1. Función de producción no neoclásica

Los supuestos neoclásicos (rendimientos constantes a escala, rendimientos marginales decrecientes y condiciones de Inada) impiden el crecimiento endógeno: cada unidad de capital aporta cada vez menos, hasta que la inversión apenas repone la depreciación. La primera solución abandona alguna de esas propiedades y mantiene el resto del andamiaje de Solow, con ahorro exógeno salvo en Barro (1990).

1.1. Modelo AK (Rebelo, 1991)

Origen: Rebelo (1991). Su microfundamentación mediante el *aprendizaje por la práctica* procede de Arrow (1962) y Romer (1986).

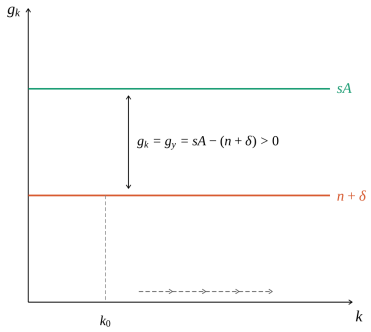
Idea: los supuestos son los de Solow-Swan salvo la función de producción, lineal en el capital *en sentido amplio*: físico, humano, conocimientos, infraestructuras y todo factor acumulable. Así, $Y = BK^{\alpha}H^{1-\alpha}$ equivale a un AK si una unidad de producto se convierte indistintamente en cualquiera de los dos capitales y estos se acumulan en la proporción que iguala sus rendimientos netos, $K/H = \alpha/(1-\alpha)$ con igual depreciación.

Supuestos: $Y = AK$ conserva solo los rendimientos constantes a escala. Pierde los rendimientos marginales decrecientes, porque el producto marginal es siempre A, y las condiciones de Inada. El entorno es el habitual: tecnología constante, ahorro exógeno s, economía cerrada sin sector público, población creciente a n y depreciación δ.

Planteamiento: como en Solow-Swan, con $Y = C + I$:

$$\begin{aligned}
&\text{Renta:} && Y = AK && \Rightarrow\ y = Ak && \Rightarrow\ g_y = g_k\\
&\text{Inversión:} && \dot{K} = sY - \delta K && \Rightarrow\ \dot{k} = sAk - (n+\delta)k && \Rightarrow\ g_k = sA - (n+\delta)\\
&\text{Consumo:} && C = (1-s)Y && \Rightarrow\ c = (1-s)Ak && \Rightarrow\ g_c = g_y
\end{aligned}$$

Desarrollo gráfico: en el plano k-g_k, la curva de ahorro y la de depreciación, divididas por k, son las rectas horizontales sA y $n+\delta$. Si $sA > n+\delta$, no se cruzan, y la distancia entre ellas, g_k, es la misma cualquiera que sea k_0: la economía crece indefinidamente a esa tasa común.



Modelo AK: con rendimientos constantes del capital, el crecimiento es positivo, permanente y sin convergencia.

Dinámica: las diferencias con Solow-Swan son profundas.

1. *Crecimiento sostenido*: la renta per cápita crece sin progreso técnico exógeno, el rasgo que define el crecimiento endógeno.
2. *Política económica*: las políticas que elevan el ahorro o la inversión afectan a la tasa de crecimiento, no solo al nivel de renta.
3. *Sin dinámica de transición*: la economía crece desde el principio a un ritmo invariable.
4. *Sin convergencia*, ni absoluta ni condicional: dos economías con parámetros idénticos crecen al mismo ritmo y mantienen para siempre su distancia relativa.
5. *Efectos permanentes de las recesiones*: sin un estado estacionario que actúe como atractor, no hay reversión a la tendencia.
6. *Sin ineficiencia dinámica*: como $s < 1$, $r = A - \delta > sA - \delta = g_Y$.

Aspectos positivos: es la formulación más sencilla del crecimiento endógeno e ilustra su mecanismo esencial: impedir que la productividad marginal del capital tienda a cero. El AK es, además, el caso $\alpha + \eta = 1$ del modelo de externalidades.

Limitaciones: no predice la convergencia condicional que apoya la evidencia, y supone una sustituibilidad perfecta, poco realista, entre capital físico y humano.

1.2. Modelo Sobelow (Jones y Manuelli, 1990)

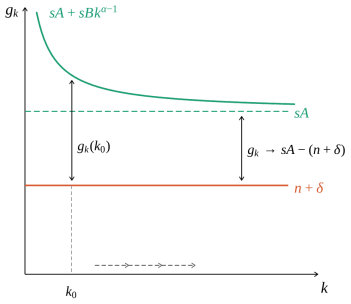
Idea: el modelo de Jones y Manuelli (1990), bautizado *Sobelow* por Sala-i-Martin porque combina las funciones de Solow y de Rebelo, aísla la propiedad sin la cual no hay crecimiento endógeno. Eliminar los rendimientos decrecientes basta, pero no es imprescindible. Lo indispensable es que **falle la condición de Inada en el infinito**, es decir, que la productividad marginal del capital no baje de cierta constante positiva.

Supuestos: la función suma un componente lineal y otro neoclásico, $Y = AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, con rendimientos constantes a escala y decrecientes en el capital, pero $\lim_{K\to\infty} f'_K = A \neq 0$. Con las ecuaciones de comportamiento del AK, $y = Ak + Bk^{\alpha}$ y:

$$\dot{k} = s(Ak + Bk^{\alpha}) - (n+\delta)k \quad \Rightarrow \quad g_k = sA + sBk^{\alpha-1} - (n+\delta)$$

Dinámica: la curva de ahorro por unidad de capital es decreciente y tiene como asíntota la recta sA. Decrece porque el componente neoclásico tiene rendimientos decrecientes y el lineal no, y si $sA < n+\delta$ corta a la recta de depreciación en k^*.

1. $sA > n+\delta$: a corto plazo crece más deprisa que un AK, porque el término neoclásico suma mientras el capital es escaso. Después ese término se desvanece y g_k converge a $sA-(n+\delta) > 0$, con transición hacia una tasa positiva.
2. $sA < n+\delta$: el componente lineal no basta y, como en Solow, la renta per cápita se estanca en el estado estacionario.



Modelo Sobelow: el ahorro por unidad de capital no corta a la depreciación ampliada y el crecimiento es sostenido.

Aspectos positivos: combina convergencia y transición, herencia neoclásica, con crecimiento endógeno a largo plazo, herencia AK, y se ajusta mejor a la evidencia que el AK puro.

Limitaciones: no distingue tipos de capital y postula sin microfundamentar la cota inferior de la productividad marginal.

1.3. Externalidades (Romer, 1986; Lucas, 1988)

Idea: a partir del *learning by doing* de Arrow (1962), la tercera vía deja intacta la tecnología de cada empresa y añade efectos externos. Invertir enseña a producir, y lo aprendido, no rival y difícil de apropiar, se filtra al resto de la economía (*knowledge spillovers*): la inversión de cada empresa eleva la producción de las demás.

Supuestos: la empresa produce con $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}E^{\eta}$, con $\eta > 0$. Percibe rendimientos constantes en sus factores privados y toma E como dado, pero en el agregado la externalidad eleva los rendimientos del capital.

- *Visión de Romer* (1986): la externalidad procede del capital agregado, $E = K$, y la tasa de crecimiento depende de la población. Según este **efecto escala**, el crecimiento debería aumentar con la población, algo que los datos no confirman. En forma intensiva, $y = Ak^{\alpha+\eta}L^{\eta}$.
- *Visión de Lucas* (1988): procede del capital per cápita, $E = k$, y el efecto escala desaparece. Es una estilización de manual, porque en Lucas la externalidad procede del capital humano medio.

Planteamiento: con la visión de Lucas, $y = Ak^{\alpha+\eta}$ y:

$$g_k = sAk^{\alpha+\eta-1} - (n+\delta)$$

Desarrollo gráfico: en el plano k-g_k, la curva de ahorro por unidad de capital es decreciente, horizontal o creciente según $\alpha+\eta$ sea menor, igual o mayor que uno, y la distancia a la recta $n+\delta$ es g_k.

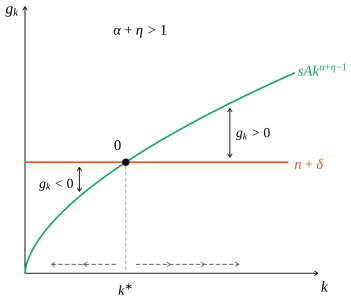
Dinámica: todo depende del tamaño de la externalidad, $\alpha+\eta$.

1. *Pequeña* ($\alpha+\eta < 1$): el ahorro por unidad de capital es decreciente y hay un estado estacionario estable sin crecimiento per cápita. La externalidad aleja el estado estacionario, pero el modelo es cualitativamente equivalente a Solow.
2. *Media* ($\alpha+\eta = 1$): compensa exactamente los rendimientos decrecientes y el modelo es idéntico al AK, con crecimiento si $sA > n+\delta$.
3. *Grande* ($\alpha+\eta > 1$): hay rendimientos crecientes y el estado estacionario es inestable. Por encima, la senda es explosiva, y por debajo, implosiva. Su interés empírico es limitado.

Extensiones: las externalidades dan margen a la intervención para elevar el crecimiento con *subvenciones a la inversión*, porque las empresas no capturan toda la externalidad e invierten menos de lo socialmente óptimo, y con la *promoción de los efectos externos*: *clusters*, centros de investigación y relaciones universidad-empresa. Las subvenciones, junto con las desgravaciones, aumentan el capital en sentido amplio.

Aspectos positivos: endogenizan el progreso técnico con un mecanismo plausible, el desbordamiento del conocimiento, sin abandonar la competencia perfecta.

Limitaciones: la evidencia de *learning by doing* es sectorial, como el 20 % de aprendizaje en semiconductores de Irwin y Klenow (1994), y



Externalidades con $\alpha+\eta>1$: el estado estacionario k^* es inestable.

no alcanza la escala necesaria para el crecimiento agregado. Además, el progreso técnico es un subproducto no buscado de la inversión, cuando buena parte de la innovación procede de una I+D deliberada.

1.4. Gasto público productivo (Barro, 1990)

Idea: Barro hace de los servicios públicos (infraestructuras, seguridad jurídica, orden público), financiados con impuestos, el factor que sostiene la productividad del capital privado. El sector público es a la vez factor productivo y distorsión, y de ese doble papel resulta un tamaño óptimo del Estado.

Supuestos:

- *Entorno*: familias a la Ramsey, con utilidad CRRA de parámetro θ y descuento ρ, población constante y depreciación δ. El ahorro es aquí endógeno.
- *Agentes*: el sector público provee servicios por trabajador g, no rivales ni congestionables, financiados con un impuesto proporcional sobre la renta y presupuesto equilibrado, $g=\tau y$.
- *Tecnología*: rendimientos constantes en capital y servicios públicos y decrecientes en el capital privado. Sustituyendo $g=\tau y$, resulta un AK cuya constante depende de la política fiscal, creciente en τ:

$$y=Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}=\tilde{A}(\tau)\,k,\qquad A>0,\ \alpha\in(0,1)$$

Planteamiento: las familias toman τ y g como dados y maximizan su utilidad intertemporal sujetas a $c+\dot{k}+\delta k=(1-\tau)Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}$. El rendimiento neto del capital privado es $r=(1-\tau)\,\alpha\tilde{A}(\tau)-\delta$, con:

$$\tilde{A}(\tau)\equiv A^{1/\alpha}\tau^{(1-\alpha)/\alpha}$$

CPO: la ecuación de Keynes-Ramsey con el rendimiento neto del capital privado:

$$g_c=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\,\alpha\tilde{A}(\tau)-\delta-\rho\right]$$

La condición iguala el rendimiento neto del capital privado, descontados el impuesto y la depreciación, a la tasa de descuento más el crecimiento del consumo ponderado por θ. El consumo crece mientras la última unidad de capital, tras impuestos, rinde más de lo que la familia exige por posponer su consumo, y tanto más deprisa cuanto menor es θ.

CSO: el hamiltoniano es estrictamente cóncavo en c y cóncavo en k dado g, y con la transversalidad la CPO es suficiente. El crecimiento es positivo si $(1-\tau)\,\alpha\tilde{A}-\delta>\rho$ y la utilidad está acotada si $\rho>(1-\theta)g_c$.

Equilibrio: con tecnología lineal no hay transición, y consumo, capital y renta crecen desde el principio a g_c. El impuesto tiene dos efectos contrapuestos: reduce el rendimiento privado, efecto *distorsión* $(1-\tau)$, y financia un factor productivo, efecto *productivo* $(\tilde{A}(\tau))$. Maximizando $(1-\tau)\tau^{(1-\alpha)/\alpha}$ se obtiene la **regla de Barro**:

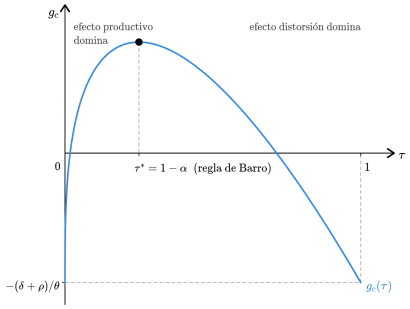
$$\tau^*=1-\alpha$$

$$g_c=g_k=g_y=\frac{1}{\theta}\left[\alpha^2\tilde{A}(1-\alpha)-\delta-\rho\right]$$

El tipo óptimo iguala la elasticidad del producto respecto al gasto público, de modo que el sector público debe tener el tamaño que corresponde a su contribución productiva. Ese tipo maximiza también la utilidad, porque, sin transición, crecimiento y consumo inicial dependen de τ solo a través del producto neto de impuestos por unidad de capital.

Desarrollo gráfico: en el plano τ-g_c, la tasa de crecimiento es una U invertida con máximo en $\tau^*=1-\alpha$. En $\tau=0$ no hay servicios públicos ni producción, y en $\tau=1$ no hay rendimiento privado. A la izquierda del máximo domina el efecto productivo y a la derecha, el de distorsión. En ambos extremos se anula el rendimiento del capital privado después de impuestos y la tasa alcanza su mínimo, $-(\delta+\rho)/\theta<0$.

Estática comparativa: un aumento de A o una reducción de ρ o δ elevan el crecimiento para todo τ, sin alterar τ^*, que solo depende de la tecnología.



Modelo de Barro (1990): crecimiento en U invertida respecto al tipo impositivo, con máximo en $\tau^*=1-\alpha$.

Extensiones: el gasto en consumo público no eleva $\tilde{A}$ y solo distorsiona, lo que ofrece una lectura de la evidencia de Barro (1991): el consumo público reduce el crecimiento y la inversión pública no. La composición del gasto importa más que su volumen. Los impuestos de suma fija eliminan la distorsión, aunque el tamaño óptimo sigue siendo $g/y=1-\alpha$, que responde a la condición de eficiencia productiva, $\partial y/\partial g=1$. Con impuestos proporcionales el equilibrio es ineficiente, porque las familias no internalizan que su inversión, al elevar la recaudación, financia servicios públicos para todos. Si los servicios son congestionables, es decir, si el que recibe cada empresa depende de g/k, el tamaño óptimo es el mismo, pero el impuesto sobre la renta pasa a ser el instrumento eficiente, al internalizar la congestión.

Aspectos positivos: es el modelo de referencia sobre tamaño del sector público y crecimiento, y fundamenta la distinción entre gasto productivo e improductivo.

Limitaciones: la no rivalidad es un supuesto fuerte, porque la congestión es la regla en las infraestructuras. El resultado depende de que el gasto sea un flujo y no un *stock*, y la evidencia sobre tamaño del Estado y crecimiento es débil.

En suma, basta con que el rendimiento del capital amplio no caiga a cero para que el ahorro, y con él la política económica, determine la tasa de crecimiento. Pero el ahorro sigue siendo exógeno, salvo en Barro, el efecto escala de Romer (1986) no tiene respaldo y ninguno explica cómo se genera el conocimiento.

2. Capital humano: Uzawa-Lucas (1965; 1988)

Idea: el modelo de Uzawa (1965), popularizado por Lucas (1988), distingue explícitamente entre capital físico y humano y endogeniza el ahorro con hogares a la Ramsey.

2.1. Supuestos

Entorno: la población es constante y se normaliza a uno.

Agentes: los hogares maximizan una utilidad CRRA con dos controles, el consumo c y la fracción u, y dos estados, K y H.

Tecnología:

- *Factores*: capital físico, K, y humano, H, ambos rivales y acumulados con tecnologías distintas. Una fracción $u\in(0,1)$ del capital humano produce bienes y el resto, $1-u$, se dedica a la educación. Con la noción de capital humano de la escuela de Chicago, el trabajo pasa a ser un factor acumulable.
- *Sector de bienes finales*: produce con una Cobb-Douglas, $Y=AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha}$, y el capital físico se acumula con la producción no consumida, $c+\dot{K}+\delta K=Y$.
- *Sector educativo*: con productividad B, podría emplear ambos capitales, con una participación α_H del físico. Como la educación usa mucho más intensivamente el capital humano, $\alpha_H<\alpha$, y Uzawa y Lucas se quedan con el caso extremo en que solo emplea ese factor, $\alpha_H=0$:

$$\dot{H}=B(1-u)H-\delta H$$

El supuesto convierte la educación en un **AK encubierto**, lineal en el factor acumulable, y de ahí nace el crecimiento endógeno.

2.2. Modelo

Hogares: eligen el consumo y la fracción u del capital humano que dedican a producir:

$$\max_{\{c,u\}}\int_0^{\infty}e^{-\rho t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}\,dt\quad\text{s.a.:}\begin{cases}c+\dot{K}+\delta K=AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha}, & A>0,\ \alpha\in(0,\\ \dot{H}=B(1-u)H-\delta H\\ K_0,\ H_0\text{ dados}\end{cases}$$

El hamiltoniano en valor corriente tiene dos multiplicadores, λ y μ, y, como uH impide su concavidad conjunta, se supone la condición de suficiencia de Arrow. Las cuatro CPO, más las dos de transversalidad, dan tres resultados:

- *Keynes-Ramsey*: $g_c=(1/\theta)(r-\rho)$, con $r=\alpha AK^{\alpha-1}(uH)^{1-\alpha}-\delta$.

– *Asignación del tiempo*: el valor de una unidad de capital humano en la producción de bienes iguala su valor en la educación, $\lambda(1-\alpha)AK^\alpha(uH)^{-\alpha} = \mu B$.
– *Euler del capital humano*: $\mu(B-\delta) = \rho\mu - \dot{\mu}$, de modo que su precio sombra decrece a la tasa $B-\delta-\rho$, y con $\alpha_H = 0$ evoluciona con independencia de la tecnología de bienes, lo que aísla el crecimiento de A y α.

Empresas: maximizan su beneficio, $AK^\alpha(uH)^{1-\alpha} - (r+\delta)K - w_H\,uH$, con precios dados y w_H la remuneración del capital humano empleado, y pagan a cada capital su productividad marginal, de donde sale el r anterior. Con rendimientos constantes, el beneficio es nulo. Al capital humano empleado le corresponde $w_H = (1-\alpha)AK^\alpha(uH)^{-\alpha}$.

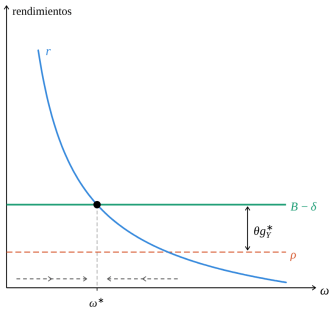
Equilibrio: en la senda de crecimiento equilibrado, K/H y u son constantes, y la condición de **arbitraje entre capitales** iguala el rendimiento del capital físico al del humano. Con Keynes-Ramsey y la acumulación del capital humano, $g_H^* = B(1-u^*)-\delta$, se obtienen la fracción de tiempo dedicada a producir y la tasa común de crecimiento:

$$r = B-\delta \qquad u^* = 1 - \frac{B-\delta-\rho+\theta\delta}{\theta B}$$

$$g_c^* = g_K^* = g_H^* = g_Y^* = \frac{1}{\theta}(B-\delta-\rho)$$

Para crecer hace falta $B > \delta+\rho$, es decir, la educación debe cubrir el olvido de conocimientos y la impaciencia. Solo B eleva el crecimiento a largo plazo, y la educación es el motor. La lógica es la del AK, pero sin suponer capitales sustitutos perfectos. Con utilidad logarítmica, $u^* = \rho/B$. Sin externalidades, la solución descentralizada coincide con la del planificador, como establece el primer teorema fundamental de la economía del bienestar.

Desarrollo gráfico: con $\omega \equiv K/H$ en el eje horizontal, el rendimiento del capital físico es decreciente en ω y el del humano, $B-\delta$, una horizontal que no decrece (la recta AK que sostiene el crecimiento). La tasa de descuento, ρ, es otra horizontal. En ω^* se igualan ambos rendimientos, y la distancia entre $B-\delta$ y ρ es θg_Y^*.



Modelo de Uzawa-Lucas: en ω^* se igualan los rendimientos de ambos capitales.

Estática comparativa: el crecimiento aumenta con la productividad educativa, B, y disminuye con la impaciencia, ρ, la tasa de olvido, δ, y, si es positivo, con el deseo de alisar el consumo, θ. Una mayor impaciencia lleva a producir más y, si $\rho > (\theta-1)\delta$, una mayor productividad educativa lleva a estudiar más. Los parámetros de la tecnología de bienes, A y α, solo afectan al nivel de la senda y a ω^*.

Extensiones: Lucas (1988) añade una externalidad del capital humano medio, H_a^ζ: la productividad de un trabajador crece con la cualificación de quienes le rodean, y el mercado dedica menos tiempo a la educación que el planificador. Rebelo (1991) muestra que el resultado se mantiene si la educación usa capital físico, con rendimientos constantes en los factores acumulables. Lucas interpreta el modelo como explicación de las diferencias persistentes de crecimiento entre países y de las migraciones de trabajadores cualificados hacia los países con más capital humano. En política, toda mejora permanente de B eleva permanentemente el crecimiento, y con la externalidad de Lucas la subvención a la educación acerca u a su óptimo.

2.3. Dinámica

Punto de silla: en el plano de la ratio de capitales, ω, y la ratio consumo-capital, $\chi \equiv c/K$, hay un único estado estacionario, un punto de silla, y ω es predeterminada y χ, con u, es de salto. Con $\theta > \alpha$, el caso relevante:

1. $\omega < \omega^*$, tras un conflicto que arrasa las infraestructuras pero no el conocimiento: el capital físico rinde mucho, se produce más, $u > u^*$, y la economía crece transitoriamente por encima de su tasa estacionaria. Así se interpreta la rápida reconstrucción de Alemania y Japón tras la Segunda Guerra Mundial.
2. $\omega > \omega^*$, tras una fuga de cerebros: el capital físico rinde poco y los agentes estudian más, $u < u^*$.

A diferencia del AK hay transición, pero la convergencia es hacia una tasa común y no hacia un nivel, de modo que economías iguales con dotaciones distintas mantienen su diferencia de renta. La economía se sitúa de inmediato sobre la senda estable y converge por ella, mientras K, H y c crecen en el límite a g_Y^*.

Aspectos positivos: distingue capitales, hace de la asignación del tiempo entre producir y aprender la decisión que fija el crecimiento, tiene transición y su solución descentralizada es óptima. Explica por qué economías con la misma tecnología crecen a ritmos distintos si difieren en su sistema educativo o en sus preferencias.

Limitaciones: no predice convergencia, descansa en una educación con rendimientos constantes que la evidencia no confirma y no separa el capital humano que produce del que innova.

3. Innovación tecnológica: I+D con competencia imperfecta

Modelizar la innovación como actividad deliberada exige abandonar la competencia perfecta. Por el teorema de Euler, retribuir los factores rivales por su productividad marginal agota el producto y no deja rentas para la I+D. Además, una idea tiene costes fijos elevados y un coste de reproducción casi nulo, y tiende a producirse con poder de mercado. Los modelos de innovación introducen, por tanto, competencia imperfecta y empresas que invierten en progreso técnico a cambio de rentas de monopolio protegidas por patentes. La innovación es *horizontal* en Romer (1990) y *vertical* en Aghion y Howitt (1992).

3.1. Aumento de variedades (Romer, 1990)

Idea: es el primer modelo en el que la innovación resulta de una inversión deliberada en I+D, y consiste en aumentar el número N de variedades de bienes de capital intermedios.

3.1.1. Supuestos

Hay tres clases de agentes: productores de bienes finales en competencia perfecta, inventores con una patente perpetua que les da el monopolio de su variedad y consumidores a la Ramsey. El análisis es de equilibrio general, con horizonte infinito y población constante.

3.1.2. Modelo

Productores finales: maximizan su beneficio, $Y - wL - \sum_j p_j x_j$, con precios dados, y contratan trabajo y cada intermedio hasta que su productividad marginal iguala su precio, de donde sale la demanda isoelástica de cada intermedio, $x_j^d = L\,(\alpha A/p_j)^{1/(1-\alpha)}$, creciente en A y L y decreciente en p_j. Producen con productividad A, empleo L y x_j unidades de cada intermedio:

$$Y = A\,L^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N} x_j^\alpha$$

Inventores: pagan un coste fijo F por inventar y deciden por inducción hacia atrás.

– *Precio*: maximizan $(p_j-1)\,x_j^d(p_j)$, con coste marginal unitario, y ante una demanda isoelástica, de elasticidad $1/(1-\alpha) > 1$, fijan un **margen** constante sobre el coste marginal, $p_j = 1/\alpha > 1$, que maximiza su beneficio. Todas las variedades venden lo mismo y dejan el mismo beneficio.
– *Participación*: con patente perpetua, inventar vale Π/r, y por libre entrada se crean variedades hasta que $\Pi/r = F$. Mientras $\Pi/r > F$, entran inventores, y la mayor demanda de fondos eleva el tipo de interés hasta restaurar la igualdad.

Consumidores: siguen la ecuación de Keynes-Ramsey, $g_c = (1/\theta)(r-\rho)$.

Equilibrio: con $p_j = 1/\alpha$, la cantidad de cada intermedio es común y la producción resulta proporcional al número de variedades. Combinando Keynes-Ramsey con la libre entrada se obtiene la tasa común a todas las variables:

$$x_j = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}L \qquad Y = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L\cdot N$$

$$g_Y^* = g_y^* = g_N^* = g_c^* = f(A^+, L^+, \theta^-, F^-, \rho^-, \alpha)$$

La expansión horizontal de variedades evita que caiga la productividad marginal del capital y cumple el papel de la linealidad en el AK.

Estática comparativa: la tasa de crecimiento aumenta con A y con el tamaño de la economía, L, y disminuye con F, con ρ y, si es positiva, con θ.

Dinámica: no hay transición, y todas las variables avanzan desde el inicio al mismo ritmo, como en el AK.

Extensiones: en la formulación original, inventar exige trabajo dedicado a la investigación, $L = L_Y + L_A$, y las variedades nacen de la **función de producción de ideas**, lineal en N porque cada investigador se apoya en todas las ideas existentes (*standing on the shoulders of giants*):

$$\dot{N} = \nu L_A N \;\Rightarrow\; g_N = \nu L_A$$

El trabajo se asigna por arbitraje salarial: el salario en investigación, el valor de los diseños que produce un investigador, iguala al de producción.

El salario en investigación es $w_A = \nu N P_N$, con $P_N = \Pi/r$, y el de producción, $w_Y = (1-\alpha)Y/L_Y$. Con utilidad logarítmica:

$$L_A^* = \frac{L - \Lambda\rho/\nu}{1+\Lambda} \qquad \Lambda \equiv \frac{1}{\alpha}$$

$$g_Y^* = \nu L_A^* = \frac{\nu L - \Lambda\rho}{1+\Lambda}$$

El crecimiento es proporcional al trabajo en investigación y aumenta con L (la forma explícita del efecto escala). Ambas versiones comparten la estructura de tres sectores y la producción proporcional a N.

3.1.3. Análisis normativo

El poder de mercado encarece los intermedios, los productores finales usan pocos y se investiga y crece por debajo del óptimo. De menor a mayor eficacia:

1. *Solución de mercado*: el menor crecimiento.
2. *Subvención a la I+D*: acelera la aparición de variedades, pero deja intacta la distorsión de las cantidades.
3. *Subvención a la compra de intermedios*: baja el precio neto al competitivo y, con coste fijo, reproduce la asignación del planificador. Con sector de I+D subsiste la externalidad del conocimiento sobre la investigación futura.

3.1.4. Conclusiones

Aspectos positivos: trata la innovación como inversión deliberada guiada por incentivos e integra en equilibrio general la competencia imperfecta, las patentes y la no rivalidad de las ideas.

Limitaciones: predice un efecto escala que los datos refutan, y no tiene convergencia ni transición.

3.2. Enfoque schumpeteriano

Origen: Aghion y Howitt (1992), que compartieron con Mokyr el Premio Nobel de Economía de 2025, formalizaron, junto con Grossman y Helpman (1991), la **destrucción creativa** de Schumpeter.

Idea: la innovación es vertical. La calidad mejora escalón a escalón en una *escalera de calidad*, y cada innovación vuelve obsoleta la anterior y destruye las rentas del incumbente. Crea valor y destruye valor, y del balance depende que se innove más o menos de lo óptimo.

3.2.1. Supuestos

Economía cerrada, población constante L y agentes neutrales al riesgo que descuentan al tipo r. Los productores del bien final compiten perfectamente, el del intermedio es monopolista mientras posee la mejor calidad, y los investigadores compiten por la siguiente innovación. Con $Y = A_t x^\alpha$, cada innovación multiplica la calidad, $A_{t+1} = \gamma A_t$, con $\gamma > 1$. Las innovaciones llegan según un proceso de Poisson de intensidad $\lambda_I L_A$, y el trabajo se reparte entre producir el intermedio e investigar, $L = x + L_A$. El tiempo hasta la siguiente innovación es aleatorio, con media $1/(\lambda_I L_A)$.

3.2.2. Modelo

Monopolista del intermedio: el problema se resuelve en dos pasos. En el primero, el monopolista de la generación t elige la cantidad de intermedio que maximiza su beneficio dado el salario, con la productividad marginal del sector final como demanda inversa:

$$\max_x \ \Pi_t = p_t(x)\,x - w_t x, \qquad p_t(x) = \alpha A_t x^{\alpha-1}$$

De su CPO, $\alpha^2 A_t x^{\alpha-1} = w_t$, la cantidad y el beneficio decrecen con el salario en unidades de productividad, $\tilde{w}_t \equiv w_t/A_t$. El beneficio es estrictamente cóncavo en x.

Investigadores: después, deciden cuánto trabajo dedicar a investigar comparando su valor esperado con el salario. El **arbitraje** iguala el salario al valor esperado de investigar, con las rentas descontadas al tipo de interés más la tasa de llegada de la innovación que las destruirá. La condición es de libre entrada y tiene solución única en el estado estacionario:

$$w_t = \lambda_I V_{t+1}, \qquad V_{t+1} = \frac{\Pi_{t+1}}{r + \lambda_I L_{A,t+1}}$$

Equilibrio: en el estado estacionario, L_A y $\tilde{w}$ son constantes. La curva de arbitraje, RA, es decreciente, porque más investigación acorta la vida esperada de cada monopolio y reduce el salario que la investigación puede pagar. La del mercado de trabajo, LL, $L = \tilde{x}(\tilde{w}) + L_A$, es creciente, porque un salario mayor libera trabajo para investigar. Su corte fija el esfuerzo investigador, L_A^*, y la tasa media de crecimiento, frecuencia por tamaño de las innovaciones:

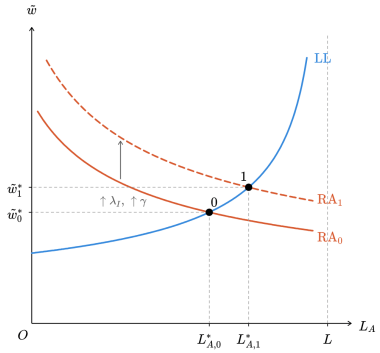
$$\text{RA: } \tilde{w} = \frac{\lambda_I \gamma \tilde{\Pi}(\tilde{w})}{r + \lambda_I L_A} \qquad \text{LL: } L = \tilde{x}(\tilde{w}) + L_A$$

$$g_Y^* = \lambda_I L_A^* \ln\gamma$$

El crecimiento es estocástico, a saltos de tamaño $\ln\gamma$ en instantes aleatorios, con una tasa media constante.

Estática comparativa: el crecimiento aumenta con λ_I, γ y L, efecto escala, y disminuye con r y con la competencia de los rivales, que reduce el valor de innovar. Un aumento de λ_I o de γ desplaza hacia arriba la RA y eleva L_A^*, uno de L desplaza la LL hacia la derecha y libera trabajo para investigar, y uno de r desplaza la RA hacia abajo.

1. *Educación superior*: eleva λ_I y la capacidad de absorción.
2. *Propiedad intelectual*: prolonga la vida esperada del monopolio y eleva V.
3. *Competencia*: la evidencia para el Reino Unido muestra una U invertida, en la que la competencia moderada estimula la innovación para escapar de ella, aunque otras muestras no siempre lo confirman.



Modelo de Aghion y Howitt (1992).

Extensiones: tres externalidades hacen ambiguo si se innova de más o de menos, a diferencia de Romer:

- *Desbordamiento intertemporal*: cada innovación eleva la base de las siguientes; subinversión.
- *Business stealing*: el innovador no internaliza las rentas que destruye; sobreinversión.
- *Apropiabilidad incompleta*: no captura todo el excedente del consumidor; subinversión.

Grossman y Helpman (1991) obtienen resultados análogos con escaleras de calidad en un continuo de bienes. Subvencionar la I+D solo es deseable si dominan las dos de subinversión. La política de competencia debe buscar el tramo intermedio de la U, y la protección de patentes tiene un óptimo interior.

3.2.3. Conclusiones

Aspectos positivos: describe la innovación como se observa, con mejoras de calidad que desplazan productos, rotación empresarial y obsolescencia, y da predicciones contrastables sobre estructura de mercado e innovación.

Limitaciones: su normativa es ambigua y, en las versiones básicas, comparte el efecto escala y la falta de convergencia.

3.3. Crítica del efecto escala (Jones, 1995)

Idea: Charles Jones (1995) observa que en Romer y en Aghion-Howitt duplicar los investigadores duplica la tasa de crecimiento, pero los investigadores se han multiplicado desde 1950 y el crecimiento de la productividad no ha aumentado.

Razonamiento: Jones supone rendimientos decrecientes en la producción de ideas, que son **cada vez más difíciles de encontrar**:

$$\dot{N} = \nu L_A N^\phi, \ \ \phi < 1 \ \Rightarrow \ g_y = \frac{n}{1-\phi}$$

El crecimiento a largo plazo depende solo del crecimiento de la población, exógeno, y la fracción de recursos dedicada a investigar solo afecta al nivel. El modelo es **semiendógeno**: la tasa se determina dentro del modelo, pero no responde a la política, como en Solow.

Extensiones: los modelos schumpeterianos de segunda generación eliminan el efecto escala suponiendo que las variedades crecen con la población y diluyen la investigación por producto, y preservan así una tasa sensible a la política. El debate decide si la I+D eleva la tasa de crecimiento o solo el nivel de renta.

Aspectos positivos: concilia los modelos de I+D con un crecimiento estable pese al mayor esfuerzo investigador y conserva la acumulación de ideas no rivales. La hipótesis de ideas más difíciles de encontrar tiene apoyo empírico.

Limitaciones: el crecimiento vuelve a depender de una variable exógena, la población, y si esta deja de crecer, el crecimiento per cápita tiende a desaparecer.