B24. Análisis de los instrumentos de renta fija. Determinación del precio y rendimiento de los bonos. La estructura temporal de los tipos de interés. Valoración del riesgo y del rendimiento de los bonos: duración y convexidad

1. Fundamentos del análisis de renta fija

El análisis empieza por el bono: sus conceptos básicos, su mercado, la hipótesis de eficiencia y la elección entre gestión activa y pasiva, y después los métodos que determinan su precio teórico y su rentabilidad.

1.1. Conceptos básicos

1.1.1. Instrumentos de renta fija: los bonos

Definición: el **bono**, máximo exponente de la renta fija, es un activo por el que el emisor contrae una deuda frente al tenedor, que adquiere un derecho de crédito sobre el nominal y los intereses. Frente a la acción, su retribución está pactada y el tenedor cobra antes que el accionista. Sus elementos son el valor facial o nominal, F_T, que se cobra al vencimiento; el vencimiento, T, y el precio de mercado, p_t^m. La mayoría paga además un **cupón**, C_t, el interés periódico, que es la rentabilidad del tenedor y el coste financiero del emisor.

Tipos según el cupón: cupón cero, que solo pagan el nominal; cupón fijo (*plain vanilla*); cupón variable, referenciado a un tipo de mercado más un diferencial o creciente según un calendario (*step-up*); devengables, que acumulan los cupones hasta el vencimiento, y con cupones diferidos.

Otros tipos: destacan tres.

- *Bonos con opción*: el emisor o el inversor puede amortizarlos anticipadamente.
- *Bonos convertibles contingentes (CoCos)*: híbridos que se convierten en acciones, o reducen su nominal, si se activa un disparador, como una ratio de capital bajo un umbral, lo que constituye un *bail-in* contractual.
- *Bonos verdes*: destinan sus fondos exclusivamente a proyectos verdes elegibles y se alinean con los *Green Bond Principles*.

Funcionamiento: puede emitir bonos en el mercado primario cualquier agente que encuentre acreedores, tenga un programa de emisión y cumpla los requisitos legales: instituciones financieras, sociedades no financieras, el sector público y los organismos internacionales. Se emite de tres formas.

1. *Subasta*: inglesa o ascendente, con pujas crecientes y observables; holandesa o descendente, desde un valor que se reduce hasta que alguien la detiene, y española u holandesa modificada, que combina precio único y precios múltiples.
2. *Sindicación*: un sindicato bancario, coordinado por una entidad directora (*lead manager*), coloca operaciones que ninguna entidad acometería sola, como eurobonos o deuda soberana emergente.
3. *Colocaciones privadas*: emisiones *ad hoc* con características particulares.

Valoración: el emisor se financia sin ceder derechos políticos y el tenedor recibe flujos pactados, con prelación sobre el accionista. Pero son nominales y dependen de la solvencia del emisor, por lo que el tenedor soporta los riesgos de tipo de interés, de inflación y de crédito.

1.1.2. Mercado de renta fija

Definición: el **mercado de renta fija** es el conjunto de mercados en que se emiten y se negocian los valores de deuda. La mayoría están dirigidos por precios (*quote-driven*), es decir, los creadores de mercado cotizan precios de compra y de venta y dan contrapartida a sus clientes (CGFS, 2016).

Tipos: por el plazo, el monetario, con letras y pagarés, y el de capitales, a más de un año; por el emisor, el de deuda pública, referencia sin riesgo, y el de deuda privada, y por la fase, el primario y el secundario.

Funcionamiento: en el secundario la negociación es sobre todo bilateral, por teléfono o en plataformas electrónicas en las que el cliente pide cotización a varios intermediarios. Los bonos corporativos, numerosos, con poco volumen por emisión y cláusulas propias, dependen más de esa intermediación que los soberanos, y la liquidez se concentra en las emisiones de referencia de deuda pública. Para sostenerla, los Tesoros designan creadores de mercado: en España, pujan en las subastas por al menos el 3 % del importe adjudicado y cotizan en el secundario (Resolución de 21 de julio de 2017).

Valoración: la deuda pública da los tipos sin riesgo de la ETTI, pero la negociación bilateral es menos transparente que la bursátil y, fuera de las referencias, la liquidez es escasa.

1.1.3. Hipótesis de los mercados eficientes

En un mercado de bonos eficiente (Fama, 1970), el precio incorpora toda la información sobre los tipos futuros y la solvencia del emisor. La regla de compra y venta del precio teórico supone, en cambio, un mercado a lo sumo débilmente eficiente, porque, si lo fuera en sentido semifuerte, el análisis fundamental no daría rentabilidades extraordinarias. La gestión activa busca precisamente esas desviaciones entre el precio de mercado y el valor teórico.

1.1.4. Gestión activa y gestión pasiva de carteras

Gestión activa: parte de que el mercado no es plenamente eficiente y busca batir al índice con cuatro técnicas.

- *Anticipación de tipos*: alarga la duración si se esperan bajadas y la acorta en caso contrario.
- Deslizamiento por la curva (*riding the yield curve*): compra bonos más largos que el horizonte para venderlos con la plusvalía del paso del tiempo, si la curva es creciente y estable.
- Cartera en mancuerna (*barbell*): repartida entre los extremos de la curva, es más convexa que una concentrada en un plazo intermedio (*bullet*) de igual duración y la supera si la curva se aplana.
- *Selección de emisores*: compra bonos cuyo diferencial de crédito supera al que justifica la solvencia del emisor, a la espera de que se estreche.

Gestión pasiva: renuncia a anticipar los tipos y comprende la indexación, que replica un índice, a menudo por muestreo; la inmunización, que iguala la duración de la cartera al horizonte de un compromiso, y el casamiento de flujos, que no exige reajustes, aunque es más caro que la inmunización.

1.2. Precio teórico

1.2.1. Consideraciones generales

Términos del contrato: la tasa del cupón, c, el nominal, F_T, el vencimiento, T, y la frecuencia de pago, n, se fijan en la emisión y determinan los flujos del tenedor.

Valor teórico: es el valor actual de los flujos pendientes. En un bono con cupón fijo, con $C = c\,F_T/n$:

$$p_t = \sum_{s=1}^{n(T-t)} \frac{C}{(1+k/n)^s} + \frac{F_T}{(1+k/n)^{n(T-t)}}$$

- Se supone que t es una fecha de pago de cupón. La tasa de descuento, k, es el coste de oportunidad de las partes, suma de un tipo libre de riesgo, r_f, y una prima de riesgo, ρ, por riesgos como el de impago o el de inflación.

Precio de mercado: el arbitraje ancla la cotización a la curva cupón cero, pero no fija el nivel de los tipos ni la prima de riesgo, y la cotización puede separarse así del valor teórico de cada inversor, cuya ρ depende de su propia valoración del riesgo. Comprar tiene un valor actual neto de $p_t - p_t^m$. Si $p_t > p_t^m$, el bono está infravalorado y conviene comprarlo, y si $p_t < p_t^m$, está sobrevalorado y cabe no comprarlo o abrir una posición corta.

Ejemplo: un bono a tres años de nominal 100 y cupón anual del 6 %, al que se exige un 5 %, vale

$$p_t = \frac{6}{1{,}05} + \frac{6}{1{,}05^2} + \frac{106}{1{,}05^3} \approx 102{,}72$$

- Está por encima del nominal porque el cupón supera a la rentabilidad exigida. Si cotiza a 101,50, comprarlo tiene un valor actual neto de 1,22 y conviene abrir una posición larga.

1.2.2. Valoración del bono

En la emisión: a diferencia de un derivado simétrico, cuyo precio se pacta para que su valor inicial sea nulo, el bono tiene valor positivo desde el origen y el comprador lo paga, como la prima de una opción. El emisor suele fijar el cupón cerca de la rentabilidad exigida, de modo que el bono se coloca cerca de la par. Bajo los supuestos de la TIR, ese precio da al tenedor una rentabilidad y al emisor un coste de capital iguales a k. Con cupón anual, es una anualidad más el valor actual del nominal:

$$p_0 = C \cdot \frac{1-(1+k)^{-T}}{k} + \frac{F_T}{(1+k)^T}$$

- En un bono a perpetuidad, el precio teórico se reduce a $p_0 = C/k$.

A lo largo de su vida: el valor teórico varía en sentido inverso a la rentabilidad exigida y se desplaza hacia el nominal con el paso del tiempo, y la regla de compra y venta se aplica en cada momento.

Al vencimiento: el bono paga el último cupón y el nominal, y su valor ex cupón es $p_T = F_T$, sea cual sea la rentabilidad exigida.

1.3. Rentabilidad de un bono

Fuentes: la **rentabilidad** del bono procede de los intereses, de las ganancias o pérdidas al enajenarlo y de la reinversión de sus flujos.

1.3.1. Rentabilidad corriente (*current yield*)

Definición: es el cupón anual sobre el precio de mercado, $\mathrm{CY} = nC/p_t^m$. Supera a la tasa del cupón si el bono cotiza al descuento y queda por debajo si cotiza a premio, porque el mismo cupón se divide entre un precio menor o mayor que el nominal. Es muy sencilla, pero ignora dos de las tres fuentes de rentabilidad, la plusvalía al revender el título y la reinversión de los cupones, y se queda solo con el cupón.

1.3.2. Rentabilidad al vencimiento (*yield to maturity*)

Definición: la **rentabilidad al vencimiento**, r_B, es la TIR del bono, la medida más precisa y habitual. Los inversores determinan los flujos

prometidos y hallan, por prueba y error, la tasa que iguala su valor actual con el precio de mercado:

$$p_t^m = \sum_{s=1}^{n(T-t)} \frac{C}{(1+r_B/n)^s} + \frac{F_T}{(1+r_B/n)^{n(T-t)}}$$

- Es la tasa única que, aplicada a todos los plazos, iguala el valor actual de los flujos prometidos al precio, y coincide con la rentabilidad exigida, k, cuando esta se infiere del precio.
- Frente a la corriente, recoge el nominal, el vencimiento y la frecuencia de pago, además del precio y el cupón. Crece con el cupón y el nominal, decrece con el precio y su relación con el plazo es ambigua. Entre dos fechas de cupón, el precio es el completo, ex cupón más cupón corrido.
- Solo refleja con exactitud lo que rinde un bono bajo tres supuestos: mantenimiento hasta el vencimiento, sin opciones de amortización anticipada del emisor ni del inversor; pago íntegro de los cupones, sin riesgo de crédito ni riesgo soberano, y reinversión de los cupones a la TIR. Este último impide comparar bonos de distinto plazo por su TIR, porque pagos de la misma fecha se descontarían a tasas distintas, e implica una curva de rentabilidades plana, cuando nada obliga a que lo sea.

1.3.3. Teoremas de la valoración

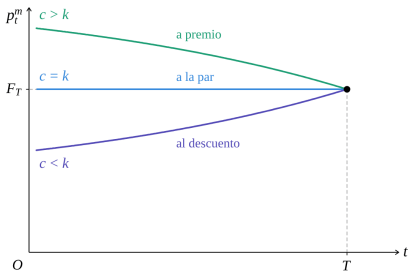
Los teoremas I y IV recogen tres de los cinco resultados que demostró Malkiel (1962): la relación inversa, la convexidad y el efecto cupón.

Teorema I: el precio de un bono sin opción y su rentabilidad al vencimiento guardan una relación **inversa y convexa**. Es inversa porque la rentabilidad descuenta los flujos. Si cae la de los nuevos bonos, los antiguos son más atractivos y su precio sube. Es convexa porque cada factor de descuento lo es: el precio sube más ante una caída de la rentabilidad de lo que baja ante una subida igual. Se refiere a bonos ya emitidos, y de ella nace el riesgo de tipo de interés, que junto con el de impago es el más relevante del mercado de bonos, sobre todo en los soberanos.

- En los bonos amortizables anticipadamente (*callable*), la convexidad se vuelve negativa con rentabilidades bajas, porque crece el valor de la opción del emisor de amortizar y refinanciarse más barato (riesgo de llamada).

Teorema II: de la relación inversa se sigue una correspondencia biunívoca entre comparar el precio con el nominal y comparar el cupón con la rentabilidad exigida. El bono cotiza a la par si y solo si el cupón iguala la rentabilidad exigida, $p_t^m = F_T \leftrightarrow c = k$; a premio si $c > k$, y al descuento si $c < k$.

Teorema III (efecto convergencia): si la rentabilidad exigida no varía, la prima, $\theta_t = p_t^m - F_T$, converge a cero a una tasa creciente al acercarse el vencimiento: $\lim_{t\to T} p_t^m = F_T$. El bono a premio sigue una senda descendente, el bono al descuento una ascendente y el bono a la par se mantiene.



Convergencia al nominal (*pull to par*): los precios a premio y al descuento convergen a F_T en el vencimiento.

Teorema IV (efecto cupón): a igual vencimiento y rentabilidad, cuanto mayor es el cupón, menor es la variación porcentual del precio ante un cambio del rendimiento, porque pesa menos el principal. El cupón protege así al tenedor frente a los cambios de precio, y el cupón cero es el más sensible.

1.4. Conclusiones

El precio teórico descuenta cupones y nominal a la rentabilidad exigida y, frente al de mercado, decide la compra o la venta; el bono se coloca cerca de la par, varía en sentido inverso a la rentabilidad y converge al nominal. La rentabilidad al vencimiento resume todo el bono en una tasa, bajo tres supuestos restrictivos, y los cuatro teoremas ordenan las relaciones entre precio, rentabilidad, cupón y tiempo. La curva plana que supone abre paso a la estructura temporal de los tipos de interés.

2. Estructura temporal de los tipos de interés

La relación entre rentabilidad y plazo, que el supuesto de curva plana ignora, es la estructura temporal de los tipos de interés: su concepto, sus formas y movimientos y las teorías que la explican.

2.1. Concepto

Definición: la **estructura temporal de los tipos de interés** (ETTI), curva de rentabilidad o curva cupón cero, relaciona la rentabilidad de los préstamos sin riesgo con su plazo hasta el vencimiento. Se sigue con atención porque contiene las expectativas del mercado sobre tipos oficiales, inflación, crecimiento y política económica.

Tipos al contado y a plazo: el tipo al contado (*spot*) es la rentabilidad de un préstamo cupón cero que empieza hoy, y el tipo a plazo implícito (*forward*), la de un préstamo entre dos fechas futuras que se fija hoy. Por ausencia de arbitraje:

$$[1+i_s(0,t)]^t = [1+i_s(0,t-1)]^{t-1} \cdot [1+i_f(0,t-1,t)]$$

- Invertir t años al contado rinde lo mismo que invertir $t-1$ años y fijar hoy el tipo del último. En sentido estricto, la ETTI es la curva de los tipos al contado, y la curva a la par da el cupón con el que un bono de cada plazo cotizaría a la par.

Precio sin arbitraje: un bono con cupón es una cartera de bonos cupón cero, y cada flujo se descuenta al tipo al contado de su plazo:

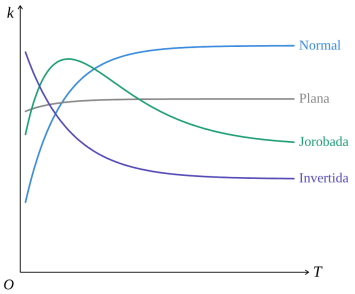
$$p_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{[1+i_s(0,t)]^t} + \frac{F_T}{[1+i_s(0,T)]^T}$$

- Cualquier otro precio permitiría arbitrar segregando el bono en *strips* o reconstituyéndolo. La TIR es una especie de media de los tipos al contado, de modo que, si la curva no es plana, dos bonos del mismo vencimiento y distinto cupón tienen distinta TIR.

Construcción: se elabora con bonos soberanos de máxima calidad crediticia, cuyas rentabilidades sirven de referencia a los demás tipos de la economía. Lo ideal sería deuda cupón cero para todos los plazos, que, conservada hasta su amortización, rinde exactamente el tipo al contado de su plazo, pero solo los instrumentos monetarios, como las letras del Tesoro, se emiten sin cupón, y los *strips* son menos líquidos. Por eso la curva se construye limpiando los cupones con técnicas como el *bootstrapping*. Se parte del tipo más corto y se despeja, plazo a plazo, el tipo al contado del precio de cada bono, interpolando los plazos sin referencia. Así, si el tipo al contado a un año es el 3 % y un bono a dos años con cupón de 5 y nominal 100 cotiza a 102, el primer cupón vale unos 4,85, de modo que $105/[1+i_s(0,2)]^2 = 97{,}15$ e $i_s(0,2) \approx 3{,}96\,\%$. El tipo a plazo del segundo año es del 4,94 %, y la TIR del bono, del 3,94 %, queda entre los dos tipos al contado.

2.2. Formas y movimientos

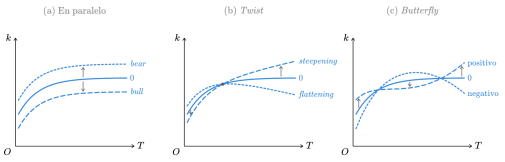
Formas: la curva puede ser normal, creciente por la prima de liquidez que exigen los acreedores a más plazo; jorobada, caso especial que puede darse en una desaceleración; plana, en transición hacia la inversión, o invertida, caso anómalo considerado predictor de recesión. En EE. UU. se invirtió unos días en 1998, tras el impago ruso, sin recesión. La inversión de 2006 y comienzos de 2007 anticipó la recesión de 2007-2009, y tras el estallido de la crisis *subprime* los bonos soberanos superaron con creces a la bolsa. En 2019, tras las subidas de tipos de 2015 a 2018, y de nuevo a comienzos de 2020, la curva se invirtió antes de la recesión de la COVID-19. Entre julio de 2022 y septiembre de 2024 registró la inversión más larga, de nuevo sin recesión, lo que ha matizado su valor predictivo.



Formas de la ETTI: normal, plana, jorobada e invertida.

Movimientos: se clasifican en tres tipos.

- *Paralelos*: traslaciones uniformes de la curva, alcistas (*bull*) si caen los tipos y suben los precios, y bajistas (*bear*) en caso contrario.
- De pendiente (*twist*): la curva se empina (*steepening*) o se aplana (*flattening*). La Operation Twist de la Reserva Federal (2011-2012) buscó aplanarla sustituyendo valores cortos por largos, una expansión sin ampliar el balance para abaratar los tipos largos.
- De curvatura (*butterfly*): positivos si los tipos corto y largo suben respecto a los medios, y negativos en caso contrario.



Movimientos de la ETTI.

2.3. Teorías explicativas

2.3.1. Expectativas puras (Fisher, 1896)

Idea: la pendiente de la ETTI se debe a las expectativas sobre los tipos de interés a corto plazo.

Razonamiento: los inversores son neutrales al riesgo y eligen solo por la rentabilidad esperada, de modo que los bonos de distintos plazos son sustitutivos perfectos. Invertir a largo debe rendir lo mismo que encadenar inversiones a corto, y el tipo largo es la media de los cortos esperados. Una curva creciente indica que se esperan subidas de los tipos cortos: los inversores rehúyen hoy los bonos largos, cuyo precio cae y cuya rentabilidad sube; una plana que se mantendrán y una decreciente que bajarán. Los rendimientos hasta el vencimiento coinciden con los de una estrategia de reinversiones sucesivas, y los tipos a plazo son predictores insesgados de los futuros tipos al contado:

$$\mathbb{E}_t[i_s(T, T+1)] = i_f(t, T, T+1)$$

Valoración: ofrece un marco claro basado en expectativas, pero ignora el riesgo de subidas de tipos y, si se esperasen bajadas con la misma frecuencia que subidas, la curva sería decreciente tan a menudo como creciente, lo que no casa con la evidencia.

2.3.2. Prima de liquidez (Hicks, 1939b)

Idea: los cambios de pendiente se deben a las expectativas, pero existe preferencia por la liquidez. Los agentes, aversos al riesgo, demandan dinero por precaución y prefieren prestar a corto, de modo que el mercado debe ofrecer una **prima de liquidez** creciente con el plazo. Aunque se esperen tipos cortos constantes, la curva es creciente.

Razonamiento: los tipos a plazo son predictores sesgados al alza, y los bonos de distintos plazos, sustitutivos imperfectos:

$$i_f(t, T, T+1) = \mathbb{E}_t[i_s(T, T+1)] + \rho_L(t, T, T+1)$$

– Kessel (1965) lo completó: los bonos cortos se prefieren por ser buenos sustitutivos del dinero.

Valoración: es una formulación menos radical que la de expectativas puras, porque no exige neutralidad al riesgo, y explica el predominio de las curvas crecientes. Pero una curva invertida exige bajadas esperadas lo bastante intensas para compensar una prima que la teoría no cuantifica.

2.3.3. Segmentación del mercado (Culbertson, 1957)

Idea: hay mercados separados para cada vencimiento, porque las preferencias son heterogéneas y marcadas y restricciones institucionales, legales o sectoriales impiden a los inversores moverse entre plazos. Cada tramo fija su tipo por su oferta y su demanda, y los tipos a plazo tienen poco contenido informativo.

Ejemplo: en 2006-2007, en EE. UU., las ventas de bonos cortos de los bancos y las subidas del tipo oficial elevaron la rentabilidad a corto, mientras las compras de bonos largos de inversores extranjeros y fondos la reducían a largo, y la curva se invirtió.

Valoración: explica cualquier forma de la curva, incluida la invertida, pero no que los tipos de los distintos plazos tiendan a moverse juntos.

2.3.4. Hábitat preferido (Modigliani y Sutch, 1966)

Idea: es una variante de las teorías de liquidez y de segmentación. Los inversores prefieren un tramo de la curva, pero salen de él si reciben una prima que compense su aversión. La curva es creciente si el hábitat preferido es el corto y puede invertirse si es el largo.

Valoración: engloba como casos particulares la prima de liquidez, cuando se prefiere el corto, y la segmentación, cuando no se sale nunca del hábitat. Pero la prima no es observable y la teoría es difícil de contrastar.

En suma, la ETTI descompone por plazos la rentabilidad que la TIR resume en una sola tasa. Las teorías difieren en la sustituibilidad que atribuyen a los bonos de distintos plazos, perfecta para las expectativas puras, imperfecta para la prima de liquidez, nula en la segmentación y condicionada a una prima en el hábitat preferido. Las cuatro son complementarias, y las expectativas, combinadas con la prima de liquidez y con cierta demanda de bonos largos por su convexidad, explican bien la ETTI. Las compras de bonos de los bancos centrales permiten contrastarlas. Frente a lo que predicen las expectativas puras, las de la Reserva Federal redujeron sobre todo la prima por plazo, y no los tipos cortos esperados, y un modelo de hábitat preferido en el que arbitrajistas aversos al riesgo enlazan los segmentos explica que la oferta de deuda de cada plazo afecte a su rentabilidad.

3. Riesgos, duración y convexidad

Falta el riesgo, elemento fundamental para el inversor en bonos, y las medidas de la sensibilidad del precio a la rentabilidad.

3.1. Riesgos de los activos financieros

Clasificación: el riesgo **sistemático** no se elimina diversificando y afecta a todos los activos, mientras que el **específico** depende de cada activo y se reduce con la diversificación.

3.1.1. Riesgo sistemático

Tipo de interés y reinversión: el riesgo de tipo de interés o de mercado aparece si los tipos suben y solo afecta a quien vende antes del vencimiento; el de reinversión, si bajan y reducen el rendimiento de los cupones reinvertidos. Operan en sentido opuesto, porque, si los tipos suben, el tenedor reinvierte los flujos en mejores condiciones, aunque el precio del bono cae y venderlo antes del vencimiento arroja una pérdida, y se compensan en un horizonte igual a la duración, base de la inmunización.

Otros: el riesgo de suceso, como catástrofes o cambios regulatorios; el de tipo de cambio; el de inflación, que evitan los bonos indizados, y el de liquidez, la posibilidad de no encontrar contrapartida en el secundario. Es menor en los soberanos, cuyo emisor de referencia tiene un programa de emisiones estable y voluminoso, que en las titulizaciones y los corporativos, poco estandarizados.

3.1.2. Riesgo específico

Tipos: el riesgo país, que reúne el riesgo soberano, la probabilidad de insolvencia de un Estado, el administrativo, por restricciones a la actividad y a la movilidad de factores, y el político, como la expropiación; el riesgo de crédito o impago, que incluye la rebaja de calificación y la ampliación del diferencial, y el riesgo de llamada, que los tipos bajen y el emisor amortice el bono. La mayoría se traduce en una subida de la rentabilidad exigida.

3.1.3. Riesgo de crédito: Merton (1974)

Calificación: las agencias resumen la solvencia en una escala de AAA a D. De BBB- hacia arriba, Baa3 en la escala de Moody's, los bonos son de grado de inversión, y por debajo, de alto rendimiento.

Diferencial de crédito: es la prima $\rho = r_B - r_f$ frente a un bono sin riesgo del mismo plazo. Compensa la pérdida esperada, la probabilidad de impago por la pérdida en caso de impago; una prima por riesgo, porque los impagos se concentran en las recesiones, y la liquidez y la fiscalidad.

Modelo de Merton: aplica a la deuda de las empresas la valoración de opciones de Black y Scholes (1973) y funda los modelos estructurales del riesgo de crédito. Supone que el activo, A_t, sigue un proceso log-normal con volatilidad constante, σ_A, que la empresa, con responsabilidad limitada, se financia con un bono cupón cero de nominal F_T y vencimiento T y que no hay fricciones, con un tipo sin riesgo, r_f, constante y en capitalización continua. En T, los acreedores cobran F_T si $A_T \geq F_T$ y se quedan con la empresa si no, y los accionistas reciben el resto. El capital es, por tanto, una opción de compra europea sobre el activo con precio de ejercicio igual a la deuda:

$$E_T = \max(A_T - F_T, 0) \qquad p_T = \min(A_T, F_T)$$
$$E_0 = A_0 \cdot N(d_1) - F_T e^{-r_f T} \cdot N(d_2)$$

– $N(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar, con $d_1 = [\ln(A_0/F_T) + (r_f + \sigma_A^2/2)T]/(\sigma_A\sqrt{T})$ y $d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}$. La deuda vale $p_0 = A_0 - E_0$, un bono sin riesgo menos una *put* sobre el activo que los acreedores venden a los accionistas (paridad *put-call*).
– La probabilidad de impago neutral al riesgo es $N(-d_2)$, y el diferencial, $\rho = -\ln(p_0/F_T)/T - r_f$, crece con el apalancamiento y la volatilidad del activo, las dos únicas variables de las que depende en cada plazo.
– Con el rendimiento esperado del activo en lugar de r_f, d_2 es la distancia al impago, las desviaciones típicas que separan el activo del umbral de impago.

Valoración: estima la probabilidad de impago de una empresa cotizada y sostiene el modelo KMV y la fórmula IRB de Basilea II. Pero supone el impago solo al vencimiento, que Black y Cox (1976) adelantan al cruce de un umbral, da diferenciales casi nulos a corto plazo, porque, sin saltos en el activo, una empresa solvente no quiebra de inmediato, usa variables no observables, el valor del activo y su volatilidad, que deben inferirse de la cotización, y subestima los diferenciales del grado de inversión. La pérdida esperada explica una fracción sorprendentemente pequeña del diferencial (**enigma del diferencial de crédito**). Aun sumándole su prima por riesgo, el impago explica poco en el grado de inversión, menos a plazos cortos, y mucho más en el alto rendimiento (Huang y Huang, 2012). Los modelos de forma reducida (Jarrow y Turnbull, 1995) tratan el impago como un suceso aleatorio.

3.2. Duración de Macaulay (1938)

Definición: la **duración** es el plazo medio ponderado de los flujos del bono, con pesos iguales al valor actual de cada flujo sobre el precio:

$$D = \frac{1}{p_0} \cdot \sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{Q_t}{(1+k)^t}$$

- Es el horizonte en el que el riesgo de precio y el de reinversión se compensan en primera aproximación, ante un desplazamiento paralelo de una curva plana, y mide el riesgo del bono en años, como el centro de gravedad de sus flujos. No debe confundirse con el vencimiento, el plazo del último pago, que ignora los pagos previos. La duración es menor que el vencimiento en un bono con cupón e igual en un cupón cero.
- Q_t son los flujos del bono, el cupón en cada periodo y el cupón más el nominal al vencimiento.

Interpretación: la duración es mayor cuanto más largo es el vencimiento, salvo en bonos con fuerte descuento y plazos muy largos, que se acercan a la de la perpetuidad, $(1+k)/k$, y cuanto menores son el cupón, la rentabilidad y la frecuencia de pago, porque gana peso el flujo final.

Valoración: frente al vencimiento, indica con más exactitud el plazo medio para recobrar lo invertido, pero se expresa en años y no dice directamente cuánto varía el precio, y como medida de riesgo solo vale ante desplazamientos paralelos de una curva plana.

3.3. Duración modificada

Idea: para evaluar el riesgo hace falta saber cuánto se altera el precio, en porcentaje o en unidades monetarias, cuando cambia la rentabilidad.

Definición: la **duración modificada** es la semielasticidad del precio respecto a la rentabilidad, cambiada de signo, es decir, el precio cae en torno a un D_{mod} % por cada 100 puntos básicos que sube la rentabilidad:

$$D_{\text{mod}} = \frac{D}{1+k/n} = -\frac{1}{p_t} \cdot \frac{\partial p_t}{\partial k}$$

- En unidades monetarias es $D_{\text{mod}} \cdot p_t \cdot \Delta k$, con Δk de 100 puntos básicos. Dividida entre 100 da el valor del punto básico, que iguala riesgos en las coberturas.
- En los bonos con opción se usa la duración efectiva, que revalora el bono, opción incluida, con los tipos desplazados Δk a la baja y al alza, $D_{\text{ef}} = [p_t(k-\Delta k) - p_t(k+\Delta k)]/[2 \cdot p_t(k) \cdot \Delta k]$. Con esos precios se calcula también la convexidad efectiva, negativa en los bonos amortizables con tipos bajos.

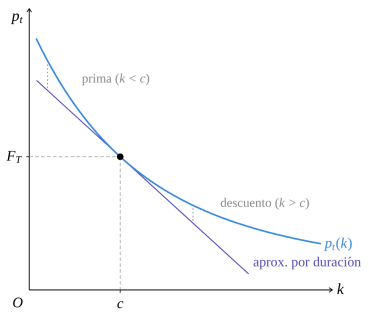
Valoración: traduce el riesgo a términos porcentuales o monetarios, pero solo es fiable ante movimientos de hasta unos 50 puntos básicos, porque aproxima linealmente una relación convexa. Así, un cupón cero a diez años, de nominal 100 y rentabilidad del 4 %, cuesta 67,56 y tiene $D_{\text{mod}} = 10/1{,}04 \approx 9{,}62$. Si la rentabilidad sube 100 puntos básicos, la duración anticipa una caída del precio del 9,62 %, y la exacta, hasta 61,39, es del 9,13 %. La diferencia se debe a la convexidad.

3.4. Convexidad

Definición: la **convexidad** mide la relación no lineal entre precio y rentabilidad, cuánto se aparta de una recta su curvatura. Frente a la duración, de primer orden, es una medida de segundo orden que corrige el error de predicción de aquella:

$$\frac{\Delta p_t}{p_t} \approx -D_{\text{mod}} \cdot \Delta k + \frac{1}{2} \cdot \text{CV} \cdot (\Delta k)^2$$

- Con $\text{CV} = (1/p_t)\,\partial^2 p_t/\partial k^2$, siempre positiva en los bonos sin opción, la aproximación lineal se corrige siempre al alza.
- Gráficamente, la aproximación por duración es la tangente a la curva precio-rentabilidad en el punto en que el bono cotiza a la par, y la distancia vertical entre ambas, a premio y al descuento, es el error que corrige la convexidad.



Convexidad: la duración sobreestima las caídas y subestima las subidas del precio.

Interpretación: es más valiosa en mercados volátiles, porque, a igual duración modificada, el bono más convexo baja menos si la rentabilidad sube y sube más si baja. La lógica es la de las opciones, cuyo valor crece con la volatilidad del subyacente, y en un bono conviene que esa asimetría favorezca al tenedor. Es mayor cuanto menor es la rentabilidad, porque la asimetría de la curva se aprovecha más a rentabilidades bajas, cuanto menor es el cupón a vencimiento dado, porque la duración es mayor, y cuanto mayor es el cupón a duración modificada dada, porque los flujos están más dispersos. Los dos efectos del cupón no se contradicen, porque uno se mide a vencimiento constante y el otro a duración modificada constante.

Valoración: corrige el error de la duración ante variaciones grandes de la rentabilidad y permite comparar bonos de igual duración modificada por la asimetría de su precio. Pero, como ella, supone desplazamientos paralelos de una curva plana y sigue siendo una aproximación, ahora de segundo orden, y en los bonos con opción exige calcular la convexidad efectiva con un modelo que valore la opción.

3.5. Inmunización

Idea: el actuario Frank Redington (1952) llamó **inmunización** a invertir el activo de una aseguradora de vida para que su excedente no varíe ante un cambio general de los tipos. Las condiciones de Redington son valores actuales iguales, duraciones iguales y mayor convexidad del activo. Con la aproximación de duración y convexidad, un desplazamiento Δk de una curva plana altera el excedente, $S = V_a - V_p$, en

$$\begin{aligned}\Delta S \approx & -(D^a_{\text{mod}} V_a - D^p_{\text{mod}} V_p) \cdot \Delta k \\ & + \tfrac{1}{2} \cdot (\text{CV}^a V_a - \text{CV}^p V_p) \cdot (\Delta k)^2\end{aligned}$$

- V_a y V_p son los valores actuales del activo y del pasivo. Las condiciones de Redington anulan el término de primer orden y hacen positivo el de segundo, de modo que, si activo y pasivo reaccionan igual ante un cambio pequeño de los tipos, el excedente no varía, y si el activo es más convexo, solo puede aumentar.

Extensiones: son dos.

- *Horizonte de inversión (Fisher y Weil, 1971)*: con un único pago comprometido, basta igualar la duración de la cartera al horizonte, aunque la curva no sea plana, si los flujos se descuentan a sus tipos al contado y la curva se desplaza en paralelo.
- *Bancos y aseguradoras*: aplican la inmunización y el casamiento de flujos en su gestión de balance. La prueba de valores atípicos de la EBA (2022) señala a los bancos cuyo valor económico del capital caería más de un 15 % de su capital de nivel 1 ante perturbaciones estándar de los tipos, y Solvencia II permite descontar a un tipo más alto los compromisos de vida cubiertos con bonos que replican sus flujos, el ajuste por casamiento.

Valoración: protege compromisos de aseguradoras y fondos de pensiones con bonos convencionales, pero exige reajustes periódicos, porque la duración varía con los tipos y disminuye más despacio que el plazo restante, y solo protege ante desplazamientos paralelos y pequeños. Ante cambios de pendiente se usan duraciones parciales (*key rate durations*).