso es el consumo presente y cuanto mayor es la impaciencia, y a lo largo de una senda constante vale $1+\rho$:

$$\mathrm{RMSI}_{t+1,t} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})}$$

Convexidad: la mide la **elasticidad de sustitución intertemporal** (ESI), la respuesta del consumo relativo entre dos periodos a su precio relativo:

$$\sigma = \frac{\partial \ln(c_{t+1}/c_t)}{\partial \ln(1+r)}$$

- Con σ alta, las curvas son poco curvadas y el ahorro responde mucho al tipo de interés. Con σ baja, el consumidor prefiere suavizar a aprovechar la recompensa.
- Con $\sigma \to 0$ las curvas son de ángulo recto. Con $\sigma \to \infty$ son rectas y el consumo se concentra en el periodo más barato.
- Con la utilidad isoelástica, $u(c) = c^{1-\theta}/(1-\theta)$, la ESI es $1/\theta$, el inverso de la aversión relativa al riesgo. La misma curvatura gobierna el riesgo y la sustitución en el tiempo.

1.3. Restricción intertemporal de recursos

1.3.1. Restricción intertemporal

Ecuación de estado: en cada periodo, el consumo más la acumulación de activos financieros, a_t, positivos si presta y negativos si se endeuda, no puede superar la renta más los intereses, con r el tipo de interés real constante:

$$c_t + (a_{t+1} - a_t) = y_t + r\, a_t$$

Condiciones de frontera: la inicial fija la riqueza de partida, a_0, y la terminal, con horizonte finito, exige $a_{T+1} = 0$: no se dejan activos sin consumir ni deudas sin pagar.

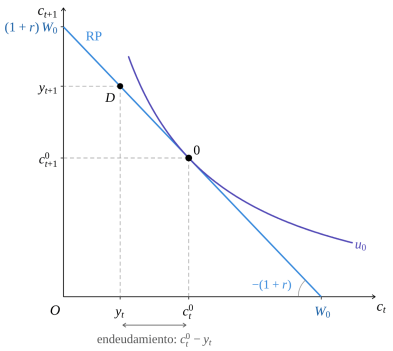
Restricción en valor presente: encadenando todos los periodos, el valor presente del consumo no puede superar la **riqueza**, W_0, suma de los activos iniciales y del valor presente de las rentas:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} \le (1+r)\, a_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t} \equiv W_0$$

Gráficamente, con dos periodos y $a_0 = 0$, la restricción es la recta de riqueza:

$$c_{t+1} = y_{t+1} + (1+r)\,(y_t - c_t)$$

que pasa por la dotación $D = (y_t, y_{t+1})$, tiene pendiente $-(1+r)$, el coste de oportunidad del consumo presente, y corta los ejes en W_0 y $(1+r)\,W_0$. A la izquierda de la dotación el consumidor ahorra y a la derecha se endeuda.

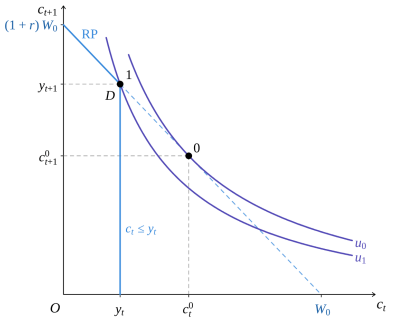


Restricción presupuestaria intertemporal: la recta pasa por la dotación y tiene pendiente $-(1+r)$.

1.3.2. Restricciones de liquidez

Definición: la restricción anterior supone que se puede prestar y endeudarse sin límite al mismo tipo r. Si el crédito falta o tiene un tope, las **restricciones de liquidez** dejan fuera del conjunto asequible el tramo de la recta a la derecha de la dotación.

Gráficamente, a la izquierda de D la frontera sigue siendo la recta de riqueza, porque se puede ahorrar al tipo r. En D se hace vertical, $c_t \le y_t$. La restricción solo es efectiva si el óptimo sin restricción, 0, queda a la derecha de la dotación. El consumidor se queda en ella, punto 1, sobre una curva más baja, con RMSI $> 1+r$.



Restricción de liquidez: la recta se quiebra en la dotación y el consumidor se queda en ella (punto 1).

1.4. Consumo intertemporal (Fisher, 1930)

Idea: Fisher trasladó al tiempo la teoría del consumidor. El consumo de cada periodo depende de la riqueza total, no de la renta corriente, y de la relación entre el tipo de interés y la impaciencia.

1.4.1. Modelo

Planteamiento: el consumidor elige la senda que maximiza su utilidad sujeta a que el valor presente del consumo iguale la riqueza:

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.a.:} \quad \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} = W_0, \qquad \beta \in (0,1)$$

CPO: la RMSI iguala la rentabilidad bruta del ahorro, $1+r$, lo que, escrito de otro modo, es la **ecuación de Euler**:

$$u'(c_t) = \beta\,(1+r)\,u'(c_{t+1}) = \frac{1+r}{1+\rho}\,u'(c_{t+1})$$

– En el óptimo, renunciar hoy a una unidad de consumo cuesta lo mismo que rinde ahorrarla y gastarla mañana, descontada la impaciencia. La concavidad de u hace la condición suficiente.
– La misma ecuación sale de la **ecuación de Bellman** (Bellman, 1957), $V_t(a_t) = \max_{c_t}\{u(c_t) + \beta V_{t+1}(a_{t+1})\}$, con su CPO y la condición de la envolvente. La programación dinámica resuelve el problema hacia atrás, periodo a periodo, y se extiende sin cambios a la incertidumbre.

Solución: la ecuación de Euler fija el **perfil** de la senda y la restricción, su **nivel**.

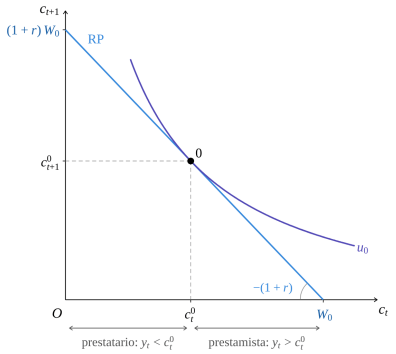
– Si $r = \rho$, el consumo es constante; si $r > \rho$, la senda es creciente y, con renta constante, el individuo ahorra; si $r < \rho$, es decreciente y demanda capital.
– El individuo desea sendas estables, la **suavización del consumo**, lo que exige $u'' < 0$ y mercados financieros.

Con $r = \rho$, el consumo es la **anualidad** que la riqueza puede financiar durante el horizonte, y no una fracción de la renta corriente:

$$c_t = \frac{r}{1+r-(1+r)^{-T}}\,W_0 \xrightarrow{T\to\infty} \frac{r}{1+r}\,W_0$$

– Esta expresión es la forma general de las teorías del consumo. La renta permanente (Friedman, 1957) llama así a esa anualidad, y el ciclo vital (Modigliani y Brumberg, 1954) usa la vida restante.

Desarrollo gráfico: el óptimo es la tangencia entre la curva de indiferencia más alta y la recta de riqueza, donde RMSI $= 1 + r$.



Elección intertemporal de Fisher: tangencia de la curva de indiferencia con la recta de pendiente $-(1+r)$.

Dotación: un aumento de renta desplaza la recta hacia fuera. Con $r = \rho$, un aumento permanente eleva el consumo de cada periodo en la misma cuantía, y uno transitorio se reparte entre todos los periodos y eleva poco el consumo corriente.

Tipo de interés: el efecto sobre el consumo presente se descompone con la ecuación de Slutsky con dotaciones:

$$\frac{\partial c_t}{\partial r} = \underbrace{\left.\frac{\partial c_t}{\partial r}\right|_{u_0}}_{\text{ES}<0} + \underbrace{(y_t - c_t)\frac{\partial c_t}{\partial y}}_{\text{ERT}}$$

– El **efecto sustitución** es inequívoco, porque una subida de r encarece el consumo presente y eleva el ahorro.
– El **efecto renta total** suma un efecto renta ordinario negativo y un efecto renta dotación positivo. Para un prestamista es positivo y el efecto total, ambiguo, mientras que para un prestatario ambos son negativos.

Desarrollo gráfico: una subida de r hace pivotar la recta sobre la dotación, más inclinada, lo que reduce las posibilidades de quien se endeuda y amplía las de quien presta. Para un prestamista, el efecto sustitución lleva de 0 a 0′ sobre la curva inicial y la recta compensada, y el efecto renta total, de 0′ a 1. Si domina el primero, el consumo presente cae.

La evidencia no es concluyente: la ESI estimada es baja y el ahorro agregado responde poco al tipo de interés.

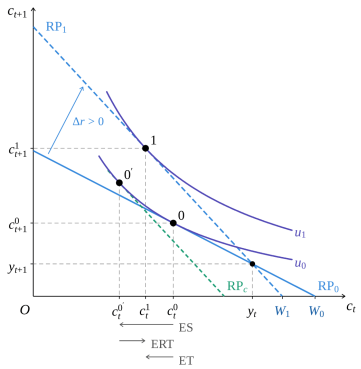
1.4.2. Paseo aleatorio (Hall, 1978)

Idea: con incertidumbre, expectativas racionales, utilidad cuadrática y $r = \rho = 0$, el consumo de hoy ya incorpora todo lo que se sabe sobre la renta futura, y solo la información nueva lo altera. La ecuación de Euler esperada da:

$$\mathbb{E}_t[c_{t+1}] = c_t \quad \Rightarrow \quad c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1}, \qquad \mathbb{E}_t[\varepsilon_{t+1}] = 0$$

– La variación del consumo es imprevisible con información pasada, y la política solo le afecta si genera sorpresas o altera la riqueza esperada.

Conclusiones: convierte la renta permanente en una restricción contrastable, la ecuación de Euler, punto de partida de la literatura empírica moderna. Pero la evidencia muestra exceso de sensibilidad a la renta corriente y exceso de suavidad.



Subida del tipo de interés para un prestamista: efecto sustitución ($0 \to 0'$) y efecto renta total ($0' \to 1$).

1.4.3. Restricciones de liquidez (Deaton, 1991)

Idea: con un límite de endeudamiento, $a_{t+1} \geq -\bar{a}$, si el límite opera la igualdad de Euler se rompe, $u'(c_t) > \beta\,(1+r)\,u'(c_{t+1})$. El consumidor querría adelantar consumo y no puede, de modo que consume todos sus recursos y su consumo sigue a la renta corriente. Si no opera pero puede hacerlo en el futuro, el consumidor prudente acumula un colchón de activos, el ahorro **buffer-stock**, y su propensión a consumir la renta transitoria es mayor que en Fisher.

Conclusiones: explican que el consumo siga a la renta, que la política fiscal transitoria tenga efectos reales y que la distribución de la riqueza importe para el multiplicador. Pero el problema solo se resuelve numéricamente.

1.4.4. Bienes duraderos (Mankiw, 1982)

Idea: un bien duradero da utilidad mientras dura, de modo que en la utilidad entra el flujo de servicios del *stock*, no el gasto. La CPO iguala la utilidad marginal de esos servicios al **coste de uso**, $p_d\,(r + \delta - \pi_d)$, de la misma forma que el del capital de la empresa. Se suaviza el *stock*, y el gasto, que es su variación, es mucho más volátil que el de no duraderos y responde con fuerza al tipo de interés y al crédito. Con utilidad cuadrática y expectativas racionales, el *stock* sigue un paseo aleatorio, y la primera diferencia del gasto, con $x_t = d_t - (1-\delta)\,d_{t-1}$, un proceso de medias móviles de orden uno:

$$\Delta x_t = \varepsilon_t - (1-\delta)\,\varepsilon_{t-1}$$

Conclusiones: explica la parte más volátil del consumo y unifica las teorías del consumo y de la inversión. Pero el gasto en duraderos se comporta como si la depreciación fuera casi total.

En suma, el modelo de Fisher es la base de las teorías modernas del consumo, aunque supone mercados de capitales perfectos y preferencias separables.

2. Decisiones intertemporales de la empresa

La decisión de inversión tiene la misma estructura que la de consumo, pero la empresa maximiza su valor, descontado al tipo de mercado, y su restricción es una tecnología que convierte la inversión de hoy en capital de mañana. El consumidor elige cuándo consumir una riqueza dada; la empresa, **cuánta riqueza crear**.

2.1. Conjunto de elección y objetivo

Tiempo: a diferencia del caso estático, el capital no se alquila cada periodo, sino que es un *stock* que se acumula, se deprecia y cuesta ajustar, de modo que la decisión de hoy condiciona las de mañana y la empresa ha de anticipar toda la senda futura de precios y productividades.

Variables: las de *control* son los flujos que decide cada periodo, la inversión I_t y el empleo L_t. La de *estado* es el capital K_t, que la empresa solo elige a través de la inversión acumulada.

Objetivo: la empresa maximiza su valor, el valor presente de sus beneficios futuros. Por el teorema de separación de Fisher, con mercados de capitales perfectos todos los propietarios lo quieren, porque maximiza su riqueza, y la tasa de descuento es el tipo de interés de mercado.

2.2. Función de valor y precio sombra

Función de valor: es la de Samuelson con el beneficio, neto del gasto en inversión, en lugar de la utilidad y $1/(1+r)$ en lugar de β:

$$V_0 = \sum_{t=0}^{T} \frac{\Pi_t}{(1+r)^t}$$

– Evaluada en la senda óptima, depende solo del capital heredado y de los precios, $V_t = V_t(K_t)$, y es cóncava en el capital con beneficios cóncavos y costes de ajuste convexos.
– Con mercados perfectos coincide con el valor de mercado de la empresa, que es observable.

Precio sombra del capital: el equivalente del valor marginal de la riqueza del consumidor es $q_t = \partial V_t/\partial K_t$, cuánto aumenta el valor de la empresa una unidad más de capital. Resume la información sobre el futuro que necesita la decisión de invertir. En Jorgenson es el precio del bien de capital y en Tobin la q marginal.

2.3. Restricción tecnológica

Ley de acumulación: es la ecuación de estado de la empresa, con δ la tasa de depreciación, y liga la decisión de hoy con el estado de mañana:

$$K_{t+1} = (1-\delta)\,K_t + I_t \qquad \text{o} \qquad \dot{K} = I - \delta K$$

- Los modelos difieren en la **reversibilidad** del capital y en la existencia de **costes de ajuste**, que separan a Jorgenson de la q de Tobin.
- Con horizonte infinito, la condición de transversalidad, $\lim_{t\to\infty} e^{-rt} q(t) K(t) = 0$, excluye acumular capital cuyo valor nunca se recupera.

2.4. Decisión de inversión

2.4.1. Modelo

Planteamiento: es un problema de **control óptimo**, resuelto con el principio del máximo de Pontryagin: maximizar $V_0 = \int_0^\infty e^{-rt}\,\Pi(K,I,L)\,dt$ sujeto a $\dot{K} = I - \delta K$, con el hamiltoniano en valor corriente:

$$H = \Pi(K,I,L) + q\,(I - \delta K)$$

CPO: la de control iguala el coste marginal de invertir al precio sombra q; la de estado, $\partial H/\partial K = rq - \dot{q}$, es la ecuación de Euler de la empresa, y la de transversalidad fija el nivel de la senda. Son suficientes con beneficios cóncavos y costes de ajuste convexos.

2.4.2. Consumidor-productor (Fisher, 1930; Hirshleifer, 1958)

Idea: Fisher extendió su análisis al caso en que la renta resulta de una decisión de producción. Un Robinson Crusoe, dueño de los factores y de la tecnología, decide cuánto consumir e invertir, con un capital inicial k_0 y una frontera de posibilidades de producción intertemporal cóncava, porque $f'' < 0$.

Sin mercado de capitales: la única forma de trasladar consumo al futuro es invertir, y la RMSI iguala la **relación marginal de transformación intertemporal**, el rendimiento bruto de invertir. Consumo e inversión quedan ligados:

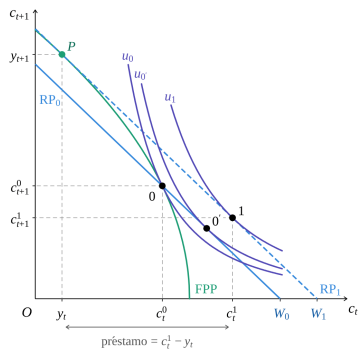
$$\text{RMSI}_{t+1,t} = 1 + f'(k_{t+1}) - \delta \equiv \text{RMTI}$$

Con mercado de capitales: las condiciones se separan. Se invierte hasta que el rendimiento neto del capital iguala el tipo de interés, con independencia de las preferencias, y el consumo se elige después como en el modelo de Fisher:

$$f'(k_{t+1}) - \delta = r \qquad \text{y} \qquad \text{RMSI}_{t+1,t} = 1 + r$$

- Según el **teorema de separación de Fisher**, la inversión, que maximiza la riqueza, es independiente del consumo, que la reparte en el tiempo, y de cómo se financie.

Desarrollo gráfico: la recta de riqueza es tangente a la frontera en el óptimo de producción P, donde RMTI $= 1 + r$, y a la curva u_1 en el óptimo de consumo 1. La distancia entre ambos se financia en el mercado. Frente a la autarquía, el mercado da una **ganancia de intercambio**, con la producción fija, y una **ganancia de producción**, al llevarla a P.



Separación de Fisher: la inversión maximiza el valor presente y el consumo se elige sobre la recta de riqueza.

Conclusiones: fundamenta la valoración de proyectos por su valor actual neto al tipo de mercado y que la empresa maximice su valor. Pero exige mercados de capitales perfectos, sin restricciones de crédito.

2.4.3. Sin costes de ajuste (Jorgenson, 1963)

Idea: la empresa quiere el capital cuya productividad marginal iguala su coste de uso, y la inversión es el ajuste hacia ese *stock*. Con horizonte infinito, tiempo continuo, tipo de interés real exógeno, oferta de bienes de capital perfectamente elástica y sin costes de ajuste, $q = P_K$, y las CPO se reducen a dos condiciones estáticas:

$$Pf'_L = w \qquad \text{y} \qquad Pf'_K = P_K\,(r+\delta) \equiv r_K$$

- El **coste de uso del capital** suma el precio de adquisición, el coste de oportunidad de los fondos y la depreciación. La inversión neta es positiva si el capital deseado supera al instalado. Si coinciden, la empresa solo repone lo que se deprecia, y si el deseado queda por debajo, desinvierte.

Extensiones: con inflación del capital, $r_K = P_K(r + \delta - \pi_K)$, y con imposición, $r_K = \chi_t P_K(r+\delta)$ (Hall y Jorgenson, 1967). La política monetaria actúa a través del tipo de interés real. La fiscal es favorable si usa deducciones, que reducen el coste de uso, y adversa si el gasto eleva el tipo de interés.

Conclusiones: es el modelo canónico de la inversión. Pero sin costes de ajuste el futuro no condiciona la decisión, la CPO es estática y, ante un cambio discreto de r, la inversión daría saltos que la producción agregada, limitada, no permite.

2.4.4. Costes de ajuste: q de Tobin (Tobin, 1969; Hayashi, 1982)

Idea: Tobin propuso como determinante de la inversión la ratio entre el valor de mercado del capital y su coste de reposición, y Hayashi le dio fundamento. Con costes de ajuste internos y convexos, $\varphi(I)$, con $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ y $\varphi'' > 0$, que afectan también a la desinversión, la empresa se acerca gradualmente al *stock* deseado. Hay un **ritmo óptimo de inversión**, y no un nivel óptimo de capital.

Planteamiento: la empresa elige la senda de inversión que maximiza su valor neto de los costes de ajuste, con k su capital y K el de la industria:

$$\max_{\{I\}} V = \int_0^\infty e^{-rt}[\Pi(K)k - I - \varphi(I)]\,dt \quad \text{s.a.:} \begin{cases} \dot{k} = I \\ k_0 \text{ dado} \end{cases}$$

CPO: el precio sombra es la **q marginal de Tobin**. Se invierte hasta que una unidad más de capital vale lo que cuesta adquirirla e instalarla, y, sin depreciación, el ingreso marginal del capital, $\Pi(K)$, iguala su coste de uso:

$$1 + \varphi'(I) = q, \qquad \Pi(K) = rq - \dot{q}$$

- Los costes de ajuste suavizan la inversión y dan una relación continua y decreciente con el tipo de interés, a diferencia de la discontinua de Jorgenson.
- La segunda es la ecuación de Euler de la empresa: el coste de uso es el rendimiento de invertir q al tipo de interés menos la ganancia de capital esperada.

Conclusiones: da a la inversión una dinámica propia y un vínculo con los mercados financieros, porque la q resume las expectativas de rentabilidad. Pero la q marginal no es observable y solo coincide con la media bajo competencia perfecta y rendimientos constantes, y la inversión responde al flujo de caja, sobre todo en las empresas con difícil acceso a la financiación externa.

En suma, la empresa comparte la estructura del consumidor, pero la separación de Fisher exige mercados financieros perfectos, la regla de Jorgenson carece de dinámica propia y la q marginal no es observable.

3. Horizonte infinito y generaciones solapadas

Los modelos intertemporales microfundamentan la macroeconomía, un interés que afianza la crítica de Lucas (1976), con un **agente representativo**: un agente cualquiera, si todos son idénticos; un agente medio, o un agente ficticio cuyo comportamiento coincide con el colectivo. Permiten comparar políticas en términos de bienestar, y los dos marcos difieren solo en la duración de la vida del agente.

3.1. Horizonte infinito (MHI)

Origen: Ramsey (1928) planteó el ahorro óptimo con horizonte infinito, y Cass y Koopmans (1965) lo convirtieron en el modelo de crecimiento óptimo, del que parten el ciclo real y los modelos DSGE.

Idea: el agente representativo vive indefinidamente, lo que se justifica por las **dinastías** (Barro, 1974), familias unidas por altruismo intergeneracional con herencias operativas, equivalentes a un único agente inmortal, o por la **muerte de Poisson** (Yaari, 1965; Blanchard, 1985), una vida finita de duración desconocida que eleva la tasa de descuento. En este caso hay recambio de individuos aunque la población sea constante.

3.1.1. Supuestos

Tiempo discreto e infinito, mercados financieros perfectos y un agente representativo con utilidad $\sum_{t=0}^\infty \beta^t u(c_t)$, rentas y_t y activos a_t. Las restricciones de cada periodo se encadenan en una única restricción intertemporal con la **condición de no-Ponzi**, que impide pagar indefinidamente la deuda con deuda nueva. Sin ella el consumo podría ser infinito:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{a_T}{(1+r)^T} \geq 0$$

3.1.2. Modelo

Planteamiento: es el problema de Fisher con infinitos periodos y la condición de no-Ponzi:

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t}{(1+r)^t} = a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{y_t}{(1+r)^t} \\ \lim_{T\to\infty} \frac{a_T}{(1+r)^T} \geq 0 \end{cases}, \qquad \beta \in (0,1)$$

CPO: la ecuación de Euler rige el perfil, como en Fisher, y la **condición de transversalidad** fija el nivel: el valor presente de los activos sin consumir debe ser nulo, y selecciona la única senda compatible con la restricción:

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T u'(c_T)\, a_T = 0$$

Solución: con $r = \rho$ la senda es constante, y el consumo es la anualidad de la riqueza, la renta permanente en su forma más pura:

$$c = \frac{r}{1+r}\left[a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{y_t}{(1+r)^t}\right]$$

Equilibrio: en una economía cerrada, la riqueza es el capital, $a_t = k_t$, y $r = f'(k) - \delta$. En el estado estacionario, $r = \rho$ y rige la **regla de oro modificada**, con un capital inferior al de la regla de oro, $f'(k_{\text{oro}}) = n+\delta$, si $\rho > n$ (A43, apartado 3.2):

$$f'(k^*) = \rho + \delta$$

Estática comparativa: con r dado, un aumento permanente de la renta eleva el consumo en toda su cuantía, y uno transitorio solo en su anualidad. Ante una subida del tipo de interés, cobra especial peso, dentro del efecto renta, un efecto riqueza negativo, porque reduce el valor presente de las rentas futuras.

Bienestar: como el agente internaliza el bienestar de todas las generaciones, el equilibrio competitivo es **Pareto-eficiente** y coincide con el del planificador, sin ineficiencia dinámica.

3.1.3. Conclusiones

Aspectos positivos: son casi estructurales y, por ello, en gran medida inmunes a la crítica de Lucas, y su eficiencia sirve de referencia. Se aplican a la oferta de trabajo, el consumo, la inversión, la demanda de dinero, el crecimiento y el ciclo.

Limitaciones: la vida infinita es un supuesto fuerte, desaparecen la heterogeneidad por edad y los conflictos entre generaciones, y suelen exigir métodos numéricos.

3.2. Generaciones solapadas (MGS)

Origen: Allais (1947) y Samuelson (1958) introdujeron la estructura, y Diamond (1965) la llevó a un modelo con capital.

Idea: cada agente vive un número finito de periodos y cada generación llega antes de que se extinga la anterior. En cada periodo conviven jóvenes, que ahorran, y ancianos, que desahorran, y esa **heterogeneidad por edad** es la razón de ser del marco.

3.2.1. Supuestos

La economía es infinita, la población crece a la tasa n y cada agente vive dos periodos. De joven trabaja, cobra w_t, consume y ahorra s_t, y de anciano consume su ahorro capitalizado, sin herencias ni altruismo.

3.2.2. Modelo

Empresas: con una función neoclásica de rendimientos constantes, $y = f(k)$, maximizan cada periodo su beneficio, $F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t K_t$, con salario y tipo de interés dados. Cada factor cobra su productividad marginal, sin depreciación, y el beneficio es nulo:

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t), \qquad r_{t+1} = f'(k_{t+1})$$

Hogares: el joven maximiza su utilidad de los dos periodos, y la ecuación de Euler de dos periodos da una función de ahorro $s_t = s(w_t, r_{t+1})$, creciente en el salario y de signo ambiguo respecto del tipo de interés. Con $c_{1t} = w_t - s_t$ y $c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})\, s_t$, la ecuación de Euler es:

$$u'(c_{1t}) = \frac{1 + r_{t+1}}{1+\rho}\, u'(c_{2t+1})$$

Equilibrio: como los ancianos consumen todo su capital, el capital del periodo siguiente es el ahorro de los jóvenes:

$$(1+n)\, k_{t+1} = s(w_t, r_{t+1})$$

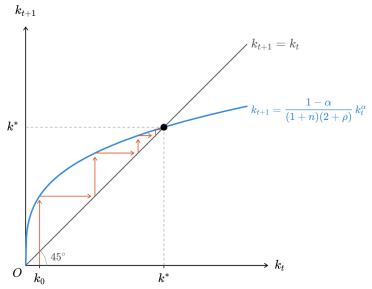
Solución: con utilidad logarítmica y Cobb-Douglas, $y = k^\alpha$, el joven ahorra la fracción $1/(2+\rho)$ de su salario. El capital sigue así una ecuación en diferencias que converge monótonamente, como en Solow pero con un ahorro determinado por las preferencias, al estado estacionario:

$$k_{t+1} = \frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\rho)}\, k_t^\alpha$$

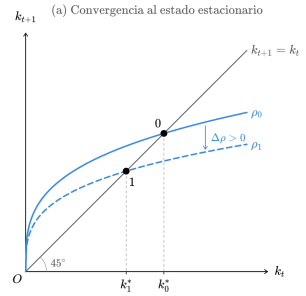
$$k^* = \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\rho)}\right]^{1/(1-\alpha)} \qquad r^* = f'(k^*)$$

Estática comparativa:

- *Impaciencia*: un aumento de ρ reduce la fracción ahorrada, $1/(2+\rho)$, y con ella k^*, y el tipo de interés de equilibrio, $r^* = f'(k^*)$, sube.
- *Población*: un aumento de n reparte el ahorro de cada generación entre más trabajadores, reduce k^* y eleva r^*.
- *Transferencias*: una transferencia de jóvenes a ancianos, con deuda o pensiones de reparto, reduce el ahorro y k^*, y solo mejora a todas las generaciones si la economía es dinámicamente ineficiente.



(a) Convergencia al estado estacionario



(b) Aumento de la tasa de descuento

Dinámica del capital en el modelo de Diamond.

Bienestar: nada garantiza que k^* esté por debajo de la regla de oro, porque cada generación ahorra para su propio ciclo vital. Hay **ineficiencia dinámica** (condición de Malinvaud-Cass) si:

$$r^* < n$$

- Con depreciación, la condición es $f'(k^*) - \delta < n$. La economía ha *sobreacumulado* capital: reducir permanentemente el ahorro elevaría el consumo de todas las generaciones. Se debe a las externalidades pecuniarias intergeneracionales y a la infinitud de agentes y bienes, y la deuda o las pensiones de reparto acercan el capital a la regla de oro.

3.2.3. Conclusiones

Aspectos positivos: son el instrumento para todo lo que depende de la edad, como el ciclo vital, las pensiones, la deuda pública o la demografía, y muestran que la eficiencia no es una propiedad general de las economías dinámicas, sino del supuesto de vida infinita.

Limitaciones: el equilibrio puede no existir o estar indeterminado, con burbujas como el dinero fiduciario; el ciclo vital se reduce a dos periodos, y las economías avanzadas no parecen dinámicamente ineficientes (Abel et al., 1989).

3.3. Comparación entre ambos marcos

Diferencias: ambos marcos comparten agentes optimizadores y microfundamentos. En los MHI el equilibrio es eficiente y se cumple la **equivalencia ricardiana**: una rebaja de impuestos de suma fija financiada con deuda no altera el consumo, porque se ahorra para pagar los impuestos futuros. En los MGS puede haber ineficiencia, y la equivalencia falla, porque quienes reciben la rebaja no son quienes la pagarán.

Juventud perpetua (Blanchard, 1985): tiende un puente entre ambos. Con probabilidad de muerte nula es un MHI, y con probabilidad positiva se comporta como un MGS, y la equivalencia falla tanto más cuanto mayor es esa probabilidad.

Elección: para el ciclo, el crecimiento y la política monetaria, donde la edad es secundaria, el MHI, cuya eficiencia sirve de referencia; para las pensiones, la deuda, la demografía y cualquier cuestión distributiva entre generaciones, el MGS.

En conjunto, la modelización dinámica sustituye las funciones *ad hoc* por decisiones explícitas y permite evaluar las políticas en bienestar. Pero el agente representativo esconde la heterogeneidad, que los modelos HANK reintroducen, y exige supuestos funcionales fuertes.