A43. Crecimiento económico (I). Acumulación de capital y progreso técnico exógeno. El modelo de Solow. El modelo de Solow aumentado con acumulación de capital humano. El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

1. Modelo de Harrod-Domar (1939, 1946)

Origen: Roy Harrod (1939) y Evsey Domar (1946) propusieron dos modelos de raíz keynesiana con las mismas implicaciones. Su valor es sobre todo conceptual, porque plantean el problema de la estabilidad del crecimiento al que responde Solow-Swan.

Idea: la inversión tiene una naturaleza dual: crea demanda vía multiplicador y capacidad vía acelerador. Solo una tasa de crecimiento, la garantizada, hace que ambas crezcan al mismo ritmo. Nada asegura que la economía se sitúe en ella, y si se desvía, se aleja. El crecimiento transita así al filo de la navaja.

1.1. Supuestos

Entorno: mundo keynesiano en tiempo discreto, con una economía cerrada, desarrollada y sin sector público, $Y = C + I$. Los precios relativos no ajustan las proporciones de factores ni el ahorro a la inversión, y la inversión depende de las expectativas de los empresarios.

Agentes: las familias ahorran una fracción constante y exógena de la renta, $S = sY$. Las empresas ajustan su capital al deseado según el acelerador, $K^* = vY$, donde v es la ratio capital-output fijada por la tecnología.

Tecnología: Leontief, sin sustituibilidad entre factores, sin depreciación ni progreso técnico, y con una fuerza de trabajo que crece a la tasa exógena n:

$$Y = \min(K/v, L/u)$$

1.2. Modelo

Planteamiento: no hay programa de optimización. El modelo compara tres tasas de crecimiento:

- *Tasa garantizada* (Harrod): de la igualdad entre ahorro e inversión, $sY_t = K_{t+1} - K_t = v(Y_{t+1} - Y_t)$, se obtiene la tasa que mantiene el equilibrio del mercado de bienes en cada periodo:

$$g_w = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \frac{s}{v}$$

  que aumenta con la propensión al ahorro y disminuye con la intensidad de capital de la tecnología.
- *Tasa natural*: es la máxima compatible con el pleno empleo, $g_n = n$ (con progreso técnico, $n + g_A$).
- *Tasa efectiva*: g_Y, la que resulta de las decisiones de inversión de los empresarios, guiadas por los *animal spirits*.
- *Condición de Domar*: el aumento de la inversión amplía la demanda vía multiplicador, $\Delta I/s$, y su nivel añade una capacidad I/v. Igualando ambos incrementos, la inversión ha de crecer a $\Delta I/I = s/v$, la tasa garantizada.

Dinámica: para Harrod el equilibrio $g_Y = g_w$ es inestable, y la economía discurre por el **filo de la navaja**. Identifica dos desviaciones:

- *Exceso de ahorro* ($g_Y < g_w$, $S > I$): la producción no encuentra comprador. Los empresarios rebajan sus ventas esperadas, el acelerador reduce el capital deseado, invierten menos y la demanda se contrae aún más, en una espiral implosiva. Así explicaban Harrod y Domar la década de 1930.
- *Exceso de inversión* ($g_Y > g_w$, $S < I$): el proceso opera al revés y el crecimiento se vuelve explosivo.

Largo plazo: nada garantiza que $g_w = g_n$, porque s, v y n son parámetros independientes. Si $g_w > g_n$, el capital crece más deprisa que el trabajo y aparece capacidad ociosa permanente; si $g_w < g_n$, desempleo creciente y permanente.

Extensiones: la inestabilidad justifica la intervención pública, con una política fiscal anticíclica. Si además s/v queda por debajo del crecimiento objetivo, g_Y^T, la brecha de ahorro (*savings gap*) entre s y $v\,g_Y^T$ solo se cierra con ahorro público o ayuda exterior.

Salidas al filo de la navaja: o una función de producción continua que permita ajustar v, la vía de Solow-Swan, o una tasa de ahorro endógena, la de la escuela de Cambridge (Kaldor, 1956; Pasinetti, 1962). En esta, el ahorro depende de la distribución de la renta y los precios mueven la participación de los beneficios hasta que $s/v = n$.

Aspectos positivos: con Harrod-Domar arranca la teoría moderna del crecimiento. Lleva el multiplicador-acelerador a un marco dinámico y plantea si el crecimiento equilibrado es estable.

Limitaciones: los coeficientes fijos generan una inestabilidad que la evidencia no muestra.

2. Modelo de Solow-Swan (1956)

Origen: Solow (1956) y, de forma independiente, Swan (1956).

Idea: sustituir la Leontief por una función neoclásica con sustituibilidad entre capital y trabajo. La ratio capital-output se ajusta y desaparece el filo de la navaja. Por los rendimientos decrecientes del capital, solo el progreso técnico sostiene el crecimiento per cápita a largo plazo.

2.1. Supuestos

Entorno: información y competencia perfectas, tiempo continuo, economía cerrada, desarrollada y sin sector público.

Agentes: las familias son agentes tipo Robinson Crusoe (productores, consumidores y propietarios de factores y tecnología) y ahorran e invierten una fracción constante y exógena de la renta, $S = I = sY$, sin que el ahorro se derive de ninguna decisión.

Tecnología: Cobb-Douglas neoclásica, con A Hicks-neutral y constante, α y $1-\alpha$ las participaciones de capital y trabajo, depreciación δ y población creciente a n:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1)$$

- *Rendimientos constantes a escala*: $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$.
- *Productividades marginales positivas y decrecientes*, con cruzadas positivas.
- *Condiciones de Inada*: $\lim_{K\to 0} f'_K = \infty$ y $\lim_{K\to\infty} f'_K = 0$.

2.2. Modelo sin progreso técnico

Planteamiento: sin optimización, porque el ahorro es exógeno. Sin sector exterior ni público, $Y = C + I$, y cada ecuación de comportamiento pasa de niveles a per cápita y a tasas de crecimiento:

$$\begin{aligned}
&\text{Renta:} && Y = AK^\alpha L^{1-\alpha} && \Rightarrow\ y = Ak^\alpha && \Rightarrow\ g_y = \alpha g_k, && A > 0,\ \alpha \in (\\
&\text{Inversión:} && \dot K = sY - \delta K && \Rightarrow\ \dot k = sAk^\alpha - (n+\delta)k && \Rightarrow\ g_k = sAk^{\alpha-1} - (n+\delta) \\
&\text{Consumo:} && C = (1-s)Y && \Rightarrow\ c = (1-s)Ak^\alpha && \Rightarrow\ g_c = g_y
\end{aligned}$$

Como la renta per cápita depende solo del capital per cápita, entender el capital es entender el crecimiento.

Ecuación fundamental: la variación del capital per cápita, $\dot k$, es la diferencia entre el ahorro bruto per cápita y la inversión de reposición, que mantiene k ante la depreciación y los nuevos trabajadores. Mientras el ahorro bruto supere la reposición, $\dot k > 0$, la economía acumula capital y crece.

Tasas de crecimiento: la renta crece a una tasa proporcional a la del capital y el consumo, al ritmo de la renta. La economía crece mientras el ahorro bruto por unidad de capital supere la tasa de reposición. La tasa depende positivamente de s y A, negativamente de n y δ, y ambiguamente de α, cuyo efecto es positivo solo si $k > 1$, porque $\partial g_k/\partial\alpha = sAk^{\alpha-1}\ln k$.

Equilibrio: cuando $\dot k = 0$, el ahorro iguala la reposición y no quedan recursos para aumentar k. Los niveles y las tasas de crecimiento de estado estacionario son:

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad y^* = A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \qquad c^* = (1-s)y^*$$

$$g_y^* = g_k^* = g_c^* = 0 \qquad g_Y^* = g_K^* = n$$

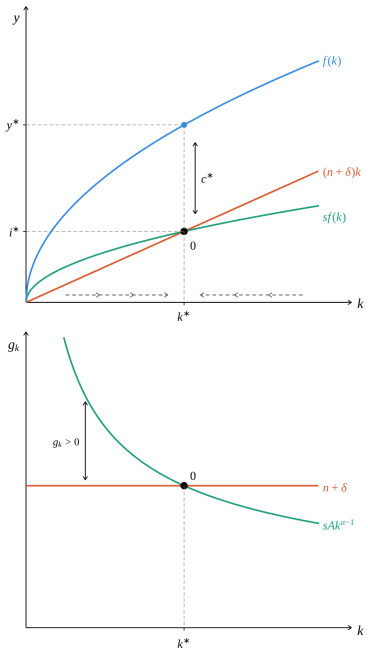
Sin progreso técnico, las variables per cápita no crecen y las agregadas crecen al ritmo de la población. Los precios de los factores, iguales a sus productividades marginales, son constantes, $w^* = (1-\alpha)Ak^{*\alpha}$ y $r^* = \alpha Ak^{*(\alpha-1)} - \delta$. El estado estacionario tiene cuatro propiedades:

- *Existencia*: por las dos condiciones de Inada, que hacen que ahorro y reposición se corten en un $k^* > 0$. La del origen hace que el ahorro supere a la reposición para k pequeño, y la del infinito, que quede por debajo para k grande.
- *Unicidad*: el ahorro por trabajador es cóncavo y la reposición, lineal.
- *Estabilidad*: la economía gravita hacia k^* desde cualquier punto, la diferencia fundamental con Harrod-Domar.
- *Ausencia de crecimiento endógeno*: por Inada en el infinito, la acumulación no sostiene por sí sola el crecimiento per cápita.

Desarrollo gráfico: en el plano k-y, el cruce de la curva de ahorro, $sf(k)$, con la recta de reposición, $(n+\delta)k$, determina k^* en el punto 0. A su izquierda k crece y a su derecha cae. En el panel inferior, g_k es la distancia entre $sAk^{\alpha-1}$ y $n+\delta$.

Estática comparativa: la alteración permanente de un parámetro tiene un **efecto nivel** permanente y un **efecto tasa** solo transitorio.

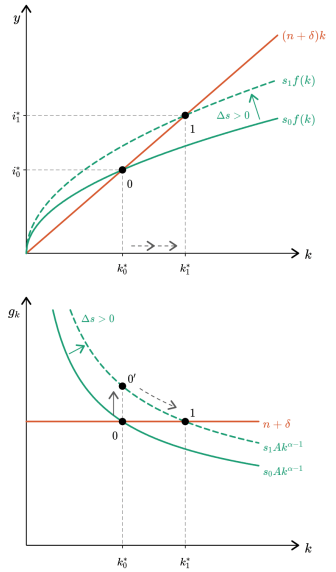
- *Aumento del ahorro*: el capital estacionario pasa de k_0^* a k_1^*. Durante la transición la economía crece más deprisa, y luego vuelve a la tasa inicial. El consumo cae a corto plazo, porque la inversión absorbe una fracción mayor de la producción, y solo sube a largo si se partía de un capital inferior al de la regla de oro. Ahorrar más, como se recomienda a menudo a los países pobres, eleva su nivel de renta, no su crecimiento a largo plazo.
- *Caída de n*: la recta de reposición pivota hacia abajo, porque hay que equipar a menos trabajadores nuevos, y k^* aumenta con el mismo patrón.
- *Mejora tecnológica*: un aumento de una vez de A desplaza la curva de ahorro con el mismo patrón. Solo un crecimiento continuo de A tiene efecto tasa permanente.



Modelo de Solow-Swan: el ahorro por trabajador iguala la inversión de reposición en k^*.

– *Destrucción de capital*: no altera ninguna curva. La economía vuelve a k^* creciendo transitoriamente más deprisa, como Alemania y Japón tras 1945.

Desarrollo gráfico: con un aumento del ahorro, en el panel superior la curva de ahorro pivota hacia arriba, de $s_0 f(k)$ a $s_1 f(k)$, y corta la recta de reposición en un capital mayor ($0 \to 1$). En el inferior, $s_0 A k^{\alpha-1}$ sube a $s_1 A k^{\alpha-1}$, de modo que en k_0^* la tasa g_k salta de cero a un valor positivo ($0 \to 0'$) y decrece hasta anularse en 1.



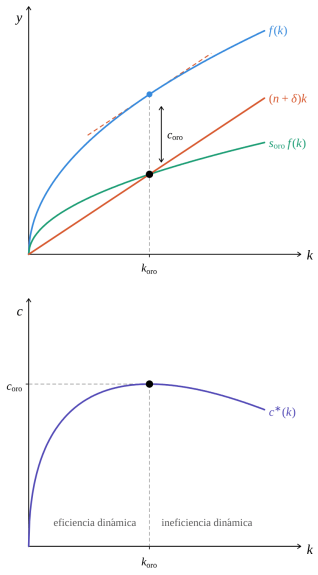
Aumento de la tasa de ahorro en Solow-Swan: k^* pasa de k_0^* a k_1^* ($0 \to 1$) y g_k salta en k_0^* ($0 \to 0'$) y se anula de nuevo en 1.

Regla de oro (Phelps, 1961): es la tasa de ahorro que maximiza el consumo de estado estacionario, $c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$:

$$f'(k_{\text{oro}}) = n + \delta \quad \Rightarrow \quad s_{\text{oro}} = \alpha$$

La tasa de ahorro oro coincide con la participación del capital: se ahorra toda la renta del capital y se consume toda la del trabajo, con $k_{\text{oro}} = (\alpha A/(n+\delta))^{1/(1-\alpha)}$. Gráficamente, el consumo estacionario es la distancia vertical entre $f(k)$ y la recta de reposición. Crece mientras $f'(k) > n+\delta$ y alcanza su cima en k_{oro}, donde ambas pendientes coinciden.

– *Exceso de ahorro* ($k^* > k_{\text{oro}}$, $r^* < n$): reducir s hasta s_{oro} produce un salto inmediato del consumo y una convergencia a c_{oro}, superior al consumo inicial en todos los periodos. La economía es **dinámicamente ineficiente**, porque acumula capital que no le sirve para consumir más. Esto podría corregirse penalizando fiscalmente el ahorro financiero privado.



Regla de oro: el consumo estacionario es máximo en k_{oro}.

– *Insuficiencia de ahorro* ($k^* < k_{\text{oro}}$): subir s exige un sacrificio a corto plazo, aunque el consumo aumenta a largo plazo. Ninguna trayectoria factible eleva el consumo en todos los periodos, de modo que la economía es dinámicamente eficiente, y ahorrar más depende de la impaciencia de los consumidores.

Con ahorro exógeno, nada garantiza que se ahorre s_{oro}.

Extensiones: tres corolarios.

– *Ineficiencia dinámica*: como $r^* = f'(k^*) - \delta$, el exceso de ahorro equivale a $r^* < n = g_Y^*$. Abel, Mankiw, Summers y Zeckhauser (1989) comparan la renta bruta del capital con la inversión bruta. En las economías avanzadas la primera supera a la segunda, lo que indica eficiencia dinámica, aunque los tipos inferiores al crecimiento tras 2008 reabrieron el debate.

– *Paradoja de Lucas* (1990): con la Cobb-Douglas, si un país tiene diez veces la renta per cápita de otro y $\alpha = 1/3$, su capital per cápita es mil veces mayor y su rendimiento cien veces menor. El capital debería fluir masivamente a los pobres, y no lo hace. Sin riesgos ni fricciones, la explicación exige que las diferencias de renta se deban a la tecnología o al capital humano, o que la elasticidad de sustitución supere la unidad.

– *Elasticidad de sustitución*: la Cobb-Douglas impone $\sigma = 1$. Con una CES y $\sigma > 1$, se incumple Inada en el infinito y el crecimiento per cápita puede sostenerse sin progreso técnico. Con $\sigma < 1$, el estado estacionario puede no existir con ahorro bajo. Además, con $\sigma \neq 1$ las participaciones factoriales dejan de ser constantes.

2.3. Modelo con progreso técnico

Planteamiento: para un crecimiento sostenido, se añade un **progreso técnico exógeno** a la tasa g_A que, como el maná, no consume recursos. Puede ser neutral en el sentido de Hicks, $AF(K,L)$; aumentador del trabajo o neutral en el sentido de Harrod, $F(K,AL)$, o aumentador del capital o neutral en el sentido de Solow, $F(AK,L)$.

Teorema de Uzawa (1961): solo el progreso aumentador del trabajo es compatible con un crecimiento equilibrado, con tasas y participaciones factoriales constantes. Cualquier otra forma haría variar la relación capital-producto sin límite, aunque con la Cobb-Douglas las tres son indistinguibles. Por unidad de trabajo efectivo, $\tilde{x} = X/(AL)$:

$$\text{Renta:} \quad Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha} \;\Rightarrow\; \tilde{y} = \tilde{k}^\alpha \qquad \Rightarrow\; g_{\tilde{y}} = \alpha g_{\tilde{k}}, \qquad \alpha \in (0,1$$

$$\text{Inversión:} \; \dot{K} = sY - \delta K \quad \Rightarrow\; \dot{\tilde{k}} = s\tilde{k}^\alpha - (g_A + n + \delta)\tilde{k}$$

Ahora hay que equipar también a las nuevas unidades de eficiencia, y $g_y = g_A + g_{\tilde{y}}$.

Equilibrio: en el estado estacionario, el capital y la renta por unidad de trabajo efectivo son constantes:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{g_A + n + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad \tilde{y}^* = \tilde{k}^{*\alpha}$$

$$g_{\tilde{y}}^* = g_{\tilde{k}}^* = g_{\tilde{c}}^* = g_A \qquad g_Y^* = g_K^* = g_A + n$$

Las variables per cápita crecen a la tasa del progreso técnico y las agregadas, a esa tasa más la población.

El crecimiento equilibrado reproduce los hechos estilizados de Kaldor: relación capital-producto, tipo de interés y participaciones constantes, y salario real creciente a g_A.

Estática comparativa: g_A es el único parámetro con efecto tasa permanente. La acumulación explica la transición, no el estado estacionario. Esa conclusión es el mayor logro del modelo, coherente con el residuo de la contabilidad del crecimiento, y su mayor limitación, porque deja sin explicar la variable que lo explica todo.

2.4. Dinámica de transición y convergencia

Velocidad de convergencia: log-linealizando la ecuación fundamental, cada año se cierra una fracción constante λ de la distancia al estado estacionario, y la mitad se recorre en $t_{1/2} = \ln 2/\lambda$:

$$\lambda = (1-\alpha)(g_A + n + \delta)$$

que procede de $\dot{\ln \tilde{k}} \approx -\lambda(\ln \tilde{k} - \ln \tilde{k}^*)$, con solución:

$$\ln \tilde{k}(t) - \ln \tilde{k}^* = e^{-\lambda t}\left(\ln \tilde{k}(0) - \ln \tilde{k}^*\right)$$

Es mayor cuanto menor es α, porque los rendimientos decrecientes son más intensos. Con $\alpha \approx 1/3$ y $g_A + n + \delta \approx 0{,}06$, $\lambda \approx 4$ % ($t_{1/2} \approx 17$ años), el doble de la observada, en torno al 2 %.

Convergencia entre países: tres formulaciones.

- *β-convergencia absoluta*: los pobres crecen más que los ricos. Se estima con $g_y = \beta_0 - \beta \ln y_0 + \varepsilon$, existe si $\beta > 0$ y exige el mismo estado estacionario. La evidencia de 1960-1990 no la apoya en muestras grandes de países, aunque sí la de las últimas décadas, y eso al principio se leyó como evidencia contraria al modelo neoclásico. Sí se observa entre regiones de un mismo país, a tasas de alrededor del 2 %, como entre los estados de EE. UU. (Barro y Sala-i-Martin, 1991), con resultados similares para las regiones europeas y las prefecturas japonesas.
- *β-convergencia condicional*: controlando por las diferencias en parámetros, $g_y = \beta_0 - \beta \ln y_0 + \gamma z + \varepsilon$, sí aparece una correlación parcial negativa. Basta con que un parámetro no coincida para que cada país se dirija a su propio estado estacionario y deje de estar asegurado que los pobres crezcan más. Barro y Sala-i-Martin (1992a) obtienen en 98 países una tasa de alrededor del 2 % ($t_{1/2} \approx 35$ años).
- *σ-convergencia*: la dispersión de la renta per cápita disminuye. La β-convergencia absoluta es condición necesaria, pero no suficiente.

2.5. Extensiones

2.5.1. Modelo de Solow aumentado con capital humano (Mankiw, Romer y Weil, 1992)

Idea: Mankiw, Romer y Weil (MRW) atribuyen los fallos cuantitativos del modelo a una participación del capital de un tercio. Si el capital incluye el humano, se acerca a dos tercios, los rendimientos decrecientes se suavizan y se corrigen la convergencia demasiado rápida y los diferenciales de renta demasiado pequeños.

Supuestos: el capital humano, H, entra como tercer factor. Se ahorran fracciones exógenas de la renta en cada capital, s_k y s_h, ambos se deprecian a δ, y $\alpha + \beta < 1$, de modo que se mantiene Inada y no hay crecimiento endógeno:

$$Y = K^\alpha H^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1$$

Equilibrio: con $Y = C + I_K + I_H$, dos leyes de acumulación, $\dot{\tilde{k}} = s_k \tilde{y} - (g_A + n + \delta)\tilde{k}$ y $\dot{\tilde{h}} = s_h \tilde{y} - (g_A + n + \delta)\tilde{h}$, cuyos *loci* se cortan en un estado estacionario estable. Los niveles y las tasas de estado estacionario son:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s_k^{1-\beta} s_h^{\beta}}{g_A + n + \delta}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)} \qquad \tilde{h}^* = \left(\frac{s_k^{\alpha} s_h^{1-\alpha}}{g_A + n + \delta}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}$$

$$g_{\tilde{y}}^* = 0 \qquad g_y^* = g_A$$

Las tasas de crecimiento son, pues, las del modelo canónico.

Renta estacionaria: en logaritmos, depende de las dos tasas de inversión y de la tasa de reposición:

$$\ln y^* = \ln A_0 + g_A t + \frac{\alpha \ln s_k + \beta \ln s_h - (\alpha+\beta)\ln(g_A + n + \delta)}{1 - \alpha - \beta}$$

Estática comparativa: efecto nivel, no tasa. Las elasticidades de y^* respecto a s_k y s_h son $\alpha/(1-\alpha-\beta)$ y $\beta/(1-\alpha-\beta)$. La primera es mayor que en el canónico, $\alpha/(1-\alpha)$, porque más ahorro eleva la renta y, con ella, el capital humano. La de $g_A + n + \delta$, $-(\alpha+\beta)/(1-\alpha-\beta)$, es mayor en valor absoluto.

Dinámica: log-linealizando, el crecimiento entre dos fechas depende de la renta inicial y de los determinantes del estado estacionario, que es la regresión de convergencia condicional que estima la literatura. La velocidad cae con la participación conjunta de ambos capitales:

$$\lambda = (1-\alpha-\beta)(g_A + n + \delta)$$

con la que la renta se aproxima a su estado estacionario según:

$$\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}_0 = (1 - e^{-\lambda t})\,[\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_0]$$

Aspectos positivos: MRW obtienen $\alpha \approx \beta \approx 1/3$. La velocidad cae del 4 % al 2 %, el R^2 pasa de unos 0,6 a unos 0,8 y los diferenciales predichos se acercan a los observados.

Limitaciones: aproximan s_h con la tasa de escolarización secundaria, multiplicada por la proporción de la población en edad de trabajar que está en edad escolar, una medida criticada por imprecisa, que no captura la calidad de la educación, la experiencia ni el aprendizaje en el puesto.

2.5.2. Otras extensiones

Economía abierta (Barro et al., 1995): con movilidad perfecta del capital la convergencia sería instantánea, lo que la evidencia desmiente. Si solo el capital físico se financia fuera y el humano se acumula con ahorro interno, la velocidad es mayor que en la economía cerrada, pero finita y próxima al 2 %.

Tierra y recursos naturales: con tierra fija, recursos agotables a la tasa b y g_A el crecimiento de la PTF, $g_y^* = [g_A - (\gamma+\eta)n - \eta b]/(1-\alpha)$. El crecimiento per cápita solo es positivo si el progreso técnico compensa el freno de la tierra y los recursos. Así responde el enfoque neoclásico a la predicción maltusiana y al *Informe Meadows* (1972).

2.6. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo es la referencia de toda la literatura posterior. Con sustitución entre factores el estado estacionario es estable, y solo el avance tecnológico sostiene el crecimiento de la renta por habitante.

Limitaciones: el progreso técnico es exógeno, y el propio Solow (1957) atribuyó al residuo el 87,5 % del crecimiento de la producción por hora en EE. UU. entre 1909 y 1949. Además, con $\alpha \approx 1/3$ la velocidad de convergencia y los diferenciales de renta son irrealistas, el modelo es unisectorial, el ahorro es exógeno y predice diferenciales de rentabilidad muy superiores a los observados.

3. Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (1928, 1965)

Origen: Ramsey (1928) planteó el problema del ahorro óptimo. Cass (1965) y Koopmans (1965) lo formalizaron como modelo de crecimiento con optimización intertemporal.

Idea: endogenizar la tasa de ahorro a partir de la decisión intertemporal de las familias. El ahorro óptimo puede crecer, decrecer o ser constante en la transición, pero las conclusiones cualitativas de Solow se mantienen.

3.1. Supuestos

Entorno: los supuestos neoclásicos de Solow, con horizonte infinito. La diferencia está en las familias, que deciden en cada momento cuánto ahorrar.

Agentes:

- *Familias*: hogares idénticos, cuyo tamaño crece a la tasa n, $L(t) = e^{nt}$. Operan bajo altruismo intergeneracional puro, como dinastías, lo que justifica el horizonte infinito. También puede interpretarse como el de agentes con una probabilidad de muerte constante, de tipo Poisson. Poseen activos a que rinden r y alquilan su trabajo al salario w.
- *Preferencias*: utilidad CRRA, con $\theta > 0$ el coeficiente de aversión relativa al riesgo y $1/\theta$ la **elasticidad de sustitución intertemporal**. Con $\theta = 1$ la utilidad es logarítmica. Con θ bajo, los hogares toleran más variabilidad del consumo, y con θ alto desean alisarlo fuertemente. La tasa de descuento cumple $\rho > n > 0$, lo que garantiza que la utilidad no diverge:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \qquad \theta > 0$$

- *Empresas*: alquilan el capital a su coste de uso, $r + \delta$, y contratan trabajo al salario w.

Tecnología: la Cobb-Douglas de Solow-Swan.

3.2. Modelo

Hogares: maximizan la utilidad descontada sujetos a la restricción dinámica, a sus activos iniciales y a la condición de no-Ponzi:

$$\max_{\{c\}} \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\, u(c)\, dt \quad \text{s.a.:} \begin{cases} c + \dot{a} = w + (r-n)a \\ a_0 \text{ dado} \\ \lim_{t\to\infty} \lambda(t)\, a(t) \geq 0 \end{cases}$$

El factor $e^{-(\rho-n)t}$ descuenta a la tasa ρ y pondera por el tamaño del hogar, y la condición de no-Ponzi, escrita con el multiplicador ($\lambda(t) = \lambda(0)\, e^{-[R(t)-nt]}$, con $R(t) \equiv \int_0^t r\, dv$), impide acabar endeudado en el límite. En el hamiltoniano en valor presente u origen, $\mathcal{H} = e^{-(\rho-n)t}u(c) + \lambda[(r-n)a + w - c]$, el multiplicador dinámico λ es el precio sombra de los activos (lo que vale en $t = 0$ una unidad más de ellos).

Por el principio del máximo, las CPO son $e^{-(\rho-n)t}c^{-\theta}=\lambda$, $(r-n)\lambda=-\dot\lambda$ y la transversalidad, $\lim_{t\to\infty}\lambda(t)\,a(t)=0$. Como el hamiltoniano es estrictamente cóncavo en c y lineal en a, son necesarias y suficientes. Tomando logaritmos en la primera, derivando respecto al tiempo y sustituyendo la segunda se obtiene la **ecuación de Keynes-Ramsey**:

$$g_c=\frac{1}{\theta}(r-\rho)$$

El consumo crece cuando la rentabilidad del ahorro supera a la impaciencia, $r>\rho$, porque los agentes ahorran hoy para consumir más mañana, y decrece en caso contrario. En ambos casos, el cambio es más pronunciado cuanto mayor es la elasticidad de sustitución intertemporal, lo que implica también una senda de consumo más volátil ante *shocks*.

Empresas: maximizan su beneficio, $AK^{\alpha}L^{1-\alpha}-(r+\delta)K-wL$, con precios dados, y pagan a cada factor su productividad marginal, $r=f'(k)-\delta$ y $w=f(k)-kf'(k)$. Con rendimientos constantes, el beneficio es nulo.

Equilibrio: en una economía cerrada sin sector público el único activo es el capital, de modo que $a=k$. El capital se acumula según la restricción de recursos, $c+\dot k+(n+\delta)k=f(k)$, donde, a diferencia de Solow, c no es una fracción fija de $f(k)$, sino una variable de control. Imponiendo $\dot c=0$, el tipo de interés iguala la tasa de descuento, $r=\rho$, y rige la **regla de oro modificada**. Como en el estado estacionario el ahorro repone exactamente el capital, $s^*=(n+\delta)k^*/f(k^*)$, con la Cobb-Douglas los niveles y las tasas son:

$$f'(k^*)=\rho+\delta\quad\Rightarrow\quad k^*=\left(\frac{\alpha A}{\rho+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}\qquad s^*=\alpha\,\frac{n+\delta}{\rho+\delta}$$

$$g_c^*=g_k^*=0$$

Como $\rho>n$, la productividad marginal exigida es mayor que en la regla de oro y, por rendimientos decrecientes, $k^*<k_{\text{oro}}$ y $s^*<\alpha$, porque los agentes impacientes no aceptan los sacrificios que exige la regla de oro. La tasa de ahorro estacionaria decrece con la impaciencia y, sin progreso técnico, capital y consumo per cápita no crecen.

Ahorro en la transición: con la Cobb-Douglas, es monótono y su sentido depende de s^* frente a $1/\theta$. En una economía pobre, el tipo de interés alto incentiva el ahorro por efecto sustitución, pero los agentes, que se saben más ricos en el futuro, desean adelantar consumo por efecto renta. Cuanto mayor es $1/\theta$, más pesa el primero.

- $s^*<1/\theta$: domina la sustitución y el ahorro decrece hacia s^*.
- $s^*>1/\theta$: domina el efecto renta y el ahorro crece hacia s^*.
- $s^*=1/\theta$: el ahorro es constante y el modelo reproduce exactamente a Solow.

Desarrollo gráfico: en el plano k-c:

1. *Locus* $\dot c=0$: vertical en k^*. A su izquierda el capital es escaso, el tipo de interés supera a la impaciencia y el consumo crece; a su derecha, al contrario.
2. *Locus* $\dot k=0$: la curva cóncava $c=f(k)-(n+\delta)k$, con su máximo en k_{oro}. Por encima de ella el consumo es demasiado alto y el capital disminuye, y por debajo aumenta. Corta el eje horizontal en el capital máximo sostenible, $\bar k$, donde $f(\bar k)=(n+\delta)\bar k$.
3. *Equilibrios*: el origen es inestable; el capital máximo sostenible con consumo nulo es estable, pero indeseable; y (k^*,c^*), el punto 0, es un **punto de silla**.

Hay una única senda estable. Las trayectorias por encima agotan el capital en un tiempo finito y las de abajo llevan a un consumo nulo e incumplen la transversalidad. Así, el consumo es una **variable de salto**, que se sitúa de inmediato sobre la senda estable, y el capital, una variable predeterminada. La economía converge desde la región de crecimiento ($k<k^*$, $c<c^*$), en la que el tipo de interés cae gradualmente hasta ρ y el crecimiento del consumo, hasta cero, o desde la de desacumulación ($k>k^*$, $c>c^*$).

Con θ elevado, la senda estable discurre muy cerca del *locus* $\dot k=0$, porque los hogares prefieren un consumo alto desde el principio. Con θ reducido es más empinada, porque recortan el consumo inicial para acumular deprisa. Por eso la velocidad de convergencia es mayor cuanto menor es θ. Con $\alpha\approx1/3$ supera con mucho el 2 % observado, y solo un capital amplio, $\alpha\approx2/3$, reconcilia el modelo con la evidencia.

Estática comparativa: tres perturbaciones no anticipadas.

- *Caída de* ρ: el *locus* $\dot c=0$ se desplaza a la derecha. El consumo salta hacia abajo a la nueva senda estable y después capital y consumo crecen hasta valores mayores (el patrón de Solow con $k<k_{\text{oro}}$).
- *Mejora tecnológica permanente*: el *locus* $\dot c=0$ se desplaza a la derecha, porque $f'(k)$ aumenta, y el $\dot k=0$, hacia arriba, porque hay más producción para cada k. El consumo salta, hacia arriba o hacia abajo, y a largo plazo k^* y c^* son mayores.
- *Mejora tecnológica transitoria*: los agentes la anticipan desde el primer momento y el consumo salta a una trayectoria intermedia que deja la economía sobre la senda original justo cuando el *shock* se revierte, un resultado que Solow no puede generar.

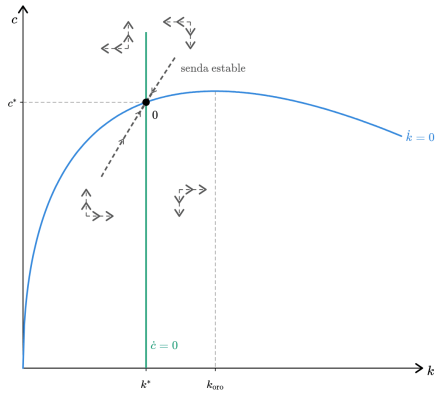
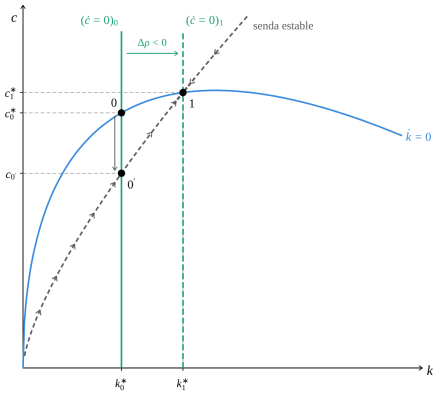


Diagrama de fases de Ramsey-Cass-Koopmans y senda estable hacia el punto de silla.



Caída no anticipada de ρ: el consumo salta a la nueva senda estable ($0\to0'$) y converge a 1.

Bienestar: se cumple el primer teorema del bienestar. El equilibrio descentralizado es Pareto-eficiente y coincide con el del planificador, porque las ecuaciones de Euler son iguales. No cabe ineficiencia dinámica. Con impuestos distorsionantes, externalidades o competencia imperfecta, la equivalencia se rompe.

Extensiones:

- *Teorema de la autopista* (Dorfman et al., 1958; Cass, 1966): con horizonte lejano, la senda óptima permanece casi siempre cerca del estado estacionario.
- *Progreso técnico*: con progreso aumentador del trabajo, la transversalidad exige $\rho>n+(1-\theta)g_A$ y el capital estacionario cumple $f'(\tilde k^*)=\rho+\delta+\theta g_A$: los agentes, que se saben más ricos, descuentan más el futuro. El consumo per cápita crece a g_A, como en Solow.
- *Sector público*: el gasto financiado con impuestos de suma fija desplaza hacia abajo el *locus* $\dot k=0$ y expulsa uno a uno al consumo privado, sin alterar k^*. Por la equivalencia ricardiana, lo mismo ocurre con deuda. Un impuesto sobre la renta del capital, en cambio, reduce k^*, con efecto nivel y no tasa.
- *Oferta de trabajo endógena*: con ocio en la utilidad, se añade la condición intratemporal $-u_l/u_c=w$, y el modelo es el núcleo del ciclo real.
- *Política económica*: las políticas que alteran los parámetros tienen efecto nivel y no tasa, y sin fallos de mercado no hay motivo para intervenir.

Aspectos positivos: microfundamenta el ahorro de Solow, prueba la eficiencia del equilibrio descentralizado e incorpora la impaciencia y la suavización del consumo, que determinan cuánto se ahorra y a qué ritmo se converge.

Limitaciones: la tecnología sigue siendo exógena, predice una convergencia condicional similar a la de Solow y el agente representativo con horizonte infinito excluye la heterogeneidad y los efectos intergeneracionales.