Lecciones de economía general e internacional

Lecciones de economía, vol. 1 · Microeconomía

Arturo Lorenzo

Edición web 1.0 · noviembre de 2026

Tabla de contenidos

Nota **10**

A8. Teoría de la demanda del consumidor **11**
Introducción . . . 11
1. Fundamentos de la teoría neoclásica de la demanda del consumidor . . . 13
1.1. El conjunto de elección y la ordenación de las preferencias . . . 13
1.2. La función de utilidad y las curvas de indiferencia . . . 14
1.3. El conjunto asequible: la restricción presupuestaria . . . 19
1.4. La decisión de consumo y la demanda marshalliana . . . 21
1.5. Conclusiones . . . 25
2. Análisis de estática comparativa . . . 26
2.1. Cambios en la renta . . . 26
2.2. Cambios en los precios . . . 29
2.3. La curva de demanda . . . 33
2.4. Conclusiones . . . 36
3. Extensiones . . . 38
3.1. Agregación y restricciones de los sistemas de demanda . . . 38
3.2. Teoría de la preferencia revelada . . . 40
3.3. Teorías basadas en restricciones tecnológicas . . . 43
3.4. Teoría de los precios hedónicos (Court, 1939; Griliches, 1961; Rosen, 1974) . . . 46
3.5. Conclusiones . . . 48
Conclusiones . . . 49
Anexos . . . 50
A.1. Tipos de preferencias y forma de las curvas de indiferencia . . . 50
A.2. El consumidor con dotaciones iniciales . . . 54
A.3. Extensiones desarrolladas en otros temas . . . 56
A.4. Ejemplos resueltos . . . 57

A9. Dualidad y aplicaciones **58**
Introducción . . . 58
1. Fundamentos del análisis dual: el problema primal . . . 60
1.1. El problema primal: maximización de la utilidad . . . 60
1.2. Función de demanda del problema primal: función de demanda marshalliana 61
1.3. Función de valor óptimo del problema primal: función indirecta de utilidad . 62
1.4. Conclusiones . . . 62
2. Análisis de dualidad . . . 64
2.1. El problema dual: minimización del gasto . . . 64
2.2. Función de demanda del problema dual: función de demanda hicksiana . . . 65
2.3. Función de valor óptimo del problema dual: función de gasto . . . 66
2.4. Comparativa: relaciones de dualidad y pendientes . . . 68
2.5. Conclusiones . . . 70
3. Extensiones y aplicaciones . . . 72
3.1. Implicaciones teóricas: ecuación de Slutsky e integrabilidad . . . 72
3.2. Sistemas de demanda utilizados en estudios empíricos . . . 75

3.3. Análisis normativo: medidas de cambio de bienestar . . . 78
3.4. Conclusiones . . . 84
Conclusiones . . . 85
Anexos . . . 86
A.1. Medidas del bienestar en el plano de bienes y en el plano cantidad-precio . . . 86
A.2. Índices de Laspeyres y de Paasche en el plano de bienes . . . 89
A.3. Ejemplos resueltos . . . 91

A10. Elección en riesgo e incertidumbre **93**
Introducción . . . 93
1. Elección en situaciones de riesgo: teoría de la utilidad esperada . . . 95
1.1. El conjunto de elección y la ordenación de las preferencias . . . 95
1.2. La función de utilidad esperada y los perfiles de riesgo . . . 96
1.3. La decisión del individuo: aplicaciones financieras . . . 101
1.4. Extensiones: dominancia estocástica y preferencia por estados . . . 108
1.5. Conclusiones . . . 109
2. Desarrollos posteriores: críticas y teoría de la perspectiva . . . 110
2.1. Críticas teóricas: forma de la función de utilidad . . . 110
2.2. Críticas empíricas: violaciones de los axiomas . . . 112
2.3. Teoría de la perspectiva (Kahneman y Tversky, 1979) . . . 113
2.4. Conclusiones . . . 117
3. Elección en incertidumbre . . . 118
3.1. Teoría de la probabilidad subjetiva y teoría de la perspectiva acumulativa . . . 118
3.2. Análisis bayesiano: árboles de decisión y teorema de Bayes (1763) . . . 120
3.3. Criterios de decisión en incertidumbre . . . 121
Conclusiones . . . 122

A11. Teoría de la producción **123**
Introducción . . . 123
1. Fundamentos de la teoría de la producción . . . 125
1.1. El conjunto de elección: planes de producción y tecnología . . . 125
1.2. La función de producción . . . 128
1.3. Las curvas isocuantas . . . 131
1.4. De la tecnología a la decisión . . . 135
1.5. Conclusiones . . . 135
2. Leyes de producción . . . 136
2.1. Corto plazo: ley de proporciones variables . . . 136
2.2. Largo plazo: leyes de rendimientos a escala . . . 138
2.3. Muy largo plazo: progreso tecnológico . . . 141
2.4. Conclusiones . . . 144
3. Extensiones . . . 145
3.1. Producción conjunta: el caso multiproducto . . . 145
3.2. Análisis empírico: fronteras de eficiencia . . . 149
Conclusiones . . . 152
Anexo. Función de producción neoclásica de buen comportamiento . . . 153

A12. Teoría de costes **155**
Introducción . . . 155
1. Fundamentos de la teoría de costes . . . 157
1.1. El conjunto de elección y las premisas de la teoría de costes . . . 157
1.2. La función objetivo: el gasto en factores y las rectas isocoste . . . 158
1.3. La restricción: la tecnología y la eficiencia técnica . . . 159

1.4. La decisión de la empresa: dualidad y función de costes . . . 160
1.5. Conclusiones . . . 167
2. Teoría neoclásica de los costes . . . 168
2.1. Corto plazo: ley de proporciones variables aplicada al coste . . . 168
2.2. Largo plazo: dimensión óptima de planta . . . 171
2.3. Muy largo plazo: progreso técnico y coste . . . 174
2.4. Extensiones neoclásicas . . . 174
2.5. Conclusiones . . . 176
3. Desarrollos posteriores . . . 177
3.1. Críticas a la curva de costes neoclásica . . . 177
3.2. Coste, empresa y estructura de mercado . . . 180
3.3. Coste y tiempo . . . 184
3.4. Aplicaciones empíricas . . . 188
Conclusiones . . . 191
Anexo. Ejemplos resueltos, función translog y factor fijo . . . 192
A.1. Ejemplos resueltos . . . 192
A.2. La función de costes translog . . . 193
A.3. Factor fijo y condición de tangencia . . . 193

A13. Economía de la información **195**
Introducción . . . 195
1. Teoría de la agencia: el problema del principal-agente (Ross, 1973; Jensen y Meckling, 1976) . . . 197
1.1. Concepto: elementos del problema principal-agente . . . 197
1.2. Modelo base: información imperfecta y simétrica . . . 197
1.3. Aplicaciones . . . 203
1.4. Conclusiones . . . 204
2. Riesgo moral (Arrow, 1963; Pauly, 1968) . . . 205
2.1. Concepto: riesgo moral . . . 205
2.2. Modelo: esfuerzo no observable . . . 205
2.3. Aplicaciones . . . 209
2.4. Soluciones al problema del riesgo moral . . . 209
2.5. Conclusiones . . . 210
3. Selección adversa (Akerlof, 1970) . . . 211
3.1. Concepto: selección adversa . . . 211
3.2. Modelo de Akerlof (1970): el mercado de “limones” . . . 211
3.3. Aplicaciones . . . 214
3.4. Soluciones al problema de selección adversa . . . 215
3.5. Conclusiones . . . 219
Conclusiones . . . 220
Anexo. Modelo de autoselección con un único principal . . . 221

A14. Teoría de juegos **224**
Introducción . . . 224
1. Fundamentos de la teoría de juegos: elementos, estrategias y conceptos de solución . . . 226
1.1. Definición y elementos básicos de un juego . . . 226
1.2. Tipos de juego y sus representaciones . . . 226
1.3. Comportamiento de los jugadores: la estrategia . . . 228
1.4. Soluciones a los juegos . . . 229
1.5. Conclusiones . . . 234
2. Aplicaciones . . . 235
2.1. Juegos estáticos con información completa . . . 235

2.2. Juegos con incertidumbre . . . 238
2.3. Juegos dinámicos . . . 241
2.4. Juegos cooperativos y negociación . . . 246
2.5. Conclusiones . . . 250
3. Teoría de las subastas . . . 251
3.1. Concepto (Vickrey, 1961; Myerson, 1981; Milgrom y Wilson, Nobel 2020) . . . 251
3.2. Formatos básicos de subasta . . . 251
3.3. Pujas de equilibrio: la subasta de primer precio y la subasta de Vickrey (1961) 251
3.4. Teorema de equivalencia de ingresos (Vickrey, 1961; Riley y Samuelson, 1981; Myerson, 1981) . . . 253
3.5. Aplicaciones . . . 254
Conclusiones . . . 256

A15. Teoría de la organización industrial **257**
Introducción . . . 257
1. Teoría de la empresa . . . 259
1.1. Existencia y objetivos . . . 259
1.2. Límites . . . 263
1.3. Organización . . . 266
1.4. Comportamiento . . . 269
1.5. Conclusiones . . . 273
2. Teoría del mercado . . . 274
2.1. Antecedentes . . . 274
2.2. Estructura . . . 275
2.3. Regulación . . . 280
2.4. Conclusiones . . . 284
3. Nueva teoría de la organización industrial empírica . . . 285
3.1. Delimitación del mercado relevante . . . 285
3.2. Medición del poder de mercado . . . 285
3.3. Evidencia empírica . . . 287
Conclusiones . . . 289

A16. Competencia perfecta **290**
Introducción . . . 290
1. Fundamentos del modelo marshalliano . . . 292
1.1. Supuestos . . . 292
1.2. Demanda de mercado . . . 293
1.3. Oferta: la decisión de la empresa . . . 294
1.4. Conclusiones . . . 299
2. Análisis temporal del modelo . . . 300
2.1. Muy corto plazo: subastas . . . 300
2.2. Corto plazo: posibilidad de pérdidas . . . 301
2.3. Largo plazo: condición de beneficio nulo . . . 305
2.4. Dinámicas de ajuste . . . 307
2.5. Propiedades del equilibrio competitivo . . . 312
2.6. Conclusiones . . . 316
3. Extensiones . . . 317
3.1. Tecnología: ausencia de rendimientos mixtos . . . 317
3.2. Precios de factores variables: externalidades pecuniarias . . . 320
3.3. Mecanismo de precios . . . 322
3.4. Otras extensiones . . . 325
Conclusiones . . . 327

Anexo. Ejemplos resueltos . . . 328

A17. Monopolio **329**
Introducción . . . 329
1. El monopolio de oferta . . . 331
1.1. Concepto, causas y supuestos . . . 331
1.2. Demanda de mercado . . . 332
1.3. Oferta de mercado: la decisión del monopolista . . . 332
1.4. Análisis del equilibrio . . . 337
1.5. Conclusiones . . . 341
2. Principales monopolios . . . 342
2.1. Monopolios discriminadores de precios . . . 342
2.2. Monopolio natural . . . 348
2.3. Una mención a la regulación de los monopolios naturales . . . 353
2.4. Conclusiones . . . 356
3. Otros monopolios . . . 358
3.1. Monopsonio . . . 358
3.2. Monopolio bilateral . . . 359
3.3. Monopolios multidimensionales . . . 360
Conclusiones . . . 363
Anexo. Comparación de regímenes de precios . . . 364

A18. Competencia monopolística **365**
Introducción . . . 365
1. Fundamentos de las teorías sobre la competencia monopolística . . . 367
1.1. Concepto de diferenciación . . . 367
1.2. Enfoque espacial: modelo de la ciudad lineal (Hotelling, 1929) . . . 367
1.3. Enfoque no espacial: modelo de Chamberlin (1933) . . . 374
1.4. Publicidad: la condición de Dorfman-Steiner (1954) . . . 377
1.5. Conclusiones . . . 378
2. Diferenciación horizontal: modelos de segunda generación . . . 379
2.1. Modelos neohotellianos . . . 379
2.2. Modelos neochamberlinianos: Dixit y Stiglitz (1977) . . . 383
2.3. Conclusiones . . . 387
3. Otros desarrollos . . . 388
3.1. Diferenciación vertical: competencia en calidad (Shaked y Sutton, 1982; 1983) 388
3.2. Diferenciación informacional . . . 391
Conclusiones . . . 394

A19. Oligopolio **395**
Introducción . . . 395
1. Modelos de oligopolio basados en juegos no cooperativos . . . 397
1.1. Competencia simultánea en cantidades (Cournot, 1838) . . . 397
1.2. Competencia secuencial en cantidades (Stackelberg, 1934) . . . 401
1.3. Competencia simultánea en precios (Bertrand, 1883) . . . 405
1.4. Competencia secuencial en precios (Gal-Or, 1985) . . . 408
1.5. Conclusiones . . . 411
2. Modelos de oligopolio basados en la colusión: soluciones cooperativas . . . 412
2.1. Alianzas no sostenibles . . . 412
2.2. Alianzas sostenibles: juegos repetidos en horizonte infinito (Friedman, 1971) 416
2.3. Conclusiones . . . 418

3. Oligopolio con número variable de empresas: entrada y disuasión 419
3.1. Barreras a la entrada 419
3.2. Disuasión estratégica de la entrada 420
3.3. Mercados impugnables 427
3.4. Conclusiones 427
Conclusiones 428
Anexo. Modelos clásicos de oligopolio anteriores a la teoría de juegos 429
A.1. Demanda quebrada (Sweezy, 1939) 429
A.2. Liderazgo en precios y empresa dominante (Forchheimer, 1908) 430

A20. Regulación **432**
Introducción 432
1. Poder de mercado 434
1.1. Concepto y estructuras de competencia imperfecta 434
1.2. Causas del poder de mercado 435
1.3. Causas de la regulación 436
1.4. Conclusiones 437
2. Regulación óptima 438
2.1. Regulación con información perfecta 438
2.2. Regulación con información asimétrica 445
2.3. Regulación con varias empresas 447
2.4. Regulación de los mercados de varias caras (Rochet y Tirole, 2003; Armstrong, 2006) 449
2.5. Conclusiones 451
3. Mercado relevante y aplicaciones prácticas 452
3.1. Definición del mercado relevante 452
3.2. Medición empírica del poder de mercado 453
3.3. La liberalización de las industrias de red 454
3.4. Evaluación y límites de la regulación 459
Conclusiones 461

A21. Equilibrio general **462**
Introducción 462
1. El modelo walrasiano de competencia perfecta 464
1.1. Supuestos 464
1.2. Modelo descentralizado con producción 464
1.3. Conclusiones 475
2. Análisis del equilibrio 476
2.1. Análisis positivo 476
2.2. Análisis normativo: optimalidad de Pareto 482
2.3. Conclusiones 485
3. Extensiones y aplicaciones 486
3.1. Procesos de ajuste distintos al subastador 486
3.2. Modelo de equilibrio general con dinero 488
3.3. Modelo de equilibrio general en incertidumbre (Arrow-Debreu) 491
3.4. Aplicaciones 492
Conclusiones 493
Anexo. Ejemplos resueltos 494

A22. Economía del bienestar (I) **496**
Introducción 496

1. El óptimo económico: los criterios de Pareto y las condiciones de eficiencia 498
1.1. Los criterios de Pareto (1906) 498
1.2. Condiciones de eficiencia paretiana en una economía competitiva 2x2x2x2 . . 502
1.3. Conclusiones 509
2. Los teoremas fundamentales del bienestar 510
2.1. Primer teorema (1TFEB) 510
2.2. Segundo teorema (2TFEB) 511
2.3. Incumplimiento de los teoremas: la medición de las pérdidas de bienestar . . 514
2.4. Los límites de los teoremas: criterios de compensación y función de bienestar social 515
2.5. Conclusiones 519
3. La teoría del *second best* 520
3.1. El teorema del *second best* 520
3.2. Implicaciones para la política económica 523
3.3. Desarrollos posteriores 523
3.4. Conclusiones 525
Conclusiones 526

A23. Economía del bienestar (II) 527
Introducción 527
1. Condiciones de eficiencia u optimalidad paretiana en una economía simple competitiva 529
1.1. Supuestos y condiciones de eficiencia en una economía 2x2x2x2 529
1.2. Teoremas fundamentales del bienestar 530
1.3. Conclusiones 531
2. Teoría de los fallos de mercado 532
2.1. Bienes públicos 532
2.2. Externalidades 541
2.3. Otros fallos de mercado: poder de mercado e información imperfecta 550
2.4. Conclusiones 551
3. Teoría de la elección pública: el sector público no neutral y los fallos del sector público 552
3.1. Origen y concepto 552
3.2. Limitaciones al diseño y la implementación 552
3.3. Efectos de las imperfecciones del sector público 555
3.4. Soluciones a los fallos del sector público 556
3.5. Conclusiones 557
Conclusiones 558

A24. Economía del bienestar (III) 559
Introducción 559
1. La función de bienestar social 561
1.1. Criterio original (Bergson, 1938; Samuelson, 1947) 561
1.2. Formas de la FBS: criterios ético-lógicos 563
1.3. Más allá del bienestarismo 569
1.4. La medición de la desigualdad y la pobreza 570
1.5. Conclusiones 574
2. Teoría de la elección colectiva: el teorema de Arrow 575
2.1. La regla de elección social 575
2.2. Axiomas de Arrow 575
2.3. Teorema de la imposibilidad (Arrow, 1951b) 576
2.4. El rechazo de la metodología de Arrow (Little, 1952; Bergson, 1954) 578
2.5. Conclusiones 578

3. Desarrollos posteriores: las salidas a la imposibilidad 579
3.1. El levantamiento de los axiomas de Arrow (I): decisividad y universalidad . . 579
3.2. El levantamiento de los axiomas de Arrow (II): independencia de alternativas irrelevantes 586
3.3. La ampliación de la base informacional (Sen, 1970a; Harsanyi, 1955; d'Aspremont y Gevers, 1977) 587
3.4. Manipulación e implementación 588
3.5. Negociación y juegos cooperativos 589
3.6. Conclusiones 591
Conclusiones 592

Nota

Este PDF es un extracto de *Lecciones de economía general e internacional* (Lecciones de economía, vol. 1), de Arturo Lorenzo, con el bloque «Microeconomía» (temas A8-A24). Se distribuye gratis bajo licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 (CC BY-NC-SA 4.0).

Versión de noviembre de 2026, generada a partir de la edición web. La edición completa y actualizada está en https://librovol1.arturolorenzo.com.

A8. Teoría de la demanda del consumidor

Teoría de la demanda del consumidor (I). Axiomas sobre las preferencias, función de utilidad y función de demanda marshalliana. La teoría de la preferencia revelada. Precios hedónicos.

Introducción

Cualquier economía moderna es muy compleja, y la ciencia económica aborda esa complejidad mediante la **construcción de modelos**, abstracciones que, al igual que un mapa, simplifican el mundo real para poder estudiarlo con rigor. En la microeconomía, uno de los pilares de esos modelos son las **teorías de la elección y de la demanda**, que se ocupan del *consumidor* y de cómo decide qué bienes comprar a la vista de sus gustos, de su renta y de los precios.

El estudio del comportamiento del consumidor arranca de dos ideas distintas[1]:

1. *Utilidad*: los bienes interesan al consumidor porque cubren sus necesidades, y esa aptitud recibe el nombre de **utilidad**. Daniel Bernoulli (1738), Jeremy Bentham (1780) y John Stuart Mill (1863) figuran entre quienes desarrollaron el concepto.

2. *Ley de la demanda*: Augustin Cournot (1838) estableció que, cuanto más caro es un bien, menor es la cantidad que se demanda de él, y con esa relación se dio el primer paso para modelizar la conducta de los consumidores.

Sin embargo, los enfoques capaces de derivar funciones de demanda a partir de la utilidad no llegan hasta la **revolución marginalista** del decenio de 1870. La teoría neoclásica que surge de ella supone agentes racionales que deciden sin incertidumbre, mercados de bienes y de factores perfectamente competitivos y precios que reflejan fielmente la escasez, y con esos supuestos desarrolla dos enfoques:

1. *Enfoque de utilidad cardinal*: debido a Jevons (1871), Menger (1871), Walras (1874) y Marshall (1890), trata la utilidad como una magnitud medible, aditivamente separable y, en Marshall, cuasilineal con respecto al dinero. Su principal limitación es la dificultad de medir objetivamente la utilidad.

2. *Enfoque de utilidad ordinal*: lo inicia Vilfredo Pareto (1906) y lo desarrollan John Hicks y Roy Allen (1934). Al consumidor solo se le pide que ordene sus preferencias, y de esa ordenación se derivan primero la utilidad y luego la demanda. Sobre este enfoque descansa la teoría actual del consumidor.

[1] El origen histórico de estos conceptos (la utilidad marginal y la paradoja del agua y los diamantes; la ley de la demanda de Cournot, *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, 1838; la revolución marginalista de Jevons, Menger y Walras y su sistematización por Marshall; el mapa de curvas de indiferencia del *Manual* de Pareto, 1906; y la teoría ordinal de Hicks y Allen, *A Reconsideration of the Theory of Value*, 1934, completada por Allen en *Mathematical Analysis for Economists*, 1938, donde desarrolla la elasticidad de sustitución, y por Hicks en *Value and Capital*, 1939b) se desarrolla en el tema A03.

La elección del consumidor es el problema de optimización con restricciones más sencillo de la microeconomía, y su esquema reaparece en la teoría de la empresa (temas A11 y A12), en la oferta de trabajo (tema A25) y en las decisiones intertemporales (tema A29). De la demanda individual se obtiene, por agregación, la demanda de mercado, una de las dos piezas del equilibrio parcial.

El tema estudia la teoría neoclásica de la demanda del consumidor en tres partes:

- *Fundamentos*: se enuncian los axiomas que caracterizan a un consumidor racional, se representan sus preferencias con una utilidad ordinal y se determina la cesta que la maximiza con la renta disponible.

- *Estática comparativa*: se analiza cómo afectan a su comportamiento los cambios en la renta y en los precios.

- *Otros desarrollos*: se presentan las extensiones que complementan la teoría ordinal, es decir, las condiciones de agregación; la preferencia revelada (de enfoque inductivo); las teorías de Lancaster (demanda de características) y de Becker (producción de los hogares), y la teoría de los precios hedónicos.

1. Fundamentos de la teoría neoclásica de la demanda del consumidor

La teoría neoclásica trata al consumidor como un agente racional que persigue la mayor utilidad que le permite su renta disponible, una variable exógena. El marco es estático y de certidumbre, y la utilidad nace de comprar bienes de consumo final[2].

1.1. El conjunto de elección y la ordenación de las preferencias

El punto de partida es el conjunto de cestas entre las que elige el consumidor y los axiomas que ordenan sus preferencias sobre él.

1.1.1. El conjunto de elección, sus propiedades y las relaciones binarias

Definición: el consumidor ordena los elementos de un *conjunto de elección*, CE, no vacío, cerrado y acotado inferiormente[3]:

$$\text{CE} = \{\mathbf{x}^j \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j), \quad x_i^j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

Cada elemento del conjunto constituye una *cesta* de bienes físicamente consumibles (un vector de bienes no negativos y divisibles). Entre ellas se establecen *relaciones binarias*[4], que permiten ordenar las cestas según las preferencias y son tres: la relación de indiferencia, $\sim$, de estricta preferencia, $\succ$, y de preferencia débil, $\succsim$, o de preferencia-indiferencia, que se lee "al menos tan preferido como"[5].

Las relaciones binarias no bastan, sin embargo, para una teoría de la elección con significado económico (p. ej. podrían ser circulares o incompletas). Por ello, hay que exigirles axiomas, de orden y de regularidad, que acoten las ordenaciones admitidas y permitan representarlas con una función de utilidad.

1.1.2. Axiomas de orden: la racionalidad de las preferencias

Completitud o comparabilidad: dadas dos cestas del conjunto de elección, el consumidor siempre puede expresar su preferencia entre ellas. Formalmente, para dos cestas cualesquiera: $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$ o $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ (o ambas, en cuyo caso $\mathbf{x}^0 \sim \mathbf{x}^1$).

Reflexividad: cada cesta es comparable consigo misma, $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^0$.

Transitividad: existe una coherencia lógica entre las comparativas. Si una cesta es al menos tan buena como otra, y esta como una tercera, la primera es al menos tan buena como la tercera. Formalmente, para tres cestas cualesquiera: $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \rightarrow \mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^2$.

Estos tres axiomas garantizan dos cuestiones relevantes:

[2] Se excluyen así los bienes intermedios. Los bienes duraderos exigirían además un marco intertemporal.

[3] El CE es no vacío si existe al menos una cesta, acotado inferiormente si las cantidades no pueden ser negativas y cerrado si incluye su frontera (los casos límite).

[4] En teoría del orden, una relación binaria es una relación entre dos elementos de un conjunto. Si es reflexiva y transitiva, es un preorden, que es además un orden si es antisimétrica y una equivalencia si es simétrica.

[5] Realmente, de esta se derivan las otras dos relaciones: si $\mathbf{x}' \succsim \mathbf{x}''$ y $\mathbf{x}'' \succsim \mathbf{x}'$, entonces $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}''$, y si $\mathbf{x}' \succsim \mathbf{x}''$ pero no $\mathbf{x}'' \succsim \mathbf{x}'$, entonces $\mathbf{x}' \succ \mathbf{x}''$.

- *Matemáticamente*: que la ordenación de las cestas es un *preorden completo débil*. Todas las cestas pueden compararse y ponerse en orden, con empates posibles (indiferencia), pero eso no basta para asociar a cada una un número real (las preferencias lexicográficas son el contraejemplo clásico).

- *Económicamente*: que las preferencias del consumidor garantizan una *elección racional*.

1.1.3. Axiomas de regularidad

Continuidad: dada una cesta $\mathbf{x}^0$, pequeños cambios en las cantidades de los bienes no provocan saltos abruptos en las preferencias. Formalmente, los conjuntos de contorno superior $\{\mathbf{x} \in \text{CE} : \mathbf{x} \succsim \mathbf{x}^0\}$ e inferior $\{\mathbf{x} \in \text{CE} : \mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}\}$ son cerrados.

No saturación local: en cualquier entorno de una cesta $\mathbf{x}^0$, por pequeño que sea, siempre existe otra cesta $\mathbf{x}^1$ estrictamente preferida.

La no saturación local implica que no existen "zonas de saciedad" y que el óptimo del consumidor se sitúa en la frontera del conjunto asequible (se agota toda la renta).

Monotonía: si una cesta $\mathbf{x}^1$ tiene al menos tanto de todos los bienes como $\mathbf{x}^0$ y estrictamente más de al menos uno, entonces $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0$. Es decir, "más es mejor".

La monotonía es más fuerte que la no saturación local, porque exige utilidades marginales positivas y excluye así los males.

Convexidad: dadas dos cestas indiferentes $\mathbf{x}^0 \sim \mathbf{x}^1$, cualquier combinación convexa $\mathbf{x}^\theta = \theta\mathbf{x}^0 + (1-\theta)\mathbf{x}^1$, con $\theta \in (0,1)$, es al menos tan preferida: $\mathbf{x}^\theta \succsim \mathbf{x}^0$.

Este axioma refleja una preferencia por la variedad, es decir, el consumidor prefiere cestas equilibradas a cestas extremas. La convexidad garantiza que la función de utilidad es cuasicóncava. Con convexidad estricta ($\mathbf{x}^\theta \succ \mathbf{x}^0$ para $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}^1$), la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava, la relación marginal de sustitución es estrictamente decreciente y la cesta óptima es única.

Diferenciabilidad: la función de utilidad es diferenciable (al menos dos veces).

La diferenciabilidad excluye puntos angulares en las curvas de indiferencia y permite el uso del cálculo diferencial (condiciones de Kuhn-Tucker) para resolver el problema de optimización.

1.2. La función de utilidad y las curvas de indiferencia

Las preferencias que cumplen los axiomas se representan mediante una función de utilidad, cuyos cortes a utilidad constante son las curvas de indiferencia.

1.2.1. La función de utilidad y sus propiedades

Definición: una *función de utilidad* es una aplicación $u : \text{CE} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1 \leftrightarrow u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^1)$. Es decir, asigna a cada cesta un índice de utilidad que preserva el orden de preferencias.

Los axiomas de orden junto con el de continuidad garantizan la existencia de una función de utilidad continua que representa las preferencias (teorema de representación de Debreu). Los restantes axiomas de regularidad (no saturación local, monotonía, convexidad y diferenciabilidad) dotan a dicha función de propiedades analíticas convenientes.

Propiedades:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en las cantidades de los bienes (por el axioma de continuidad) y dos veces diferenciable (por el axioma de diferenciabilidad).

2. *Transformaciones*: la función de utilidad es puramente ordinal, es decir, solo importa el orden que establece entre cestas, no la magnitud de los valores asignados. Por tanto, cualquier transformación $v = f(u)$, con $f' > 0$, representa las mismas preferencias.

3. *Inclinación*: es estrictamente creciente en la cantidad de cada bien, pues, por el axioma de monotonía, las utilidades marginales son positivas ($\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv u_i' > 0$).

4. *Forma*: por el axioma de convexidad estricta de las preferencias, la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava[6], es decir, sus conjuntos de contorno superior $\{\mathbf{x} \in \text{CE} : u(\mathbf{x}) \geq k\}$ son estrictamente convexos.

5. *Otras propiedades*:

- *Agotamiento de la renta*: por la no saturación local (implícita en la monotonía), la cesta óptima está sobre la recta de balance y la demanda cumple la ley de Walras.

- *Observabilidad*: no es observable, pues solo lo son las elecciones. Por ello, la preferencia revelada recupera las preferencias a partir de ellas (apartado 3.2).

1.2.2. Las curvas de indiferencia y sus propiedades

Definición: una *curva de indiferencia* es el lugar geométrico de todas las cestas de bienes que proporcionan un mismo nivel de utilidad[7].

Propiedades: se derivan de los axiomas:

1. *De los axiomas de orden*: la transitividad, y no la monotonía, garantiza que las curvas de indiferencia no se cortan. La demostración clásica procede por contradicción. Si dos curvas se cortasen en un punto, existirían cestas en curvas distintas que, por transitividad, deberían ser indiferentes entre sí, contradiciendo que pertenecen a niveles de utilidad diferentes.

2. *Del axioma de monotonía*: las curvas de indiferencia tienen pendiente negativa en el plano (x_1, x_2), pues obtener más de un bien exige renunciar a parte del otro para mantener la utilidad constante, y las más alejadas del origen llevan asociado un mayor índice de utilidad.

3. *Del axioma de convexidad*: las curvas de indiferencia son convexas respecto al origen, con un grado de convexidad que depende de la sustituibilidad entre bienes. Solo lo son en sentido débil si tienen tramos rectos, como las lineales (sustitutivos perfectos) o las angulares (complementarios perfectos, tipo Leontief), y en sentido estricto si no los tienen (p. ej. Cobb-Douglas), casos que el apartado 1.2.4 clasifica por su elasticidad de sustitución y que el Anexo, apartado A.1, representa junto con los males y las preferencias no convexas.

Con diferenciabilidad son, además, suaves. Su pendiente y su curvatura se miden con la relación marginal de sustitución y la elasticidad de sustitución.

Gráficamente, en el plano de bienes, (x_1, x_2) (figura A8.1), las curvas de indiferencia son los cortes horizontales (a utilidad constante) de la función de utilidad, una superficie en $\mathbb{R}^3$. Las

[6] Esto no implica que las utilidades marginales sean decrecientes, a diferencia de las funciones cóncavas, que sí implican utilidades marginales no crecientes.

[7] Analíticamente, una curva de indiferencia puede verse como una función en la que x_2 depende de x_1 para un nivel de utilidad constante: $u = f(x_1, x_2) \to x_2 = g(x_1, u)$.

curvas u_0 y u_1 son decrecientes y convexas, y la utilidad aumenta al alejarse del origen, de modo que u_1 representa una utilidad mayor que u_0.

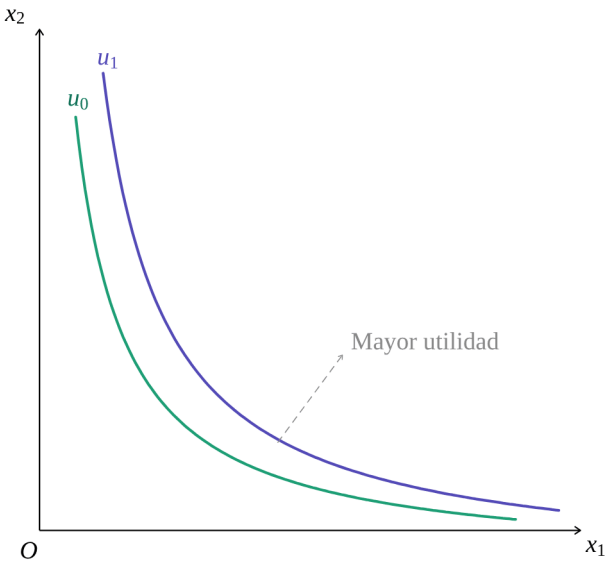


Figura A8.1: Curvas de indiferencia. Cada curva reúne las cestas entre las que el consumidor es indiferente. La utilidad aumenta al alejarse del origen.

1.2.3. Pendiente de las curvas de indiferencia: la relación marginal de sustitución

La **relación marginal de sustitución** (RMS) del bien j por el bien i mide la tasa subjetiva a la que un consumidor está dispuesto a renunciar a unidades del bien j a cambio de una unidad adicional del bien i, manteniendo constantes la utilidad y el consumo de los demás bienes. La RMS es, por tanto, el precio relativo subjetivo de los dos bienes para un consumidor dado.

Formalmente, se obtiene de la diferencial total de la función de utilidad igualada a cero cuando solo varían x_i y x_j:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = 0 \;\Rightarrow\; \text{RMS}_{ji} = -\left.\frac{dx_j}{dx_i}\right|_{du=0} = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} \geq 0$$

La expresión RMS_{ji} se lee "la relación marginal de sustitución del bien j por el bien i", es decir, la valoración subjetiva del bien i en términos del bien j. Al depender únicamente del cociente de utilidades marginales, la RMS es independiente de cómo se mida la utilidad[8].

En lo que sigue, para poder representarla en el plano, se consideran dos bienes, 1 y 2, de modo que la relación relevante es la RMS_{21}. Gráficamente, en el plano de bienes, (x_1, x_2) (figura A8.2), la RMS es el valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia en cada punto, es decir, de su tangente.

Bajo convexidad estricta, la RMS es decreciente a lo largo de la curva de indiferencia. Conforme el consumidor acumula más del bien 1, está dispuesto a renunciar a cada vez menos unidades del

[8] Esto contrasta con el decrecimiento de la utilidad marginal, que sí depende de cómo se mida la utilidad. Por eso la utilidad marginal decreciente no garantiza por sí sola una RMS decreciente, mientras que esta, al ser una propiedad de la forma de las curvas de indiferencia, es invariante.

bien 2 por una unidad adicional del bien 1. En la figura, la tangente a la curva de indiferencia u_0 es más inclinada en la cesta A que en la B ($\text{RMS}_{21}^A > \text{RMS}_{21}^B$).

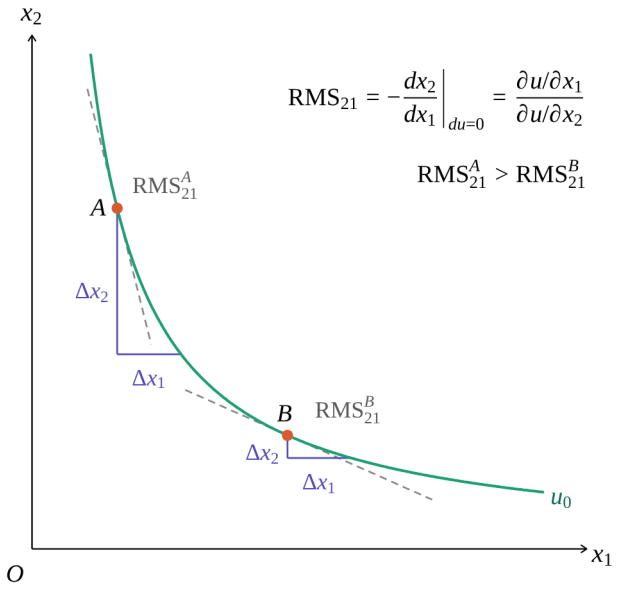


Figura A8.2: Pendiente de la curva de indiferencia. La RMS_{21} es el valor absoluto de la pendiente de la tangente a u_0 en cada cesta. Es mayor en A que en B, por lo que, a cambio de un mismo Δx_1, el consumidor está dispuesto a renunciar en A a más unidades del bien 2 (Δx_2) que en B (RMS decreciente).

Si, por el contrario, no se cumpliera el axioma de convexidad y las preferencias fueran "todo o nada" (preferencia por cestas extremas), las curvas de indiferencia serían cóncavas respecto al origen y la RMS, creciente. El óptimo sería entonces una solución de esquina (consumo exclusivo de un solo bien).

1.2.4. Forma de las curvas de indiferencia: la elasticidad de sustitución

Mientras que la RMS indica a qué tasa se intercambian los bienes en cada punto, la **elasticidad de sustitución** (σ) mide la facilidad de ese intercambio. Para ello, recoge cuánto responden las proporciones consumidas a los cambios en la RMS a lo largo de una curva de indiferencia[9].

Formalmente, la elasticidad de sustitución entre los bienes i y j en el sentido de Hicks (1932), con el consumo de los demás bienes constante, es:

$$\sigma_{ji} \equiv \frac{d(x_j/x_i)}{d\,\text{RMS}_{ji}} \cdot \frac{\text{RMS}_{ji}}{x_j/x_i} = \frac{\partial \ln(x_j/x_i)}{\partial \ln \text{RMS}_{ji}} \geq 0$$

Gráficamente, con dos bienes, en el plano de bienes, (x_1, x_2) (figura A8.3), al desplazarse a lo largo de la curva de indiferencia u_0 de la cesta A a la B, disminuyen tanto la proporción x_2/x_1 como la RMS_{21}. La proporción es la pendiente del radio-vector que une cada cesta con el origen, y la RMS, el valor absoluto de la pendiente de la tangente. La elasticidad de sustitución es el cociente entre la variación porcentual de la primera y la de la segunda.

[9] Esencialmente, un incremento porcentual se corresponde con la derivada de un logaritmo natural: $\Delta\% = d\ln$.

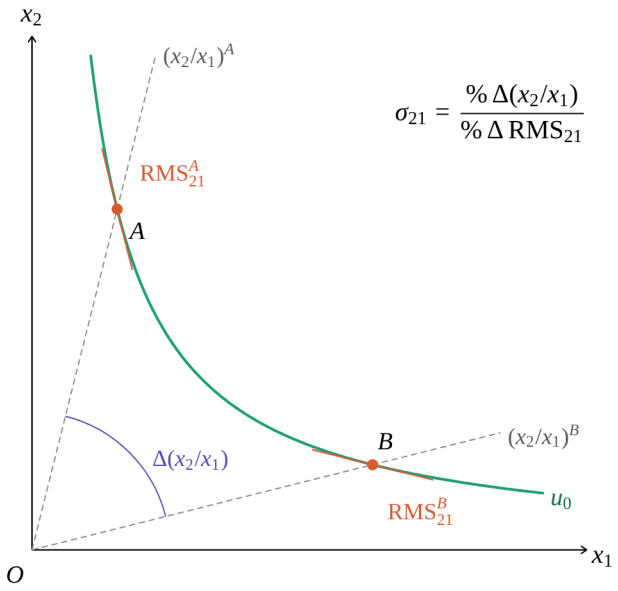


Figura A8.3: Elasticidad de sustitución. Al pasar de la cesta A a la B a lo largo de u_0, disminuyen la proporción x_2/x_1 (pendiente del radio-vector) y la RMS_{21} (pendiente de la tangente, en valor absoluto). La elasticidad σ_{21} es el cociente entre sus variaciones porcentuales.

Según su elasticidad de sustitución, los bienes se clasifican en:

1. *Sustitutivos perfectos* ($\sigma_{ji} = \infty$): la RMS es constante, las curvas de indiferencia son lineales y las proporciones de consumo son extremadamente sensibles a cambios en los precios relativos, como ocurre con la gasolina de distintas marcas con idénticas características.

2. *Sustitutivos imperfectos* ($\sigma_{ji} \in (0, \infty)$): caso intermedio. Por ejemplo, la función Cobb-Douglas presenta una elasticidad de sustitución unitaria ($\sigma_{ji} = 1$), independientemente de su grado de homogeneidad[10][11].

3. *Complementarios perfectos* ($\sigma_{ji} = 0$): no existe posibilidad de sustitución, las curvas de indiferencia son angulares (tipo Leontief) y las proporciones de consumo son fijas.

Gráficamente, la elasticidad de sustitución refleja la curvatura de la curva de indiferencia respecto al origen. Cuanto mayor es σ, más aplanada es la curva y, cuanto menor, más curvada[12]. La

[10] Para una función Cobb-Douglas $u = x_1^\alpha x_2^\beta$, la RMS es $\mathrm{RMS}_{21} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$. Tomando logaritmos, $\ln(x_2/x_1) = \ln \mathrm{RMS}_{21} - \ln(\alpha/\beta)$, de modo que $\sigma_{21} = \frac{\partial \ln(x_2/x_1)}{\partial \ln \mathrm{RMS}_{21}} = 1$.

[11] Con todo, la Cobb-Douglas no es la única forma funcional con $\sigma_{21} = 1$, ya que cualquier transformación monótona positiva de una Cobb-Douglas (p. ej. $\alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$) representa las mismas preferencias y tiene también $\sigma_{21} = 1$, pues la elasticidad de sustitución solo depende de la forma de las curvas de indiferencia. En cambio, con preferencias extremistas (curvas cóncavas) la RMS aumenta mientras x_2/x_1 disminuye, por lo que σ_{21} sería negativa.

[12] El procedimiento general para calcular la elasticidad de sustitución, válido también para la elasticidad de sustitución técnica de una función de producción, tiene tres pasos. Primero se obtiene la RMS (o la relación marginal de sustitución técnica, RMST) y se despeja la ratio de bienes (o factores) en función de ella, p. ej. $K/L = \mathrm{RMST}_{KL}^2/16$. Después se toman logaritmos a ambos lados, de modo que el logaritmo de la ratio quede como función lineal del logaritmo de la RMS, p. ej. $\ln(K/L) = 2 \ln \mathrm{RMST}_{KL} - \ln 16$. Por último, se deriva el logaritmo de la ratio respecto al logaritmo de la RMS, que en el ejemplo da $\sigma = \partial \ln(K/L)/\partial \ln \mathrm{RMST}_{KL} = 2$.

elasticidad no tiene por qué ser constante a lo largo de una curva de indiferencia[13].

Otras nociones de elasticidad de sustitución: cuando la cesta contiene más de dos bienes, la elasticidad de Hicks deja fijo el consumo de los demás. En cambio, la *elasticidad de sustitución de Allen* (1938), $\sigma_{ij}^{\text{Allen}}$, permite que se ajuste y se calcula con la matriz hessiana orlada de la función de utilidad. Conecta, además, las preferencias con la demanda observable mediante la ecuación de Slutsky en elasticidades (apartado 2.2.2).

1.3. El conjunto asequible: la restricción presupuestaria

Las preferencias dicen qué cestas desea el consumidor y la restricción presupuestaria, cuáles puede adquirir con su renta a los precios vigentes.

1.3.1. Del conjunto de elección al conjunto asequible

El conjunto de elección, CE, solo delimita qué cestas son físicamente consumibles. Cuáles puede pagar el consumidor depende además de dos variables, que introducen una restricción económica:

1. *Precios*: un vector de precios, estrictamente positivos y conocidos por el consumidor: $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, con $p_i > 0$.

2. *Renta*: una cantidad fija de renta monetaria (contexto estático) de la que dispone: $M_0 > 0$.

Definición: con ellas se define la *restricción presupuestaria*, $\sum_i p_i x_i \leq M_0$ (con dos bienes, $p_1x_1 + p_2x_2 \leq M_0$), que convierte el problema en genuinamente económico. El *conjunto asequible*, CA, es el subconjunto del conjunto de elección formado por las cestas que el consumidor puede adquirir con su renta a los precios vigentes:

$$\text{CA} = \{\mathbf{x} \in \text{CE} : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq M_0\}$$

Propiedades: el conjunto asequible es no vacío, cerrado, acotado (los precios positivos y la renta finita limitan el consumo de cada bien) y convexo (intersección de un semiespacio con el ortante no negativo $\mathbb{R}^n_+$).

1.3.2. La recta de balance

Por el axioma de monotonía, el consumidor debe agotar toda su renta. De este modo, la restricción presupuestaria, satisfecha con igualdad, es la **recta de balance**.

Recta de balance en términos nominales: vendrá dada por $\sum_i p_i x_i = M_0$ y, con dos bienes, por $p_1x_1 + p_2x_2 = M_0$.

Gráficamente, en el plano de bienes, (x_1, x_2) (figura A8.4), constituye la frontera superior del conjunto asequible, corta a los ejes en M_0/p_1 y M_0/p_2 y tiene pendiente negativa:

$$x_2 = \frac{M_0}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 \quad \rightarrow \quad \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{M_0} = -\frac{p_1}{p_2}$$

[13] En el trabajo empírico se suelen usar funciones con elasticidad de sustitución constante (CES), por su tratabilidad.

Esa pendiente, $-p_1/p_2$, recoge el precio relativo objetivo del bien 1 expresado en unidades del bien 2, es decir, cuántas unidades del bien 2 hay que ceder en el mercado por cada unidad adicional del bien 1.

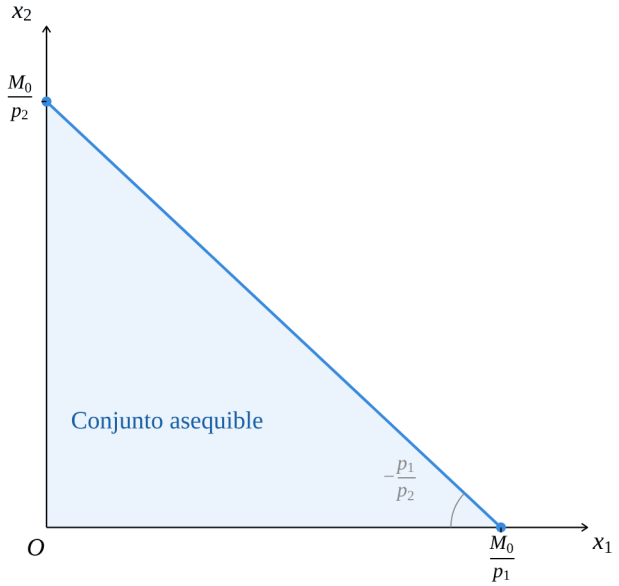


Figura A8.4: Restricción presupuestaria. La recta de balance delimita el conjunto asequible y su pendiente es el precio relativo $-p_1/p_2$.

Recta de balance en términos reales: con dos bienes y renta exógena, la recta de balance se define con dos precios y una renta nominal, pero una de estas tres variables es redundante. Por tanto, puede establecerse un precio numerario (fijando el precio de uno de los bienes como unidad de cuenta) o una renta numeraria (expresando los precios como fracción de la renta):

$$\frac{p_1}{p_2}x_1 + x_2 = \frac{M_0}{p_2}$$

$$\frac{p_1}{M_0}x_1 + \frac{p_2}{M_0}x_2 = 1$$

1.3.3. Restricción presupuestaria en presencia de un bien compuesto

Cuando un grupo de bienes cuyos precios se mueven proporcionalmente puede tratarse como un único bien (bien compuesto), la restricción presupuestaria se simplifica:

$$p_i x_i + G \leq M_0$$

donde $G \geq 0$ representa el gasto en todos los bienes distintos de x_i. Esta formulación permite reducir un problema de n bienes a un análisis bidimensional entre el bien de interés, x_i, y el gasto en el resto de bienes.

1.4. La decisión de consumo y la demanda marshalliana

La decisión de consumo combina las preferencias con la restricción presupuestaria, y de esa decisión se obtienen la función de demanda marshalliana y la función indirecta de utilidad.

1.4.1. La decisión de consumo: el equilibrio del consumidor

Planteamiento: el consumidor busca la cesta que maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria y a la no negatividad de los bienes:

$$\max_{\mathbf{x}} \; u(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq M_0 \\ x_i \geq 0 \; \forall i \end{cases}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es la cesta de consumo, p_i el precio del bien i y M_0 la renta monetaria.

El lagrangiano es[14]:

$$\mathcal{L} = u(\mathbf{x}) + \lambda \left(M_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right)$$

El multiplicador de Lagrange, λ, es el precio sombra de la renta, es decir, la valoración subjetiva que el consumidor hace de una unidad adicional de renta en el óptimo:

$$\lambda = \frac{\partial u^*}{\partial M} \equiv u'_M$$

CPO: las condiciones de Kuhn-Tucker establecen, para cada bien i, tres condiciones sobre la cantidad, (1) a (3), y tres sobre el multiplicador, (4) a (6):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i \leq 0 \tag{1}$$

$$x_i \geq 0 \tag{2}$$

$$x_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i \right) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = M_0 - \sum p_i x_i \geq 0 \tag{4}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{5}$$

$$\lambda \left(M_0 - \sum p_i x_i \right) = 0 \tag{6}$$

[14] El multiplicador puede entrar con signo positivo o negativo según cómo se escriba la restricción. $u(\mathbf{x}) + \lambda(M_0 - \sum p_i x_i)$ y $u(\mathbf{x}) - \lambda(\sum p_i x_i - M_0)$ son la misma expresión y dan el mismo $\lambda \geq 0$. En cambio, con $+\lambda(\sum p_i x_i - M_0)$ el multiplicador sale no positivo y es su valor absoluto el que mide el precio sombra. Este libro sigue a Chiang y Wainwright (2005, cap. 12), con signo positivo y la restricción escrita como recursos menos empleos, de modo que λ es no negativo y se lee directamente como precio sombra.

La condición (1) exige que la utilidad marginal por euro gastado en un bien no supere la utilidad marginal de la renta, λ, y la (2), que la cantidad consumida no sea negativa. La (3), llamada de *holgura complementaria*[15], obliga a que al menos una de las dos se cumpla con igualdad, así que, si el bien se consume ($x_i > 0$), su utilidad marginal por euro iguala a λ, y si queda por debajo, el bien no se consume y la solución es de esquina.

Para la renta, las condiciones (4) a (6) aplican el mismo esquema, con la restricción presupuestaria en lugar de (1) y el multiplicador en lugar de la cantidad, y exigen que el consumidor gaste toda su renta o que λ sea nulo. Con preferencias monótonas, un euro más siempre aumenta la utilidad, por lo que la renta se agota, $\lambda > 0$ y (4) se cumple con igualdad.

En el resto del libro, salvo aviso expreso, se supone una **solución interior** ($x_i^* > 0$ en todos los bienes) con la restricción agotada. En ese caso (1) y (4) se cumplen con igualdad, las otras cuatro condiciones se satisfacen solas y basta el método de Lagrange con la restricción en forma de igualdad. En cambio, cuando alguna restricción puede no agotarse, el tema lo advierte y resuelve el programa con Kuhn-Tucker (temas A13, A15, A37 y B02).

CSO: las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias y, además, suficientes si la función de utilidad es cuasicóncava (preferencias convexas), pues la restricción es lineal, y el máximo es único si la cuasiconcavidad es estricta (curvas de indiferencia estrictamente convexas).

Solución:

1. *Solución interior* ($x_i^* > 0$ para todo i): en este caso, las CPO se cumplen con igualdad para todos los bienes. De aquí se derivan dos interpretaciones equivalentes del equilibrio.

▪ *Interpretación en términos de utilidad*: en el óptimo, el consumidor iguala la tasa subjetiva de intercambio entre bienes (RMS) con la tasa objetiva de intercambio de mercado (precio relativo), para cada par de bienes i, j:

$$\text{RMS}_{ji} \equiv \frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

De no cumplirse esta igualdad, el consumidor podría reasignar su presupuesto entre bienes y alcanzar una utilidad mayor.

▪ *Interpretación en términos de gasto (segunda ley de Gossen)*: en el óptimo, el consumidor distribuye su renta de modo que la utilidad marginal por unidad monetaria gastada es igual para todos los bienes, y dicha ratio coincide con la utilidad marginal de la renta:

$$\frac{\partial u/\partial x_i}{p_i} = \lambda = \frac{\partial u^*}{\partial M} \quad \forall i$$

2. *Solución de esquina* ($x_i^* = 0$ para algún i): en este caso, la CPO del bien no consumido se cumple como desigualdad débil (en general, estricta), $\partial u/\partial x_i \leq \lambda p_i$. Con dos bienes, si $x_2^* = 0$, la valoración subjetiva del bien 1 es al menos igual a su precio relativo y el consumidor dedica toda su renta a x_1. Si $x_1^* = 0$, ocurre lo contrario:

$$x_2^* = 0 : \ \text{RMS}_{21} \geq \frac{p_1}{p_2} \qquad x_1^* = 0 : \ \text{RMS}_{21} \leq \frac{p_1}{p_2}$$

Desarrollo gráfico: el equilibrio del consumidor se representa en el plano de bienes, (x_1, x_2) (figura A8.5):

[15] La *holgura* de una restricción de desigualdad es la distancia entre sus dos lados, $\lambda p_i - \partial u/\partial x_i$ en (1) y $M_0 - \sum p_i x_i$ en (4). La holgura complementaria exige que el producto de cada holgura por su variable asociada (x_i o λ) sea nulo, por lo que, si una restricción no se agota, su variable vale cero, y si la variable es positiva, la restricción se cumple con igualdad (Chiang y Wainwright, 2005, cap. 13).

1. *Recta de balance*: recoge las cestas que agotan la renta y su pendiente, $-p_1/p_2$, es el precio relativo cambiado de signo.

2. *Curva de indiferencia*, u^*: es la más alejada del origen que el consumidor puede alcanzar con su renta, decreciente y convexa por los axiomas de monotonía y convexidad.

3. *Equilibrio*: la solución interior es el punto 0, de tangencia entre u^* y la recta de balance, con la cesta (x_1^*, x_2^*) y $\text{RMS}_{21} = p_1/p_2$.

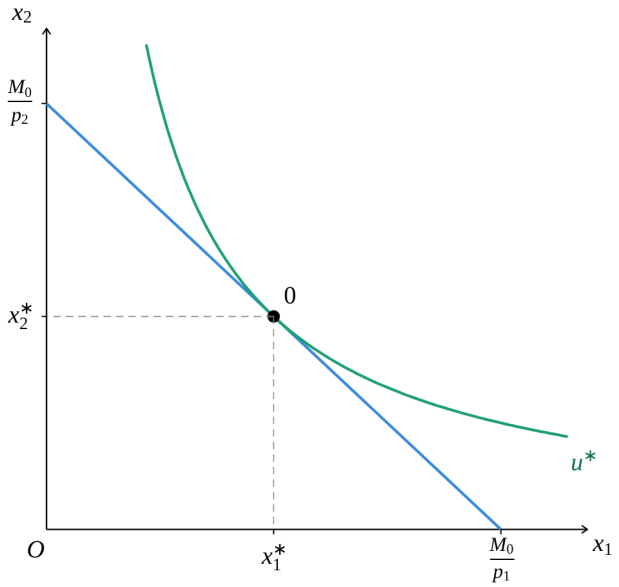


Figura A8.5: Equilibrio del consumidor. Se sitúa en la tangencia entre la curva de indiferencia más alta alcanzable y la recta de balance ($\text{RMS}_{21} = p_1/p_2$).

1.4.2. La función de demanda ordinaria o marshalliana

Definición: el teorema de la función implícita garantiza que el sistema de CPO puede resolverse, y la cantidad óptima de cada bien queda así determinada por los precios y la renta[16]. Las funciones que resultan son las demandas del consumidor.

Reciben el nombre de *funciones de demanda ordinarias, marshallianas o walrasianas*:

$$x_i^m \equiv x_i^* = d_i(\mathbf{p}, M), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

> La obtención de las demandas marshallianas para una función de utilidad Cobb-Douglas se desarrolla en el Anexo, apartado A.4.

Propiedades de las funciones de demanda marshalliana:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: son continuas en precios y renta (por el teorema del máximo) y diferenciables si u es de clase C^2 con curvas de indiferencia de curvatura estrictamente positiva (hessiano orlado no singular), lo que permite el análisis de estática comparativa.

[16] La solución existe por el teorema de Weierstrass (conjunto asequible compacto y utilidad continua).

2. *Transformaciones*: son homogéneas de grado cero en precios y renta, $d_i(k\mathbf{p}, kM) = d_i(\mathbf{p}, M)$. Un cambio equiproporcional en todos los precios y la renta no altera las cantidades demandadas, es decir, el consumidor no padece ilusión monetaria. Además, son invariantes ante transformaciones monótonas crecientes de la función de utilidad, porque la cesta óptima depende de las preferencias, no de su representación.

3. *Inclinación*: al recoger el efecto renta y el efecto sustitución, pueden tener cualquier pendiente respecto al precio propio (apartado 2.2.3). Respecto a la renta, en cambio, son crecientes para los normales y decrecientes para los inferiores.

4. *Forma*: la teoría no restringe la curvatura de la demanda de cada bien, que puede ser cóncava, lineal o convexa respecto a su precio. La restricción de segundo orden recae sobre la matriz de Slutsky, que reúne las pendientes compensadas de todas las demandas y es simétrica y semidefinida negativa (tema A09, apartado 3.1.2).

5. *Otras propiedades*:

- *Agotamiento de la renta*: por la no saturación local de las preferencias, la cesta óptima satisface $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = M$, propiedad que, en términos agregados, enlaza con la ley de Walras (1874).

- *Envolvente* (*identidad de Roy*): se obtienen de la función indirecta de utilidad, $d_i(\mathbf{p}, M) = -\dfrac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial M}$, como se demuestra en el tema A09, apartado 1.3.

- *Dualidad*: coinciden con las hicksianas (apartado 2.2.1) evaluadas en la utilidad máxima, $d_i(\mathbf{p}, M) = h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M))$ (tema A09, apartado 2.4.2).

- *Integrabilidad*: si cumplen ciertas condiciones (ley de Walras y matriz de Slutsky simétrica y semidefinida negativa), a partir de ellas pueden recuperarse las preferencias que las generan (tema A09, apartado 3.1.3).

- *Observabilidad*: las cantidades demandadas son directamente observables en los datos estadísticos, a diferencia de la utilidad.

1.4.3. La función indirecta de utilidad

Definición: el problema primal permite obtener, además, la *función indirecta de utilidad* (FIU), que recoge la utilidad máxima alcanzable para cada combinación de precios y renta:

$$v(\mathbf{p}, M) = u(\mathbf{x}^*) = u\big(d_1(\mathbf{p}, M), \dots, d_n(\mathbf{p}, M)\big)$$

> Las propiedades de la función indirecta de utilidad y la identidad de Roy se desarrollan en el tema A09, apartado 1.3, y la función de gasto, el lema de Shephard y las relaciones de dualidad, en sus apartados 2.3 y 2.4.

1.5. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría neoclásica de la demanda deriva de un conjunto reducido de axiomas sobre las preferencias una función de utilidad ordinal y, de su maximización sujeta a la restricción presupuestaria, funciones de demanda con propiedades contrastables.

Limitaciones:

- *Axiomas de regularidad* (convexidad, continuidad): son supuestos de conveniencia analítica más que descripciones del comportamiento.

- *Marco estático y con información perfecta*: las decisiones intertemporales y en riesgo requieren extensiones (temas A10 y A29).

- *Utilidad no observable*: motiva tanto el enfoque de la preferencia revelada (apartado 3.2) como el análisis dual del tema A09.

2. Análisis de estática comparativa

Identificada la función de demanda marshalliana, que da la cantidad demandada para unos parámetros dados, la estática comparativa estudia cómo responde la demanda ante cambios en la renta y en los precios[17]. El objetivo es determinar si la teoría permite identificar regularidades robustas, es decir, leyes de demanda, y construir con ellas la curva de demanda individual y, por agregación, la de mercado.

2.1. Cambios en la renta

Un cambio en la renta monetaria, manteniendo constantes los precios y las preferencias, altera la cesta óptima sin alterar la tasa de intercambio a la que el consumidor se enfrenta.

2.1.1. Curva renta-consumo y curva de Engel

Analíticamente, el efecto sobre la cantidad demandada de cada bien es la derivada parcial de la función de demanda marshalliana respecto a la renta, $\partial d_i(\mathbf{p}, M)/\partial M$, que se obtiene diferenciando el sistema de CPO y cuyo signo no está determinado por los axiomas.

Desarrollo gráfico: con dos bienes, el cambio de renta produce un desplazamiento paralelo de la recta de balance, pues su pendiente, $-p_1/p_2$, no varía. El nuevo equilibrio es la tangencia de la nueva recta con una curva de indiferencia más alejada del origen (o más próxima a él), y la relación entre la renta y cada bien se resume en dos curvas:

1. *Curva renta-consumo* (CRC) o *senda de expansión de la renta*: en el plano de bienes, (x_1, x_2) (figura A8.6), es el lugar geométrico de las cestas óptimas que se obtiene al variar la renta monetaria, manteniendo precios y preferencias constantes. En la figura, los puntos 0, 1 y 2 corresponden a las rentas M_0, M_1 y M_2. Si ambos bienes son normales, la CRC tiene pendiente positiva, mientras que, si uno de ellos es inferior, se inclina hacia el eje del bien normal. Su forma puede ser irregular y no necesariamente monotónica, salvo con preferencias homotéticas, en cuyo caso es una recta que parte del origen y el consumidor adquiere la misma proporción de cada bien para cualquier nivel de renta.

[17] Se comparan dos equilibrios sin estudiar la senda temporal por la que se pasa de uno a otro.

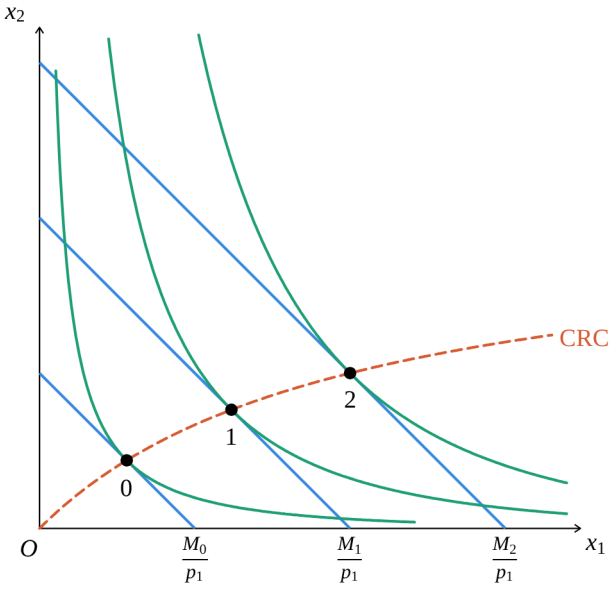


Figura A8.6: Curva renta-consumo. La curva une los equilibrios del consumidor al variar la renta con precios constantes.

2. *Curva de Engel*: proyectando una CRC sobre el plano cantidad-renta, (x_i, M) (figura A8.7, con otro bien), se obtiene la curva de Engel, $x_i^* = f_i(M)$, que muestra cómo varía la demanda de un bien con la renta, a precios constantes. Es creciente para un bien normal (y más que proporcional para un bien de lujo), decreciente para un bien inferior y una recta que parte del origen con preferencias homotéticas.

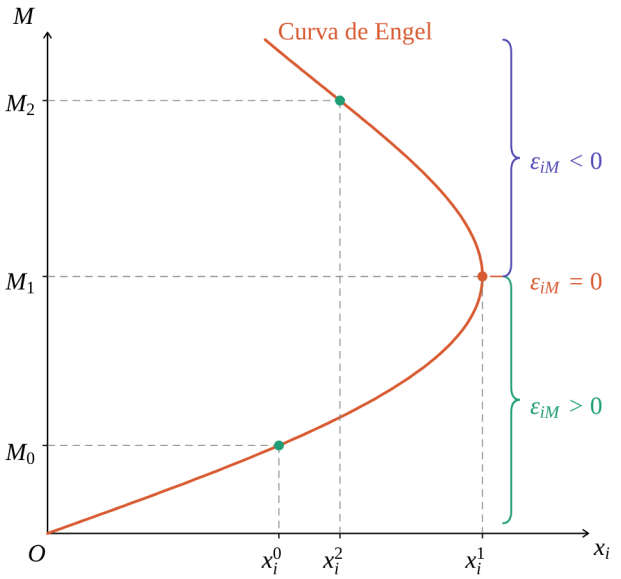


Figura A8.7: Curva de Engel. Relaciona la cantidad demandada de un bien con la renta. El bien es normal hasta M_1 e inferior a partir de ese nivel.

2.1.2. Elasticidad-renta

Los efectos de las variaciones de renta, *ceteris paribus*, se miden también con la **elasticidad-renta** de un bien:

$$\varepsilon_{iM} = \left.\frac{\Delta\%\, x_i}{\Delta\%\, M}\right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^0} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i}\right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^0}$$

La segunda igualdad es su versión infinitesimal y, gráficamente, la elasticidad de la curva de Engel en cada punto.

2.1.3. Clasificación de los bienes

Según la respuesta de la cantidad demandada a la renta, los bienes se clasifican en:

Tabla A8.1: Clasificación de los bienes según la elasticidad-renta.

Tipo de bien	Derivada / Elasticidad	Descripción
Inferior	$\frac{\partial x_i}{\partial M} < 0 \to \varepsilon_{iM} < 0$	La cantidad demandada se reduce si aumenta la renta (p. ej. marcas blancas).
Frontera	$\frac{\partial x_i}{\partial M} = 0 \to \varepsilon_{iM} = 0$	No depende de las variaciones de renta (p. ej. pasta de dientes).
Normal	$\frac{\partial x_i}{\partial M} > 0 \to \varepsilon_{iM} > 0$	La cantidad demandada aumenta si aumenta la renta.
De primera necesidad	$\varepsilon_{iM} \in (0, 1)$	Aumenta en menor proporción que la renta (p. ej. pan).
De elasticidad unitaria	$\varepsilon_{iM} = 1$	Aumenta en la misma proporción que la renta; su participación en el gasto no varía (si todos los bienes la tienen, las preferencias son homotéticas).
De lujo o superior	$\varepsilon_{iM} > 1$	Aumenta en mayor proporción que la renta.

La clasificación no es una propiedad intrínseca del bien sino de su relación con el consumidor. De hecho, un mismo bien puede ser normal para un nivel de renta e inferior para otro (p. ej. el transporte público), de modo que la elasticidad-renta varía a lo largo de la curva de Engel.

De la elasticidad-renta se derivan una regularidad empírica y una restricción teórica:

1. *Ley de Engel* (1857): la fracción de la renta dedicada a alimentos desciende conforme aumenta la renta, lo que hace de esa fracción un indicador de nivel de vida.

2. *Condición de agregación de Engel*: como el consumidor agota su renta, la media ponderada de las elasticidades-renta es la unidad (apartado 3.1.3).

En política económica, la elasticidad-renta determina la incidencia del crecimiento sobre la estructura del consumo (terciarización, caída del peso de los alimentos) y la progresividad efectiva de los impuestos indirectos. Así, gravar bienes de primera necesidad es regresivo y gravar bienes de lujo, progresivo.

2.2. Cambios en los precios

Ante un cambio en los precios hay que distinguir dos casos:

1. *Variación equiproporcional*: si todos los precios varían en la misma proporción, solo cambia el poder adquisitivo, y la homogeneidad de grado cero de la demanda hace que el análisis sea idéntico al de una variación de la renta de signo contrario.

2. *Variación de un precio relativo*: si varía el precio de uno de los bienes, manteniendo el resto y la renta constantes, se producen dos fenómenos simultáneos:

- *Cambio en los precios relativos*: altera la tasa de intercambio de mercado y, con ella, la composición de la cesta si existe sustituibilidad.

- *Cambio en el valor real de la renta monetaria*: modifica el poder adquisitivo.

2.2.1. Efecto sustitución y efecto renta: la ecuación de Slutsky

Analíticamente, el **efecto total** de una variación del precio p_j sobre la cantidad demandada del bien i es la derivada parcial de la demanda marshalliana, $\partial d_i(\mathbf{p}, M)/\partial p_j$. Para separar los dos fenómenos hay que fijar qué se entiende por *renta real constante*, y existen dos concepciones:

1. *Definición de Slutsky* (1915): la renta real es constante cuando, a los nuevos precios, basta para comprar la misma cesta que antes. Así, el poder adquisitivo se mide en cestas de bienes físicamente consumibles, y no hace falta conocer las preferencias.

2. *Definición de Hicks* (Hicks y Allen, 1934): la renta real es constante cuando, a los nuevos precios, basta para alcanzar el mismo nivel de utilidad que antes. Así, el poder adquisitivo se mide en bienestar. Su aplicación exige conocer las preferencias, pero a cambio la definición de Hicks aísla el efecto sustitución puro, un desplazamiento sobre la propia curva de indiferencia inicial, y por esa razón es la que adopta el desarrollo formal.

La definición de Slutsky es observable y la de Hicks, exacta, y ambas coinciden para cambios infinitesimales del precio. La definición de Hicks exige introducir la **función de demanda hicksiana o compensada**, $h_i(\mathbf{p}, u_0)$, que expresa la cantidad demandada del bien i que minimiza el gasto necesario para alcanzar un nivel de utilidad dado u_0. Se denomina compensada porque, ante una variación de los precios, la renta se reajusta hipotéticamente para mantener la utilidad constante.

> El problema dual de minimización del gasto, la definición formal de la demanda hicksiana y sus propiedades se desarrollan en el tema A09, apartados 2.1 y 2.2.

Ecuación de Slutsky: con la demanda hicksiana, el efecto total se descompone en un efecto sustitución y un efecto renta:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j}}_{\text{ET}} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}}_{\text{ES}} \underbrace{- \frac{\partial x_i^m}{\partial M} \cdot x_j}_{\text{ER}}$$

donde x_j, la cantidad consumida del bien cuyo precio varía, mide cuánto poder adquisitivo se pierde por cada unidad de subida de p_j. Si $i = j$ se habla de efectos *propios* y si $i \neq j$ de efectos

cruzados. Su derivación formal a partir de la dualidad se desarrolla en el tema A09, apartado 3.1.

De la ecuación se definen los dos efectos:

1. *Efecto sustitución* (ES): primer término, $\partial h_i/\partial p_j$. Es la variación de la cantidad demandada derivada del cambio en los precios relativos, manteniendo la utilidad constante, es decir, un movimiento a lo largo de la curva de indiferencia inicial. Se desglosa en:

- *ES propio* ($i = j$), $\partial h_i/\partial p_i$: es no positivo en todo caso, por la concavidad de la función de gasto en precios, y estrictamente negativo si existe alguna posibilidad de sustitución (nulo con complementarios perfectos). A igualdad de utilidad, un consumidor racional nunca aumenta la cantidad de un bien que se encarece relativamente, resultado conocido como *ley de la demanda compensada*.

- *ES cruzado* ($i \neq j$), $\partial h_i/\partial p_j$: su signo es indeterminado y define las relaciones netas entre bienes, que se estudian en el apartado 2.2.3 con su simetría y el caso de dos bienes.

2. *Efecto renta* (ER): segundo término, $-(\partial x_i/\partial M)\, x_j$. Es la variación de la cantidad demandada derivada del cambio en el poder adquisitivo de la renta monetaria, es decir, el paso de la curva de indiferencia inicial a la final. Se desglosa en:

- *ER propio* ($i = j$), $-(\partial x_i/\partial M)\, x_i$: es negativo si el bien es normal, en cuyo caso refuerza al ES, y nulo si es frontera. Si es inferior, en cambio, es positivo, por lo que lo contrarresta y puede llegar a dominarlo (bien Giffen).

- *ER cruzado* ($i \neq j$), $-(\partial x_i/\partial M)\, x_j$: la subida del precio de x_j reduce la renta real y, con ella, la demanda de x_i si este es normal, o la aumenta si es inferior. Este efecto es la fuente de la asimetría de las relaciones brutas.

Cuando la renta es endógena porque procede de la venta de una dotación inicial, aparece además un *efecto renta-dotación*, de signo contrario al ordinario, que se desarrolla en el Anexo A.2.

Gráficamente, en el plano de bienes, (x_1, x_2) (figura A8.8), una variación del precio de un solo bien cambia la pendiente de la recta de balance (precios relativos) y el conjunto asequible (renta real). La figura ilustra la descomposición, con la definición de Hicks, para una reducción del precio de x_1 con dos bienes normales, sustitutivos netos entre sí (e independientes brutos, ya que la cantidad de x_2 no varía entre 0 y 1):

1. *Situación inicial*: el equilibrio 0 es la tangencia entre la curva de indiferencia u_0 y la recta de balance (restricción presupuestaria) inicial, RP_0.

2. *Cambio de precio*: la reducción de p_1 hace pivotar la recta sobre su intersección con el eje de x_2, de RP_0 a RP_1.

3. *Efecto sustitución*: la recta auxiliar RP_c, con la nueva pendiente y tangente a u_0, da la cesta $0'$ que el consumidor elegiría si se le compensase la renta para mantener su utilidad. El paso de 0 a $0'$ es el efecto sustitución, cuya componente horizontal es el ES propio y la vertical, el ES cruzado.

4. *Efecto renta*: el paso de $0'$ al equilibrio final 1, en la curva de indiferencia superior u_1, refleja el aumento de la renta real, que, al ser ambos bienes normales, eleva la demanda de los dos.

5. *Efecto total*: el paso de 0 a 1, el único observable, es la suma de ambos, mientras que $0'$ es una construcción teórica.

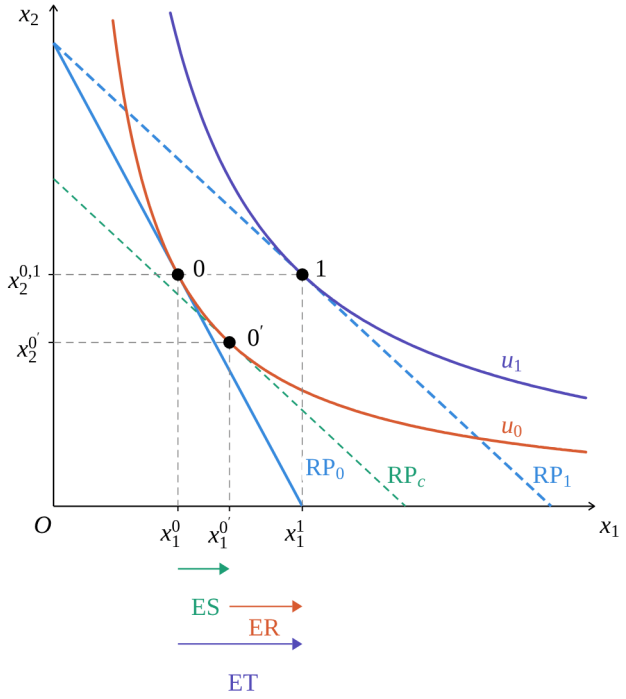


Figura A8.8: Ecuación de Slutsky. El efecto de una bajada del precio se descompone en efecto sustitución ($0 \to 0'$) y efecto renta ($0' \to 1$).

2.2.2. Elasticidad-precio

Los efectos de las variaciones de precios sobre la cantidad demandada se miden con dos tipos de elasticidad:

Elasticidad-precio propia: mide la sensibilidad de la cantidad demandada de un bien ante variaciones en su propio precio, *ceteris paribus*, y es la elasticidad de la curva de demanda precio-propio en cada punto:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i}\bigg|_{p_j,\, M}$$

Elasticidad-precio cruzada: mide la sensibilidad de la cantidad demandada de un bien ante variaciones en el precio de otro bien, *ceteris paribus*:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}\bigg|_{p_i,\, M}, \quad i \neq j$$

Las elasticidades marshallianas recogen el efecto total y las compensadas o hicksianas, ε_{ij}^c, solo el efecto sustitución. Ambas se relacionan por la ecuación de Slutsky en elasticidades, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c - s_j \varepsilon_{iM}$, donde s_j es la participación del bien j en el gasto. Como la elasticidad cruzada compensada es $\varepsilon_{ij}^c = s_j \sigma_{ij}^{\text{Allen}}$, con $\sigma_{ij}^{\text{Allen}}$ la elasticidad de sustitución de Allen (apartado 1.2.4), la ecuación puede escribirse $\varepsilon_{ij} = s_j(\sigma_{ij}^{\text{Allen}} - \varepsilon_{iM})$.

2.2.3. Clasificación de los bienes

La clasificación de los bienes según su respuesta a los precios puede hacerse con los efectos totales (relaciones **brutas**, observables) o solo con los efectos sustitución (relaciones **netas**, no observables pero simétricas).

Relaciones brutas según el efecto propio ($i = j$): la ecuación de Slutsky permite clasificar los bienes según el signo del efecto total propio, que depende de la naturaleza-renta del bien:

Tabla A8.2: Clasificación de los bienes según el efecto precio propio.

Naturaleza-renta	ES propio	ER ordinario	Efecto total propio	Clasificación
Normal ($\frac{\partial x_i}{\partial M} > 0$)	< 0	< 0	$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} < 0$	Ordinario
Frontera ($\frac{\partial x_i}{\partial M} = 0$)	< 0	$= 0$	$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} < 0$	Ordinario
Inferior, $\lvert ES \rvert > \lvert ER \rvert$	< 0	> 0	$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} < 0$	Ordinario
Inferior, $\lvert ES \rvert = \lvert ER \rvert$	< 0	> 0	$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = 0$	Rígido
Inferior, $\lvert ES \rvert < \lvert ER \rvert$	< 0	> 0	$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} > 0$	Giffen

Los bienes normales son, por tanto, siempre ordinarios. El bien Giffen, en cambio, es un bien inferior cuyo efecto renta domina al efecto sustitución, y no debe confundirse con el bien Veblen, cuya demanda aumenta con el precio por razones de consumo ostentoso (señalización de estatus) y no por la mecánica renta-sustitución. La ley de la demanda no es, así, un axioma sino un teorema condicionado, ya que la excepción de Giffen es teóricamente posible, pero empíricamente rara.

Según el valor de la elasticidad-precio propia, la demanda se clasifica en:

Tabla A8.3: Clasificación de la demanda según la elasticidad-precio propia.

Tipo de demanda	Elasticidad	Descripción
Perfectamente inelástica	$\varepsilon_{ii} = 0$	La cantidad demandada no responde al precio.
Inelástica	$\varepsilon_{ii} \in (-1, 0)$	Responde menos que proporcionalmente al precio.
Unitaria	$\varepsilon_{ii} = -1$	Responde exactamente en la misma proporción.
Elástica	$\varepsilon_{ii} < -1$	Responde más que proporcionalmente al precio.
Perfectamente elástica	$\varepsilon_{ii} \to -\infty$	Responde infinitamente ante cualquier variación del precio.
Anormal (Giffen)	$\varepsilon_{ii} > 0$	La cantidad demandada aumenta con el precio.

Relaciones brutas según el efecto cruzado ($i \neq j$): según el signo del efecto total cruzado, dos bienes son *complementarios brutos* si $\partial x_i/\partial p_j < 0$ (un aumento del precio de x_j reduce la demanda de x_i), *independientes* si $\partial x_i/\partial p_j = 0$ y *sustitutivos brutos* si $\partial x_i/\partial p_j > 0$. Estas relaciones tienen el inconveniente de no ser simétricas, pues los efectos renta difieren entre bienes, de modo que x_i puede ser sustitutivo bruto de x_j y, simultáneamente, x_j complementario bruto de x_i.

Relaciones netas: para superar la asimetría se utiliza una definición alternativa[18] basada exclusivamente en los efectos sustitución. Dos bienes son *sustitutivos netos* si $\partial h_i/\partial p_j > 0$ y

[18] Esta definición es de Hicks y, por ello, también se les conoce como sustitutivos o complementarios "hicksianos".

complementarios netos si $\partial h_i/\partial p_j < 0$. A diferencia de las brutas, la definición se fija solo en la forma de la curva de indiferencia y no es ambigua, pues los efectos sustitución cruzados hicksianos son simétricos, $\partial h_i/\partial p_j = \partial h_j/\partial p_i$.

En el caso de dos bienes con RMS decreciente, el ES propio negativo implica, por la homogeneidad de grado cero de la demanda hicksiana en precios ($p_1\,\partial h_1/\partial p_1 + p_2\,\partial h_1/\partial p_2 = 0$), un ES cruzado positivo. Por ello, los dos bienes son siempre sustitutivos netos, aunque puedan ser sustitutivos o complementarios brutos.

2.3. La curva de demanda

La **curva de demanda** es la relación entre el precio de un bien y su cantidad óptima demandada, manteniendo constantes los demás determinantes.

2.3.1. Obtención de la curva de demanda: la curva precio-consumo

Analíticamente, la curva de demanda es la función de demanda marshalliana restringida a su propio precio, $x_i = d_i(p_i; \mathbf{p}^0_{-i}, M_0)$, es decir, una sección de la función de demanda general en la que los otros precios y la renta actúan como parámetros.

Desarrollo gráfico: en el plano de bienes (figura A8.9, panel superior), haciendo pivotar la recta de balance para sucesivos niveles del precio de x_1, *ceteris paribus*, se obtiene la *curva precio-consumo* (CPC). La CPC es el lugar geométrico de las cestas óptimas al variar el precio de un bien, manteniendo constantes la renta monetaria y el precio del otro bien.

La forma de la CPC depende de la elasticidad-precio. Si la demanda es inelástica, el gasto en x_1 aumenta al subir su precio y la CPC tiene pendiente positiva en el plano (x_1, x_2). Si es unitaria, la CPC es horizontal y, si es elástica, tiene pendiente negativa (condición de Cournot, apartado 3.1.3). La figura recoge el primer caso. Proyectando los puntos 0, 1 y 2 de la CPC sobre el plano cantidad-precio (panel inferior) se obtiene la *curva de demanda precio-propio* del consumidor[19].

[19] La teoría de la demanda moderna ha seguido a Walras al tomar el precio como variable independiente y, aunque esta suele situarse en abscisas, a Marshall al colocarlo en el eje de ordenadas.

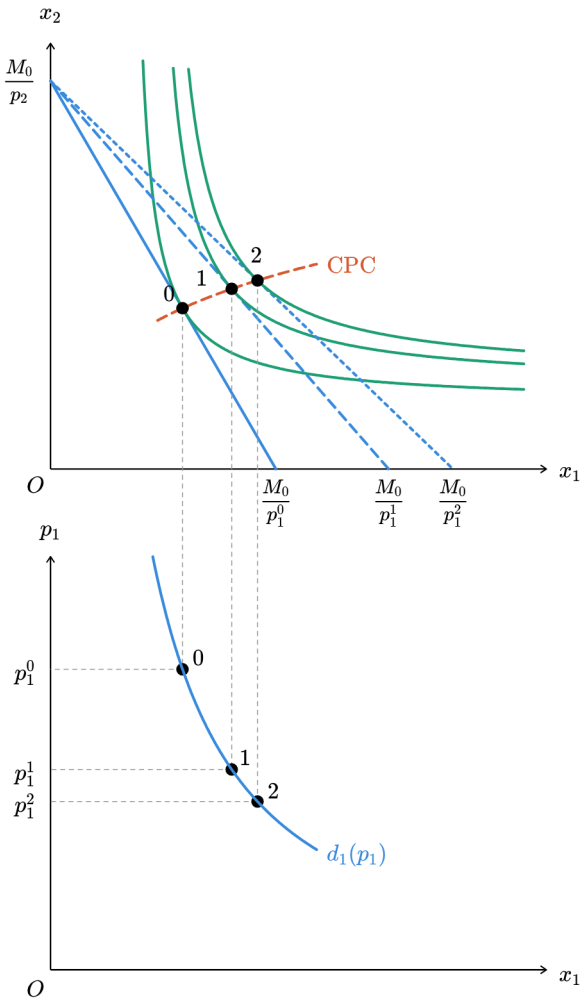


Figura A8.9: Curva precio-consumo y curva de demanda. Al bajar el precio del bien 1, la recta de balance gira sobre M_0/p_2 y las cestas óptimas 0, 1 y 2 trazan la CPC. Proyectadas sobre el plano cantidad-precio, dan la curva de demanda $d_1(p_1)$.

2.3.2. La demanda individual

Definición: la curva de demanda individual precio-propio es la sección de la demanda marshalliana que se acaba de describir, $x_i^* = d_i(p_i)$, o en su forma inversa $p_i(x_i) = d_i^{-1}(x_i^*)$, con los demás determinantes constantes (los otros precios, la renta nominal[20] y las preferencias).

Un cambio en el precio propio es un movimiento a lo largo de la curva, mientras que un cambio en cualquiera de los otros determinantes es un desplazamiento de la curva.

Propiedades: la curva hereda las de la función de demanda marshalliana de la que es una sección (apartado 1.4.2). Es continua, homogénea de grado cero en precios y renta y directamente estimable con datos de precios y cantidades. Sus rasgos propios son dos:

- *Inclinación*: su pendiente en el plano (x_i, p_i) es el efecto total propio de la ecuación de Slutsky, con el signo y la elasticidad que clasifican las tablas A8.2 y A8.3.

[20] A diferencia de lo que ocurre con la demanda compensada, la utilidad varía a lo largo de la curva, porque, con renta nominal constante, una bajada del precio aumenta el poder adquisitivo y el bienestar (tema A09).

- *Forma*: depende de las preferencias. Por ejemplo, con una función Cobb-Douglas es una hipérbola rectangular de elasticidad unitaria, pues el gasto en cada bien es una fracción constante de la renta.

Las curvas de demanda compensadas, que mantienen constante la utilidad (hicksiana) o la posibilidad de adquirir la cesta inicial (compensada de Slutsky), solo recogen el efecto sustitución, por lo que cumplen la ley de la demanda inequívocamente. La hicksiana no es observable, porque exige conocer la utilidad, mientras que la de Slutsky sí lo es, ya que equivale a la marshalliana evaluada en la renta que permite comprar la cesta inicial. Para un bien normal, la marshalliana es más elástica que la hicksiana.

> Las propiedades de la demanda hicksiana y la comparación formal y gráfica de las pendientes de ambas curvas se desarrollan en el tema A09, apartados 2.2 y 2.4.4.

2.3.3. La demanda de mercado

Definición: la curva de demanda de mercado de un bien resulta de agregar las curvas de demanda individuales de los H consumidores del mercado:

$$D_i(p_i) = \sum_{h=1}^{H} d_i^h(p_i, \mathbf{p}_{-i}^0, M_0^h)$$

Propiedades: la demanda de mercado hereda de las individuales algunas de sus propiedades, pero no todas:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua si lo son las demandas individuales, aunque puede presentar quiebros en los precios a los que un consumidor entra en el mercado o sale de él.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado cero en precios y rentas.

3. *Inclinación*: tiene pendiente negativa siempre que la tengan las individuales. La condición es suficiente, no necesaria, ya que la demanda de mercado puede ser decreciente aunque algún consumidor tenga una demanda Giffen.

4. *Forma*: la teoría no restringe su curvatura, igual que ocurre con las demandas individuales.

5. *Otras propiedades*:

- *Agotamiento de la renta*: como cada consumidor agota su renta, el gasto de todos ellos iguala la suma de sus rentas (ley de Walras agregada).

- *Integrabilidad*: en general no hereda la simetría de los efectos sustitución ni la ley de la demanda compensada, por lo que no puede tratarse como la demanda de un consumidor representativo (apartado 3.1.2).

- *Observabilidad*: es estimable con datos de mercado de precios y cantidades.

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A8.10), la demanda de mercado se obtiene por la suma horizontal de las curvas individuales. A cada precio, como p_0, la cantidad de mercado, X^0, es la suma de las cantidades individuales, y la curva tiene un vértice en el precio al que empieza a comprar el consumidor A. Por debajo de ese vértice, donde compran ambos, es más plana (de menor pendiente en valor absoluto) que cada una de ellas, y por encima coincide con

la demanda de B. No es, sin embargo, necesariamente más elástica, porque a un precio dado su elasticidad es la media de las elasticidades individuales ponderada por la participación de cada consumidor en la cantidad total. Además, se desplaza con la renta y su distribución, los demás precios, las preferencias y el número de consumidores.

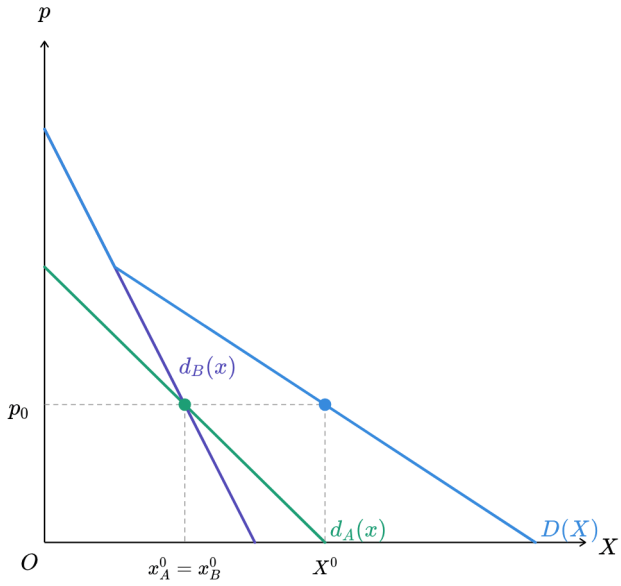


Figura A8.10: Demanda de mercado. La curva de mercado, $D(X)$, es la suma horizontal de las demandas individuales, $d_A(x)$ y $d_B(x)$, y tiene un vértice en el precio al que el consumidor A empieza a comprar.

2.4. Conclusiones

Aspectos positivos: de las preferencias, la teoría neoclásica deduce funciones de demanda sujetas a varias "leyes":

1. *Ausencia de ilusión monetaria*: homogeneidad de grado cero en precios y renta, de modo que la inflación pura no altera las cantidades demandadas, en coherencia con la dicotomía clásica.

2. *Ley de Walras*: los consumidores agotan su renta, de donde se siguen las condiciones de agregación de Engel y de Cournot (apartado 3.1.3).

3. *Efecto sustitución propio negativo*: a renta real constante y con alguna sustituibilidad, la cantidad demandada responde a los precios relativos en dirección opuesta.

4. *Efecto sustitución cruzado simétrico*: las relaciones netas son inequívocas, aunque no observables, frente a la asimetría de las brutas.

5. *Los bienes normales son siempre ordinarios*: para ellos la curva de demanda marshalliana tiene pendiente negativa en el plano (x_i, p_i).

Limitaciones: aunque las curvas de demanda marshallianas son observables, ni las preferencias ni la función de utilidad lo son, y la mayoría de los datos de mercado reflejan el comportamiento de muchos demandantes, cuya agregación plantea los problemas señalados. Por ello los resultados

se utilizan sobre todo en el trabajo teórico y en la especificación de funciones de demanda que cumplen estas propiedades.

3. Extensiones

La teoría ordinal anterior se completa con varias extensiones. Unas atañen a la agregación y a las restricciones de los sistemas de demanda. Otras parten de la conducta observada (preferencia revelada), incorporan restricciones tecnológicas al problema del consumidor (Lancaster y Becker) o recuperan el precio implícito de las características de los bienes (precios hedónicos).

3.1. Agregación y restricciones de los sistemas de demanda

La demanda de mercado del apartado 2.3.3 es una suma de demandas individuales, y no está garantizado que pueda tratarse, a su vez, como una función de demanda de unos pocos precios y de la renta agregada, con las propiedades del apartado 1.4.2. Este apartado enuncia cuándo son exactas la agregación de bienes y la de consumidores, y qué restricciones impone la teoría a todo sistema de demanda.

3.1.1. Agregación de bienes

Condiciones: para que un grupo de bienes (alimentación, vivienda, transporte) pueda tratarse como un único bien con un precio y una cantidad propios, hay dos vías:

1. *Teorema del bien compuesto* (Hicks, 1939b; Leontief, 1936): si los precios de los bienes del grupo varían siempre en la misma proporción, el gasto en el grupo valorado a precios iniciales se comporta como la demanda de un bien cuyo precio es ese factor común.

2. *Separabilidad débil de las preferencias*: los bienes se agrupan de modo que la relación marginal de sustitución entre dos bienes de un grupo no depende del consumo de los demás grupos. La utilidad es entonces $u = U\left[v_1(x_{G_1}), \dots, v_K(x_{G_K})\right]$, con una subutilidad v_k por grupo, y el consumidor puede decidir en dos etapas. Primero reparte la renta entre los grupos y después distribuye el gasto de cada grupo entre sus bienes atendiendo solo a los precios del grupo. Sin embargo, que la primera etapa dependa solo de un índice de precios por grupo exige algo más, p. ej. que cada v_k sea homotética.

Consecuencias: las dos condiciones justifican el uso de deflactores y de agregados (el "resto de bienes" como numerario de los modelos de dos bienes) y la estimación por etapas de los sistemas de demanda, mientras que su incumplimiento sesga las elasticidades estimadas para el grupo.

3.1.2. Agregación de consumidores

Condición: para que la demanda de mercado $D_i(\mathbf{p}, M)$, con $M = \sum_h M^h$, no dependa de la distribución de la renta, las curvas de Engel de todos los consumidores han de ser rectas paralelas (Gorman, 1953). Ello equivale a funciones de gasto de la forma $e^h(\mathbf{p}, u^h) = a^h(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})\, u^h$, donde a^h recoge la heterogeneidad individual y b es común. Bajo esta condición, de la que son casos particulares las *preferencias homotéticas e idénticas* y las *preferencias cuasilineales*, el mercado se comporta como un *consumidor representativo*.

Consecuencias: la condición es el fundamento (frágil) del agente representativo de la macroeconomía. Sin ella, la demanda de mercado conserva la continuidad, la homogeneidad y la agregación, pero no la simetría ni la negatividad de Slutsky. De ahí que las restricciones que siguen sean las únicas que la teoría individual garantiza en los datos agregados.

La forma polar de Gorman en los sistemas de demanda y su agregación exacta se desarrollan en el tema A09, apartado 3.2. La preferencia revelada sobre la demanda agregada, como condición de unicidad del equilibrio general, se trata en el tema A21, apartado 2.1.2.

3.1.3. Restricciones sobre el sistema de demanda

Las propiedades de la función de demanda pueden leerse como restricciones que la teoría impone a la especificación empírica de los *sistemas completos de demanda*, es decir, del conjunto de las n funciones $x_i^m(\mathbf{p}, M)$ estimadas simultáneamente.

Expresadas en elasticidades, la ausencia de ilusión monetaria da lugar a la *condición de homogeneidad* y la ley de Walras a las *condiciones de agregación de Engel y de Cournot*. Aquí *agregación* se refiere a la suma de los gastos en los bienes, que debe agotar la renta, y no a la agregación de consumidores del apartado anterior.

Estas propiedades constituyen condiciones necesarias pero no suficientes para que un sistema proceda de la maximización de una utilidad. La suficiencia exige además la simetría y la semidefinición negativa de la matriz de Slutsky, que es el problema de la integrabilidad (tema A09, apartado 3.1). En lo que sigue, $s_i \equiv p_i x_i / M$ es la participación del bien i en el gasto, con $\sum_i s_i = 1$.

1. *Condición de homogeneidad*: como las demandas son homogéneas de grado cero en precios y renta, los efectos de todos los precios y de la renta sobre la demanda de cada bien deben compensarse exactamente.

▪ *Formulación*: para cada bien i, la suma de sus elasticidades-precio (propia y cruzadas) y de su elasticidad-renta es nula[21]:

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{iM} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

▪ *Consecuencias*: la suma de las elasticidades cruzadas de un bien queda determinada, $\sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{iM}$, y es positiva para un bien ordinario cuya elasticidad-precio propia supere en valor absoluto a su elasticidad-renta.

2. *Condición de agregación de Engel*: desde el punto de vista de la renta, la ley de Walras exige que toda variación de la renta sea absorbida íntegramente por las variaciones de las cantidades demandadas.

▪ *Formulación*: la suma de las elasticidades-renta ponderadas por las participaciones en el gasto es igual a uno[22]:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \, \varepsilon_{iM} = 1$$

[21] La condición se deriva del teorema de Euler aplicado a una función homogénea de grado cero. Para $x_i^m(\mathbf{p}, M)$: $\sum_j p_j \frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} + M \frac{\partial x_i^m}{\partial M} = 0 \cdot x_i^m = 0$, y basta dividir por x_i para obtener la expresión en elasticidades.

[22] Se diferencia la restricción presupuestaria $\sum_i p_i x_i^m = M$ respecto a M y se multiplica y divide cada sumando por x_i/M: $\sum_i p_i \frac{\partial x_i^m}{\partial M} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \frac{p_i x_i}{M} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_i^m}{\partial M} \frac{M}{x_i}}_{\varepsilon_{iM}} = 1$.

▪ *Consecuencias*: no todos los bienes pueden ser inferiores ($\varepsilon_{iM} < 0$) ni de frontera ($\varepsilon_{iM} = 0$). Al menos uno ha de ser normal, y los bienes de lujo ($\varepsilon_{iM} > 1$) deben coexistir con bienes de elasticidad-renta inferior a la unidad ($\varepsilon_{iM} < 1$, es decir, de primera necesidad, frontera o inferiores), pues la media ponderada es uno.

3. *Condición de agregación de Cournot*: desde el punto de vista de los precios, la subida de p_j encarece la cesta inicial, y la ley de Walras exige que ese sobrecoste se compense con variaciones de las cantidades de todos los bienes, incluido el propio j.

▪ *Formulación*: para cada precio j, la suma de las elasticidades respecto a p_j ponderadas por las participaciones en el gasto es igual a la participación del bien j cambiada de signo[23]:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \, \varepsilon_{ij} = -s_j \qquad j = 1, \dots, n$$

▪ *Consecuencias*: separando el bien j del resto, $\sum_{i \neq j} s_i \, \varepsilon_{ij} = -s_j(1 + \varepsilon_{jj})$, de modo que el signo de los efectos cruzados depende de la elasticidad propia de j. Si su demanda es elástica ($\varepsilon_{jj} < -1$), una bajada de p_j aumenta el gasto en j y reduce el de los demás bienes, por lo que al menos uno de ellos ha de ser sustitutivo bruto de j ($\varepsilon_{ij} > 0$). Si es inelástica, por el contrario, el gasto liberado se dirige a ellos y al menos uno ha de ser complementario bruto. En el caso de dos bienes, el bien 1 es sustitutivo bruto del 2 si y solo si la demanda del 2 es elástica.

Uso empírico: las tres condiciones, junto con la simetría de Slutsky, fijan unas elasticidades a partir de las demás.

> Su imposición o contraste en los sistemas completos de demanda, como el sistema lineal de gasto (SLG), el modelo de Rotterdam y el sistema casi ideal de demanda (AIDS), y el rechazo frecuente de la homogeneidad se desarrollan en el tema A09, apartado 3.2.

3.1.4. Conclusiones

Aspectos positivos: las condiciones de agregación de bienes y de consumidores delimitan cuándo la demanda de mercado conserva las propiedades de la individual. Además, todo sistema de demanda estimado debe satisfacer las restricciones de homogeneidad, Engel y Cournot, lo que hace contrastable la teoría.

Limitaciones: las condiciones de agregación exacta (bien compuesto o separabilidad débil, curvas de Engel lineales y paralelas) son muy restrictivas, y las de homogeneidad, Engel y Cournot no bastan para la integrabilidad.

3.2. Teoría de la preferencia revelada

Origen: la teoría ordinal sigue un enfoque deductivo a partir de las preferencias y la utilidad, que no son observables.

Idea: la *teoría de la preferencia revelada* sigue el enfoque inverso, un *enfoque inductivo*. Parte de la conducta observada del consumidor (las cestas que efectivamente elige a unos precios y con una renta dados) y se pregunta qué revela esa elección sobre sus preferencias.

[23] Se diferencia la restricción presupuestaria respecto a p_j, lo que hace aparecer el término x_j (el encarecimiento de la cesta inicial), y se multiplica todo por p_j/M: $x_j + \sum_i p_i \frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_j + \sum_i s_i \, \varepsilon_{ij} = 0$.

Supuestos: se parte de un consumidor que, a cada vector de precios $\mathbf{p}$ y renta M, elige una única cesta y agota su renta (ley de Walras).

3.2.1. Axioma débil de la preferencia revelada (ADPR) (Samuelson, 1938)

Razonamiento: si a los precios $\mathbf{p}^0$ el consumidor elige la cesta $\mathbf{x}^0$ pudiendo haber elegido $\mathbf{x}^1$ (ambas dentro de su conjunto asequible), $\mathbf{x}^0$ se revela *directamente* preferida a $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^0 \succ_d \mathbf{x}^1$.

El ADPR establece que, en ese caso, $\mathbf{x}^1$ nunca podrá revelarse directamente preferida a $\mathbf{x}^0$:

$$\forall\, \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}^1 : \quad \mathbf{x}^0 \succ_d \mathbf{x}^1 \rightarrow \neg(\mathbf{x}^1 \succ_d \mathbf{x}^0)$$

En términos de gasto, si la cesta elegida $\mathbf{x}^0$ cuesta al menos tanto como la rechazada $\mathbf{x}^1$ a los precios $\mathbf{p}^0$, entonces a cualquier otro vector de precios $\mathbf{p}^1$ al que el consumidor elija $\mathbf{x}^1$, la cesta $\mathbf{x}^0$ debe haberse vuelto inasequible:

$$\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0 \geq \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 < \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0$$

donde $\mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^s$, con $s, t \in \{0, 1\}$, es lo que cuesta la cesta $\mathbf{x}^s$ a los precios $\mathbf{p}^t$. Del ADPR se siguen tres implicaciones:

1. *Estabilidad*: ante las mismas opciones, el consumidor elige siempre igual.

2. *Resultados sin función de utilidad*: del ADPR se deduce la no positividad del efecto sustitución propio (ley de la demanda compensada) y, para los bienes normales, la pendiente negativa de la curva de demanda marshalliana en el plano (x_i, p_i).

3. *Alcance*: el ADPR no garantiza la transitividad de las preferencias reveladas con más de dos bienes y es condición necesaria pero no suficiente de racionalidad, de ahí el axioma fuerte. Con dos bienes, en cambio, basta el ADPR (Rose, 1958).

Gráficamente, en el plano (x_1, x_2) (figura A8.11), a los precios $\mathbf{p}^0$ el consumidor elige $\mathbf{x}^0$ sobre la recta de balance RP_0, con $\mathbf{x}^1$ dentro del conjunto asequible. Si a los precios $\mathbf{p}^1$ elige $\mathbf{x}^1$ sobre la recta RP_1, el ADPR se cumple cuando $\mathbf{x}^0$ queda por encima de esa recta (panel a) y se viola cuando queda por debajo, porque entonces también $\mathbf{x}^1$ se revela directamente preferida a $\mathbf{x}^0$ (panel b).

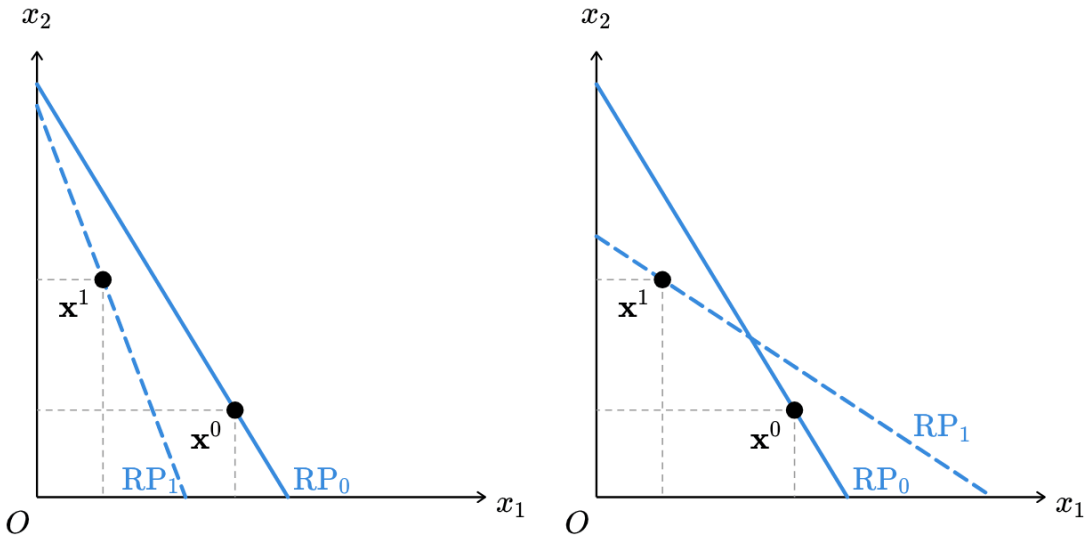


Figura A8.11: Axioma débil de la preferencia revelada. A los precios $\mathbf{p}^0$ (recta RP_0) se elige $\mathbf{x}^0$ pudiendo comprar $\mathbf{x}^1$. A los precios $\mathbf{p}^1$ (recta RP_1) se elige $\mathbf{x}^1$, y $\mathbf{x}^0$ es inasequible en el panel (a), como exige el ADPR, pero asequible en el panel (b), que viola el axioma.

3.2.2. Axioma fuerte de la preferencia revelada (AFPR) (Houthakker, 1950)

Razonamiento: dadas tres cestas ($\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$), puede que $\mathbf{x}^0$ y $\mathbf{x}^2$ no sean comparables directamente porque ninguna es asequible cuando el consumidor elige la otra.

Se define entonces la preferencia revelada *indirecta* como una cadena de preferencias directas, y el AFPR establece que si $\mathbf{x}^0$ se revela (directa o indirectamente) preferida a $\mathbf{x}^2$, entonces $\mathbf{x}^2$ nunca podrá revelarse preferida a $\mathbf{x}^0$:

$$\mathbf{x}^0 \succ_d \mathbf{x}^1 \text{ y } \mathbf{x}^1 \succ_d \mathbf{x}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}^0 \succ_i \mathbf{x}^2 \quad \rightarrow \quad \neg(\mathbf{x}^2 \succ_d \mathbf{x}^0)$$

donde $\succ_d$ es una elección real observada y $\succ_i$ una inferencia lógica a partir de una cadena de elecciones. El AFPR añade así el requisito de transitividad o coherencia del comportamiento y, a diferencia del ADPR, es condición necesaria y suficiente de racionalidad.

Extensiones: el *teorema de Afriat* (1967) establece que, si un conjunto finito de observaciones de precios y cestas satisface el AFPR (en su versión generalizada, GARP), existe una función de utilidad continua, monótona y cóncava que las racionaliza, es decir, cuyas demandas coinciden con las cestas observadas. El teorema ofrece, además, un contraste no paramétrico de la teoría, sin especificar forma funcional alguna.

3.2.3. Conclusiones

Aspectos positivos: los axiomas permiten obtener una representación de las preferencias coherente con la conducta observada, sin postular *a priori* una función de utilidad. Las principales aplicaciones son:

1. *Teoría de la demanda*: la ley de la demanda compensada y las curvas de indiferencia convexas se recuperan a partir de la conducta.

2. *Índices de precios*: con las cestas observadas, sin conocer la función de demanda, pueden construirse el índice de Laspeyres (cesta del periodo base), que sobreestima el aumento del coste de la vida porque ignora la sustitución, y el de Paasche (cesta corriente), que lo subestima.

3. *Contrastes empíricos*: el teorema de Afriat fundamenta los contrastes no paramétricos de racionalidad con datos de encuestas de presupuestos familiares y de experimentos.

> Los índices de Laspeyres, Paasche y Fisher y su relación con las variaciones compensatoria y equivalente se desarrollan en el tema A09, apartado 3.3.3, y su uso como IPC y deflactor del PIB, en el tema A30, apartado 3.3.2.

Limitaciones: la teoría exige observar muchas elecciones de un mismo consumidor con preferencias estables, y sus contrastes tienen poca potencia cuando los conjuntos presupuestarios observados apenas se cortan. Además, por el teorema de Afriat, el enfoque basado en el AFPR no relaja la hipótesis de racionalidad, sino que la expresa en términos observables.

3.3. Teorías basadas en restricciones tecnológicas

Las dos aportaciones que siguen introducen funciones de producción o transformación entre las restricciones del problema del consumidor, de modo que la utilidad no se obtiene de los bienes en sí, sino de lo que el consumidor produce con ellos.

3.3.1. Teoría de la demanda de características (Lancaster, 1966)

> El modelo completo se desarrolla en el tema A18, apartado 2.1.1, y aquí se recogen su idea y su representación gráfica.

Origen: Kelvin Lancaster (1966) responde a la incapacidad de la teoría neoclásica, con bienes homogéneos, para explicar la aparición de variedades.

Idea: se demandan las características que incorporan los bienes, no los bienes en sí, que son *diferenciados* porque las combinan en proporciones distintas.

Razonamiento: el consumidor transforma los bienes en características con una tecnología lineal y objetiva, $a_j = \sum_i \beta_{ji} x_i$, donde β_{ji} es la cantidad de la característica j que aporta una unidad del bien i. Así, cada bien es un rayo en el plano de características, y los puntos que se alcanzan gastando toda la renta en cada uno, tanto más alejados cuanto menor es su precio, forman la *frontera eficiente de consumo*, cóncava. Los bienes que quedan dentro son *dominados* y no se consumen. El óptimo es la tangencia con la curva de indiferencia más alejada, en un tramo (dos bienes adyacentes) o en un vértice (uno solo).

Desarrollo gráfico: el modelo se representa en el plano de características, (a_1, a_2) (figura A8.12):

1. *Rayos de los bienes*: los bienes x_1, x_2 y x_3 combinan las características a_1 y a_2 en proporciones fijas.

2. *Frontera eficiente de consumo*: une los puntos A, B y C, que se alcanzan gastando toda la renta en cada bien. Es cóncava y quebrada, con un vértice en cada bien, porque cada tramo combina dos bienes adyacentes.

3. *Curva de indiferencia*, u_0: recoge las preferencias del consumidor sobre las características.

4. *Equilibrio*: en el punto 0, u_0 es tangente al tramo AB de la frontera, con características a_1^* y a_2^*, y el consumidor combina los bienes x_1 y x_2.

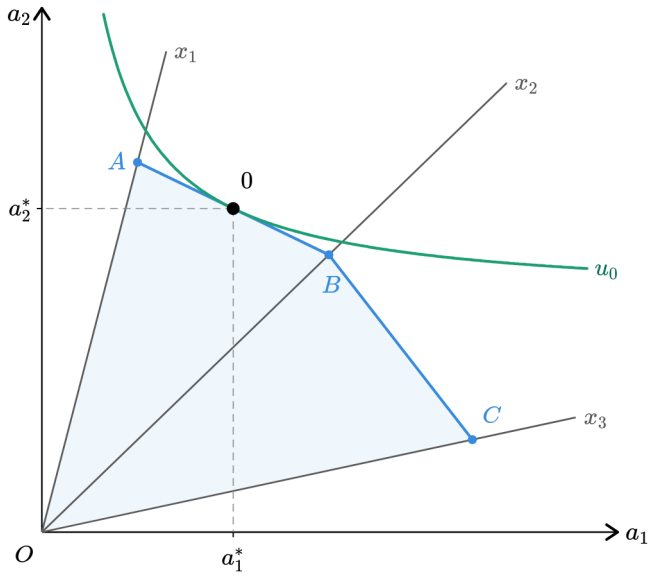


Figura A8.12: Teoría de la demanda de características (Lancaster, 1966). Cada bien (x_1, x_2, x_3) es un rayo desde el origen en el espacio de características (a_1, a_2), y A, B y C son las combinaciones que se obtienen gastando toda la renta en él. La frontera eficiente que los une es cóncava respecto al origen, y el óptimo 0 se sitúa donde la curva de indiferencia u_0 es tangente al tramo AB, que combina los bienes x_1 y x_2.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: explica la diferenciación de producto y la entrada y salida de variedades como fenómenos de demanda y es la base del enfoque hedónico.

▪ *Limitaciones*: la tecnología lineal, las características objetivas y la falta de una teoría de los precios de las variedades.

3.3.2. El hogar como unidad de consumo: teoría de la producción familiar (Becker, 1965)

Origen: la *new home economics* de la Universidad de Columbia[24] toma como unidad de decisión el hogar, y no el individuo, y tiene su aportación central en el artículo de Becker (1965).

[24] En torno a Jacob Mincer y Gary Becker.

Idea: como en Lancaster, la utilidad es indirecta, pero el hogar produce sus bienes finales con bienes de mercado y tiempo, cuyo coste de oportunidad es el salario.

Supuestos:

- *Agentes*: preferencias $u(\mathbf{a})$, definidas sobre actividades o *bienes finales* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ (comidas, cuidado de los hijos, ocio).

- *Tecnología*: $a_j = f_j(x_j, t_j)$, homogénea de grado uno en los bienes x_j y el tiempo t_j dedicados a la actividad j.

- *Restricciones*: temporal y presupuestaria, $\sum_j t_j + T_w = T_0$ y $\sum_j p_j x_j = M_0 + wT_w$, donde T_0 es la dotación de tiempo, T_w el tiempo de trabajo asalariado, w el salario y M_0 la renta no salarial.

Planteamiento: sustituyendo la restricción temporal en la presupuestaria se obtiene la de *renta completa* (*full income*):

$$\max_{\mathbf{a}} \; u(a_1, \dots, a_m) \quad \text{s.a.:} \quad \sum_j \pi_j a_j = wT_0 + M_0$$

donde $\pi_j = p_j b_j + w\tau_j$ es el precio sombra de la actividad j, con $b_j = x_j/a_j$ y $\tau_j = t_j/a_j$ los bienes y el tiempo por unidad de actividad (independientes de su nivel por la homogeneidad de grado uno), y $wT_0 + M_0$ la renta completa.

CPO: con solución interior y la restricción agotada, se obtiene la condición habitual, con precios sombra en lugar de precios de mercado:

$$\frac{\partial u/\partial a_j}{\partial u/\partial a_k} = \frac{\pi_j}{\pi_k}$$

CSO: son las del apartado 1.4.1 (cuasiconcavidad de u), pues la restricción de renta completa es lineal.

Estática comparativa: una subida de w encarece relativamente las actividades intensivas en tiempo (mayor peso de $w\tau_j$ en π_j), que se sustituyen por otras intensivas en bienes (comida preparada, guardería), y eleva la renta completa (efecto renta).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: funda la economía de la familia, en la que el mayor coste de oportunidad del tiempo de las mujeres ayuda a explicar la caída de la natalidad, y el análisis de la oferta de trabajo (tema A25).

- *Limitaciones*: una visión muy racionalista del hogar, que ignora las relaciones de poder y las normas sociales que incorporan los modelos posteriores de negociación intrafamiliar.

3.4. Teoría de los precios hedónicos (Court, 1939; Griliches, 1961; Rosen, 1974)

Origen: el término *hedónico* se debe a Andrew Court (*Hedonic Price Indexes with Automotive Examples*, 1939), que valoró automóviles según sus atributos (potencia, peso y distancia entre ejes). Después, Zvi Griliches (1961) y Sherwin Rosen (1974) formalizaron el marco y le dieron fundamentos microeconómicos.

Idea: la teoría formaliza empíricamente la idea de Lancaster de que los bienes se valoran por sus características, pero desde la pregunta complementaria: dado que las variedades se intercambian en mercados con precios observables, ¿puede recuperarse el precio implícito de cada característica a partir de esos precios?

3.4.1. Supuestos

Entorno: cada variedad i se describe por un vector de k características observables y cuantificables, $\mathbf{z}_i = (z_{i1}, \dots, z_{ik})$ (el vector $\mathbf{a}$ de Lancaster).

Agentes: consumidores y productores son precio-aceptantes respecto a la función de precios hedónicos $p(\mathbf{z})$. Los consumidores eligen la variedad que maximiza su utilidad y los productores, la combinación de características que maximiza su beneficio.

Mercado de bienes: competitivo, con variedades diferenciadas cuyo precio refleja la valoración conjunta de sus características. Además, $p(\mathbf{z})$ resulta del equilibrio entre oferta y demanda de variedades y es, en general, no lineal en las características[25].

3.4.2. Modelo

Planteamiento: el consumidor maximiza $u(\mathbf{z}, y)$, donde y es el gasto en el resto de bienes, sujeto a $y + p(\mathbf{z}) = M_0$.

CPO: con solución interior, sustituyendo la restricción y derivando respecto a cada z_j, se iguala la relación marginal de sustitución entre cada característica y el resto de bienes al precio implícito de la característica:

$$\frac{\partial u/\partial z_j}{\partial u/\partial y} = \frac{\partial p(\mathbf{z})}{\partial z_j}$$

donde $\partial p(\mathbf{z})/\partial z_j$ es el *precio implícito* o *precio sombra* de la característica j, es decir, lo que el mercado cobra por una unidad adicional de z_j, que en el óptimo iguala la disposición marginal a pagar.

CSO: la CPO es suficiente si u es cuasicóncava y $p(\mathbf{z})$ es convexa en las características. Si, en cambio, $p(\mathbf{z})$ es cóncava, la tangencia puede no ser un máximo y la elección se desplaza a los extremos.

Equilibrio: Rosen (1974) muestra que $p(\mathbf{z})$ es la envolvente de las tangencias entre las curvas de oferta (*offer curves*) de las empresas y las de puja (*bid curves*, valoración a utilidad constante) de los consumidores en el espacio características-precio. Esa envolvente, denominada *ecuación*

[25] La no linealidad se debe a que los paquetes de características no pueden desagregarse ni recombinarse entre variedades (no hay arbitraje), de modo que el precio implícito de una característica puede variar con su nivel y con el de las demás (Rosen, 1974). Por ejemplo, una habitación adicional no se paga igual en un piso de 50 m² que en uno de 200 m².

hedónica de precios, relaciona el precio de cada variedad con sus características y recoge, en cada punto, la igualdad entre el precio implícito y la disposición marginal a pagar de quien compra esa variedad.

Extensiones: la estimación sigue las dos etapas propuestas por Rosen (1974):

1. *Ecuación hedónica de precios*: el precio observado se expresa como función de las características, $p_i = p(z_{i1}, \dots, z_{ik}) + \eta_i$, donde η_i es un término de error. La función $p(\cdot)$ se estima por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) sobre transacciones observadas, con especificación lineal, semilogarítmica o doble logarítmica, en las que los coeficientes se interpretan como precios implícitos o elasticidades[26]. Sus derivadas, $\partial\hat{p}/\partial z_j$, dan el precio implícito de cada característica para cada comprador.

2. *Función de demanda de características*: los precios implícitos estimados se relacionan con las cantidades de características elegidas y con los rasgos de los compradores (renta, tamaño del hogar), $\partial p/\partial z_j = F_j(\mathbf{z}, M_0, \dots)$, lo que da la demanda inversa de cada característica, es decir, la disposición marginal a pagar por ella. Como en un solo mercado precio implícito y cantidad se determinan a la vez, identificar esta función exige datos de varios mercados o restricciones adicionales (Brown y Rosen, 1982; Epple, 1987).

3.4.3. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría tiene tres aplicaciones:

1. *Índices de precios ajustados por calidad*: la aplicación principal de Griliches. Por ejemplo, un ordenador que cuesta lo mismo que hace cinco años con el doble de capacidad no ha mantenido su precio, sino que ha bajado en términos ajustados por calidad. Los institutos estadísticos, como la Oficina de Estadísticas Laborales (BLS) de EE. UU. o Eurostat, recogen los métodos hedónicos entre sus técnicas de ajuste por calidad de los índices de precios de consumo (tema A30, apartado 3.3.2), sobre todo para bienes tecnológicos, y los emplean también en los índices de precios de vivienda.

2. *Mercados inmobiliarios*: permite estimar el valor implícito de la superficie, la localización, la proximidad al transporte público o la calidad ambiental.

3. *Valoración de bienes ambientales*: al no existir mercado para la calidad del aire o el nivel de ruido, su valor se estima indirectamente a través de mercados donde sí hay transacciones (el inmobiliario), lo que conecta con la economía ambiental y el análisis coste-beneficio.

Limitaciones:

1. *Especificidad del mercado*: la función de precios hedónicos refleja el equilibrio de un mercado concreto, por lo que los precios implícitos no son transferibles entre mercados o periodos sin cautela.

2. *Identificación*: el segundo paso de Rosen (estimar funciones de demanda de características a partir de los precios implícitos) plantea problemas de endogeneidad, pues los precios implícitos los determinan simultáneamente oferta y demanda.

3. *Características observables*: el método exige que sean cuantificables, lo que excluye atributos subjetivos (p. ej. prestigio de marca).

[26] En la especificación semilogarítmica, $\ln p_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j z_{ij} + \eta_i$, el coeficiente β_j se interpreta como la variación porcentual del precio ante un cambio unitario en la característica z_j. En la doble logarítmica, β_j es directamente la elasticidad del precio respecto a z_j.

3.5. Conclusiones

Las extensiones de la sección responden a las limitaciones que la teoría ordinal dejaba abiertas al cierre de la sección 2. La agregación de bienes es exacta si sus precios varían en la misma proporción o si las preferencias son débilmente separables con subutilidades homotéticas, y la de consumidores exige curvas de Engel lineales y paralelas. Sin esta última, la demanda de mercado pierde la simetría y la negatividad de Slutsky y solo conserva, como restricciones contrastables, la homogeneidad y las condiciones de Engel y de Cournot.

La preferencia revelada recorre el camino inverso y obtiene de las elecciones observadas lo que la teoría ordinal postulaba. El axioma débil basta para la ley de la demanda compensada, y el fuerte equivale a la racionalidad y, con el teorema de Afriat, permite contrastarla sin forma funcional. Por su parte, Lancaster y Becker trasladan la utilidad de los bienes a lo que el consumidor produce con ellos, características o actividades que combinan bienes y tiempo, y los precios hedónicos recuperan de los precios observados el valor implícito de cada característica.

Conclusiones

El tema ha construido la demanda del consumidor a partir de muy pocos elementos. Unos axiomas sobre las preferencias permiten representarlas con una utilidad ordinal, y su maximización sujeta a la restricción presupuestaria da demandas marshallianas con propiedades contrastables (ausencia de ilusión monetaria, agotamiento de la renta, efecto sustitución propio no positivo). La estática comparativa separa después los efectos renta y sustitución y clasifica los bienes. La teoría es relevante porque el consumo es el principal componente del PIB por el lado del gasto y la demanda de mercado es la base del equilibrio de mercado, aunque la agregación solo conserva una parte de las propiedades individuales. Sus límites son una utilidad no observable, un marco estático y sin incertidumbre y una satisfacción que procede de los bienes y no de sus características ni del tiempo, y motivan la preferencia revelada, las teorías de Lancaster y Becker y los precios hedónicos.

El problema del consumidor es la plantilla de buena parte del análisis económico. Visto desde la minimización del gasto, ofrece la ecuación de Slutsky y las medidas monetarias del bienestar (tema A09). El mismo aparato de curvas de nivel, relaciones marginales de sustitución y elasticidades describe la tecnología y los costes de la empresa (temas A11 y A12), y la demanda de mercado es uno de los dos lados del equilibrio parcial (tema A16). Si el consumidor tiene dotaciones en lugar de una renta monetaria, la misma maximización explica el intercambio en equilibrio general (tema A21), la oferta de trabajo como demanda de ocio (tema A25) y el consumo intertemporal (tema A33). Por último, la elección con riesgo y con información asimétrica extiende el marco a la incertidumbre (temas A10 y A13).

Las preferencias no homotéticas han devuelto las curvas de Engel a la explicación del cambio estructural. Comin, Lashkari y Mestieri (2021) estiman esas preferencias con datos de hogares y de países y atribuyen a los efectos renta la mayor parte del paso de la agricultura a la industria y de esta a los servicios. Las curvas de Engel sustentan también el estudio de la desigualdad en la inflación. Como las cestas de consumo varían con la renta, los hogares de renta baja pueden soportar una inflación distinta de la media (en Estados Unidos, más alta), con consecuencias para el análisis coste-beneficio, la imposición óptima y la política de estabilización (Jaravel, 2021).

Anexos

A.1. Tipos de preferencias y forma de las curvas de indiferencia

Los axiomas del apartado 1.1.3 dan curvas de indiferencia decrecientes, convexas respecto al origen y suaves. Basta con relajar uno de ellos para obtener otras formas, que aparecen en muchas aplicaciones.

A.1.1. Casos con dos bienes

En el plano de bienes, (x_1, x_2) (figura A8.13), cada panel representa tres curvas de indiferencia de una misma función de utilidad, con $u_0 < u_1 < u_2$, y la flecha gris señala el sentido en que aumenta la utilidad:

1. *Sustitutivos perfectos* (panel a): con $u = ax_1 + bx_2$, las curvas son rectas de pendiente $-a/b$ y la relación marginal de sustitución es constante, $\text{RMS}_{21} = a/b$. Las preferencias son convexas solo en sentido débil. El consumidor gasta toda la renta en el bien 1 si $p_1/p_2 < a/b$ y en el bien 2 si $p_1/p_2 > a/b$ (solución de esquina). Si $p_1/p_2 = a/b$, cualquier cesta de la recta de balance es óptima.

2. *Complementarios perfectos* (panel b): con $u = \min\{ax_1, bx_2\}$, las curvas tienen forma de L, con el vértice sobre el radio $x_2 = (a/b)\,x_1$ (en la figura, $a = b$). En el vértice, una unidad adicional de un solo bien no eleva la utilidad. La RMS es infinita en el tramo vertical (sobra bien 2), nula en el horizontal (sobra bien 1) y no está definida en el vértice, donde la curva no es diferenciable. El óptimo está siempre en el vértice y no hay efecto sustitución.

3. *Cobb-Douglas* (panel c): con $u = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, las curvas son estrictamente convexas y asintóticas a los ejes (en la figura, $\alpha = 1/2$). La $\text{RMS}_{21} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1}$ tiende a infinito cuando x_1 tiende a cero y a cero cuando x_1 tiende a infinito, de modo que el óptimo es siempre interior y el consumidor compra algo de ambos bienes.

4. *Cuasilineales* (panel d): con $u = v(x_1) + x_2$, donde $v' > 0$ y $v'' < 0$, la $\text{RMS}_{21} = v'(x_1)$ depende solo de x_1, y las curvas son traslaciones verticales unas de otras. Si el óptimo es interior, la demanda del bien 1 no depende de la renta (efecto renta nulo), y por eso la variación del excedente del consumidor es una medida exacta del bienestar (tema A09). Las curvas pueden cortar los ejes (en la figura, con $v(x_1) = 3\sqrt{x_1}$, cortan los dos), de modo que, con una renta baja, el óptimo puede ser de esquina, sin consumo del bien 2.

5. *Bien neutral* (panel e): con $u = x_1$, el bien 2 no afecta a la utilidad (su utilidad marginal es nula) y las curvas son verticales. Se incumple la monotonía estricta, la RMS es infinita y el consumidor gasta toda la renta en el bien 1.

6. *Saciedad* (panel f): con $u = -[(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2]$, existe una cesta de saciedad, $S = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, y las curvas son circunferencias en torno a ella, con la utilidad creciente hacia S. Se incumple la no saturación local en S, porque ninguna cesta próxima es mejor. Por eso, si S queda dentro del conjunto asequible, el consumidor la elige sin agotar la renta. Fuera de S, el bien del que se tiene demasiado actúa como un mal (por encima de S, el bien 2, y a su derecha, el bien 1).

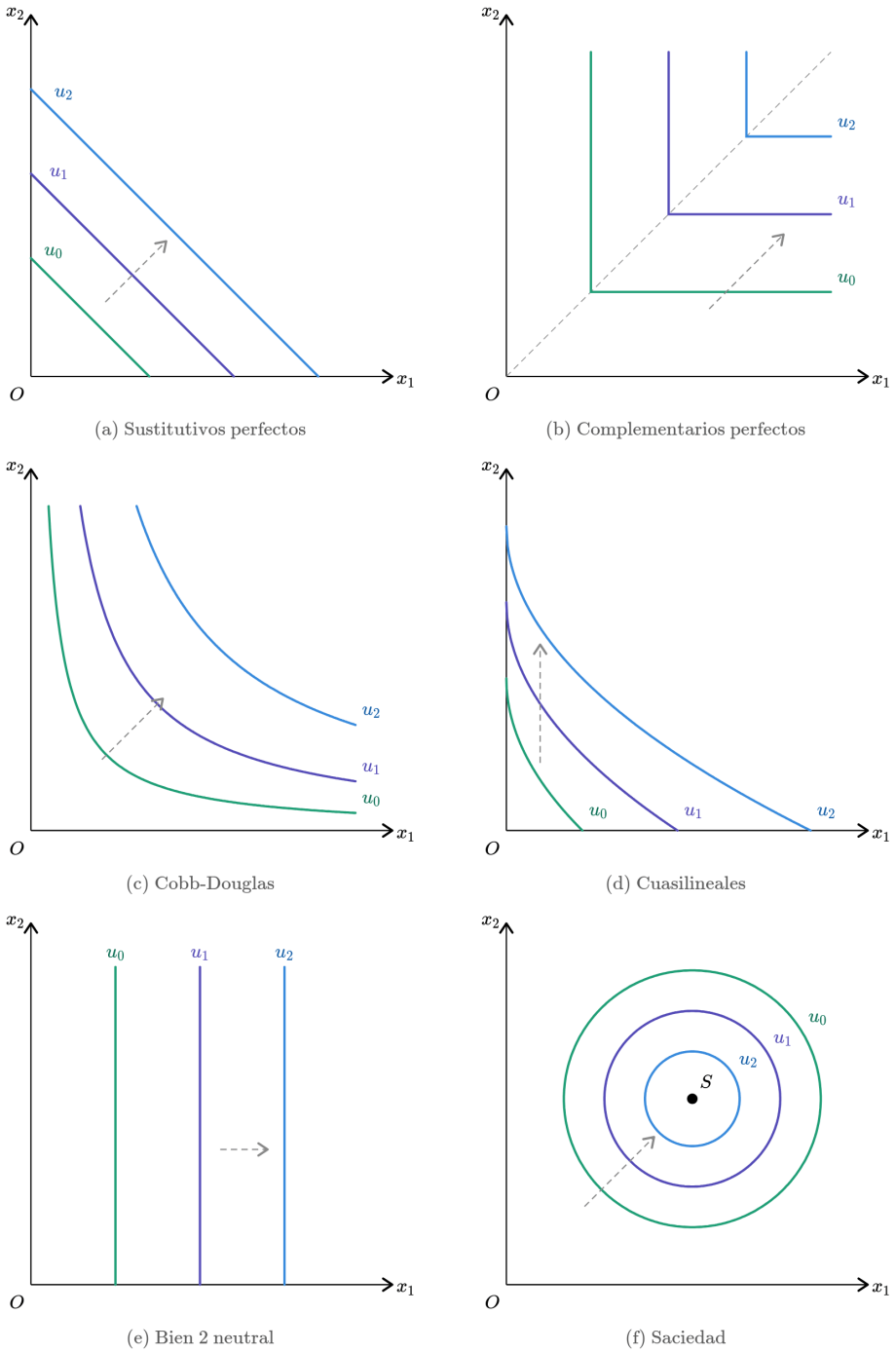


Figura A8.13: Tipos de preferencias con dos bienes: (a) sustitutivos perfectos, (b) complementarios perfectos, (c) Cobb-Douglas, (d) cuasilineales, (e) bien 2 neutral y (f) saciedad en la cesta S. La flecha gris indica el sentido en que aumenta la utilidad.

A.1.2. Males y convexidad

Un *mal* es una mercancía con utilidad marginal negativa, de la que el consumidor prefiere tener menos, como la contaminación, el riesgo de una cartera o el trabajo. Su presencia cambia dos rasgos de las curvas de indiferencia:

1. *Pendiente*: con un bien, x_1, y un mal, x_2, mantener la utilidad cuando aumenta x_1 exige más del mal, de modo que las curvas son crecientes. La RMS del apartado 1.2.3 sería negativa, y por eso se trabaja con la pendiente de la curva, $dx_2/dx_1 = -(\partial u/\partial x_1)/(\partial u/\partial x_2) > 0$. Con dos males, las curvas vuelven a ser decrecientes.

2. *Sentido de la mejora*: la utilidad aumenta hacia abajo y a la derecha con un bien y un mal, y hacia el origen con dos males.

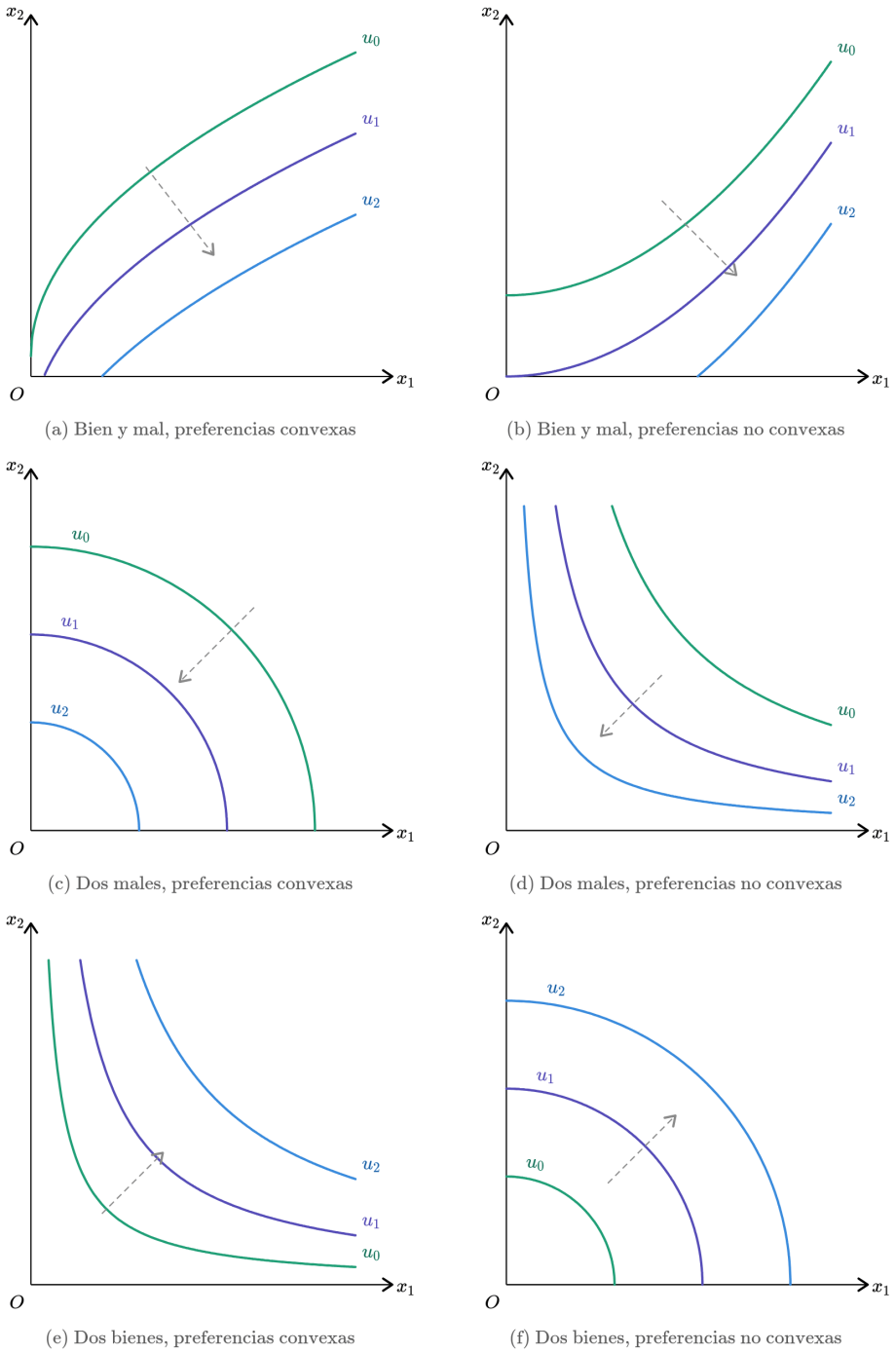
También cambia la lectura de la convexidad. Las preferencias son convexas cuando lo es el conjunto de cestas al menos tan preferidas como una dada (el contorno superior del apartado 1.1.3), es decir, cuando el segmento que une dos cestas indiferentes queda del lado de las cestas mejores. Con males, ese conjunto queda por debajo de la curva (un bien y un mal) o entre la curva y el origen (dos males). Una misma curva puede representar, por tanto, preferencias convexas o no convexas según el sentido en que aumente la utilidad, y la convexidad de las preferencias deja de equivaler a que las curvas sean convexas respecto al origen.

En el plano de bienes, (x_1, x_2) (figura A8.14), la columna izquierda representa preferencias convexas y la derecha, no convexas. Cada panel dibuja tres curvas de indiferencia, con $u_0 < u_1 < u_2$, y la flecha gris señala el sentido en que aumenta la utilidad:

1. *Un bien y un mal* (paneles a y b): con $u = v(x_1) - x_2$, las curvas son crecientes. Si la utilidad marginal del bien es decreciente (v cóncava, panel a), cada unidad adicional del bien compensa cada vez menos unidades del mal, las curvas son cóncavas y las preferencias, convexas. Si es creciente (v convexa, panel b), las curvas son convexas y las preferencias, no convexas. Cuando el mal se lleva al eje de abscisas, como el riesgo en el plano riesgo-rendimiento (tema B23), las preferencias convexas dan curvas crecientes y convexas.

2. *Dos males* (paneles c y d): la utilidad aumenta hacia el origen. Con una desutilidad marginal creciente, como en $u = -(x_1^2 + x_2^2)$ (panel c), las curvas son cóncavas respecto al origen y las preferencias, convexas, porque el consumidor prefiere repartir los dos males a soportar mucho de uno solo. Con una desutilidad marginal decreciente, como en $u = -(\ln x_1 + \ln x_2)$ (panel d), las curvas son convexas respecto al origen, como las de dos bienes, pero las preferencias no son convexas, porque las cestas mejores quedan entre la curva y el origen.

3. *Dos bienes* (paneles e y f): son el caso de referencia. Con $u = \ln x_1 + \ln x_2$, una Cobb-Douglas en logaritmos (panel e), las preferencias son convexas. Con $u = x_1^2 + x_2^2$ (panel f), las curvas son cóncavas respecto al origen y las preferencias, no convexas, porque el consumidor prefiere las cestas extremas (apartado 1.2.3).



(a) Bien y mal, preferencias convexas

(b) Bien y mal, preferencias no convexas

(c) Dos males, preferencias convexas

(d) Dos males, preferencias no convexas

(e) Dos bienes, preferencias convexas

(f) Dos bienes, preferencias no convexas

Figura A8.14: Males y convexidad. La columna izquierda recoge preferencias convexas y la derecha, no convexas, con un bien y un mal (paneles a y b), dos males (c y d) y dos bienes (e y f). Las curvas de (c) y (f) son las mismas, y también las de (d) y (e). Solo cambia el sentido en que aumenta la utilidad, que indica la flecha gris.

Con utilidades aditivamente separables, como las de la figura, basta con que la utilidad marginal de los bienes no crezca y la desutilidad marginal de los males no decrezca para que las preferencias sean convexas (columna izquierda). Con preferencias no convexas (columna derecha), la tangencia con una restricción lineal deja de garantizar un máximo y el óptimo suele estar en una esquina. Por último, un mal puede tratarse como un bien si se mide su ausencia (aire

limpio en lugar de contaminación, ocio en lugar de trabajo), y las curvas vuelven entonces a tener pendiente negativa. Así procede la oferta de trabajo, que se plantea en términos de ocio (tema A25).

A.2. El consumidor con dotaciones iniciales

A lo largo del tema la renta M_0 era exógena. En muchos contextos, sin embargo, el consumidor dispone de una *dotación inicial* de bienes (tiempo, activos, bienes que él mismo produce), $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, que puede consumir o vender en el mercado, de modo que su renta depende de los precios. Este caso es la base de la oferta de trabajo, del consumo intertemporal y de la economía de intercambio del equilibrio general.

A.2.1. Restricción presupuestaria

El valor de lo que el consumidor compra debe igualar el valor de lo que vende más, en su caso, la renta exógena M_0:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \omega_i + M_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \omega_i) = M_0$$

donde $\sum_i p_i \omega_i$ es el valor de mercado de la dotación y $x_i - \omega_i$ la compra (o venta, si es negativa) del bien i. Para dos bienes y sin renta exógena, $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2$.

Planteamiento: el problema del consumidor es el del apartado 1.4.1 con la nueva restricción:

$$\max_{\mathbf{x}} \; u(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.:} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \omega_i) \leq M_0$$

donde $\mathbf{x}$ es la cesta de consumo, $u(\mathbf{x})$ la función de utilidad, p_i el precio del bien i, ω_i la dotación inicial de dicho bien y M_0 la renta exógena.

CPO: la condición de primer orden, $\text{RMS}_{ji} = p_i/p_j$, no cambia, porque la dotación afecta a la posición de la recta, no a la pendiente ni a la regla de decisión.

CSO: tampoco cambian (cuasiconcavidad de u y restricción lineal).

Desarrollo gráfico: en el plano (x_1, x_2) (figura A8.15), la recta presupuestaria tiene la pendiente habitual, $-p_1/p_2$, pero difiere de la del apartado 1.3.2 en dos rasgos:

1. *Pasa siempre por la dotación* (si $M_0 = 0$): sean cuales sean los precios, el consumidor puede consumir ω sin comprar ni vender, por lo que un cambio de precios gira la recta alrededor de ω en lugar de pivotar sobre un eje.

2. *Homogeneidad*: un cambio equiproporcional de todos los precios (inflación pura) no desplaza la recta, pues multiplica por igual el valor de la dotación y el de las compras. Por ello, las demandas siguen siendo homogéneas de grado cero en precios. Si hay renta exógena M_0, la homogeneidad exige que esta varíe en la misma proporción.

A.2.2. Demandas brutas y netas

Definición: la solución del problema, $x_i^m(\mathbf{p}, \omega, M_0)$, es la *demanda bruta* del bien i, es decir, lo que el consumidor acaba consumiendo. La *demanda neta* o exceso de demanda es la diferencia con la dotación:

$$z_i = x_i^m - \omega_i$$

donde $z_i > 0$ indica que el consumidor es *demandante* o comprador neto del bien i y $z_i < 0$ que es *oferente* o vendedor neto. La restricción presupuestaria sin renta exógena se escribe entonces $\sum_i p_i z_i = 0$, de modo que el valor de las demandas netas es nulo (ley de Walras en términos de excesos de demanda).

Gráficamente, en el plano de bienes (figura A8.15), la dotación divide la recta presupuestaria en dos tramos. Si el óptimo queda a la derecha de ω, el consumidor vende bien 2 para comprar bien 1 ($z_1 > 0$, $z_2 < 0$), y si queda a la izquierda, lo contrario. Un cambio de precios gira la recta alrededor de ω y puede convertir a un comprador neto en vendedor neto. Por eso, si sube el precio del bien que vende y sigue siendo vendedor neto, el consumidor mejora (el tramo relevante de la recta se aleja del origen), mientras que si sube el precio del bien que compra y sigue siendo comprador neto, empeora. En la figura, con el precio p_1^0 el óptimo 0 queda a la derecha de ω y el consumidor compra bien 1. Con p_1^1, más alto, el óptimo 1 queda a la izquierda, el consumidor pasa a vender bien 1 y alcanza una utilidad mayor, u_1.

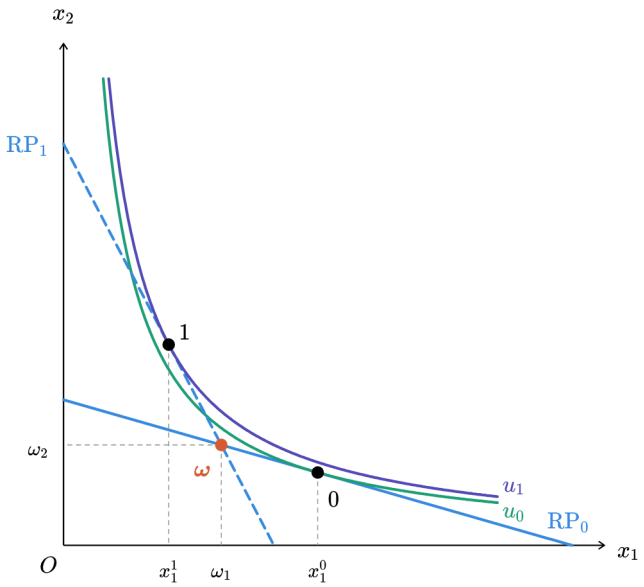


Figura A8.15: Restricción presupuestaria con dotación. Al cambiar los precios, la recta gira alrededor de la dotación, ω. Con p_1^0 el consumidor compra bien 1 (punto 0) y con p_1^1 lo vende (punto 1) y alcanza una utilidad mayor.

A.2.3. Ecuación de Slutsky con dotaciones

Con dotaciones, una variación de p_j altera el poder de compra de la renta dada (efecto renta ordinario) y, además, el valor de la dotación (efecto renta-dotación). La ecuación de Slutsky del apartado 2.2.1 se amplía con un tercer término:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}}_{\text{ES}} \underbrace{- \frac{\partial x_i^m}{\partial M} x_j}_{\text{ERO}} \underbrace{+ \frac{\partial x_i^m}{\partial M} \omega_j}_{\text{ERD}}$$

donde ES es el efecto sustitución y ERO y ERD son los dos efectos renta:

- *Efecto renta ordinario* (ERO): la subida de p_j reduce el poder de compra en proporción a lo que se consume, x_j, que por el lema de Shephard es $\partial e/\partial p_j$.

- *Efecto renta-dotación* (ERD): la subida de p_j aumenta el valor de la dotación en proporción a lo que se posee, ω_j.

Ambos efectos renta se expresan con $\partial x_i/\partial M$, pero su naturaleza es distinta, ya que el ordinario opera sobre el gasto y el de dotación, sobre el ingreso.

Formulación reducida: si se agrupan ambos efectos renta, se obtiene:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^m}{\partial M} (\omega_j - x_j) = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^m}{\partial M} z_j$$

donde el signo del efecto renta total depende de la posición neta en el bien j. Para un bien normal, la subida de p_j tiene un efecto renta negativo si el consumidor es comprador neto ($z_j > 0$) y positivo si es vendedor neto ($z_j < 0$). En este segundo caso el efecto renta se opone al efecto sustitución propio, y la demanda bruta del bien j puede aumentar con su precio sin que el bien sea Giffen.

A.2.4. Aplicaciones

La ecuación de Slutsky con dotaciones es la base de tres desarrollos que se tratan en sus temas respectivos:

1. *Oferta de trabajo*: la dotación es el tiempo disponible y el precio el salario. El consumidor es vendedor neto de ocio, por lo que el efecto renta-dotación de una subida salarial se opone al efecto sustitución y explica la posible pendiente negativa de la curva de oferta de trabajo (tema A25).

2. *Consumo intertemporal*: la dotación es la corriente de rentas presente y futura y el precio el tipo de interés. El signo del efecto renta de una subida del tipo depende de que el individuo sea prestamista (vendedor neto de consumo presente) o prestatario. Sobre esta aplicación se construyen las hipótesis de la renta permanente y del ciclo vital (temas A29 y A33).

3. *Equilibrio general de intercambio*: en una economía sin producción, las demandas netas de todos los consumidores deben sumar cero en cada mercado. La caja de Edgeworth-Bowley representa el caso de dos bienes y dos consumidores, y en ella se ilustran los teoremas del bienestar (tema A21).

A.3. Extensiones desarrolladas en otros temas

El modelo de este tema se extiende en varias direcciones que reciben tratamiento propio:

Tabla A8.4: Extensiones del modelo del consumidor tratadas en otros temas.

Extensión	Idea	Tema
Enfoque dual	Minimizar el gasto para una utilidad dada: función de gasto, demandas hicksianas e identidades primal-dual	A09
Elección con incertidumbre	Utilidad esperada de von Neumann y Morgenstern (1944): $u^e(\mathbf{l}) = \mathbb{E}[u(\mathbf{l})]$; actitudes ante el riesgo	A10
Consumidor con dotaciones	Oferta de trabajo y capital humano, consumo intertemporal y equilibrio general de intercambio (Anexo A.2.4)	A21, A25, A29, A33

A.4. Ejemplos resueltos

Ejemplo: demandas marshallianas con una función Cobb-Douglas

Sea $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$. Como $u = 0$ si algún consumo es nulo, la solución es interior y las CPO se cumplen con igualdad: $\partial u/\partial x_1 = \alpha u/x_1 = \lambda p_1$ y $\partial u/\partial x_2 = (1-\alpha)u/x_2 = \lambda p_2$. Dividiendo ambas:

$$\mathrm{RMS}_{21} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \;\Rightarrow\; p_2 x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha}\, p_1 x_1$$

Sustituyendo en la recta de balance, $p_1 x_1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} p_1 x_1 = M_0$, y generalizando para cualesquiera precios y renta:

$$x_1^m = d_1(\mathbf{p}, M) = \frac{\alpha M}{p_1}, \qquad x_2^m = d_2(\mathbf{p}, M) = \frac{(1-\alpha)M}{p_2}$$

Cada bien absorbe una fracción constante del gasto ($p_1 x_1^m / M = \alpha$), y de ello se derivan la elasticidad-precio unitaria y la ausencia de efecto del precio cruzado propias de la Cobb-Douglas. Con $\alpha = 1/2$, la utilidad máxima es $u^* = M/(2p_1^{1/2}p_2^{1/2})$, la función indirecta de utilidad del apartado 1.4.3.

A9. Dualidad y aplicaciones

Teoría de la demanda del consumidor (II). Dualidad e integrabilidad de las preferencias. Sistemas de demanda utilizados en estudios empíricos. Medidas de cambio en el bienestar.

Introducción

> **Introducción común.** Los temas A08 y A09 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A08**. Presenta las teorías de la elección y de la demanda del consumidor y los dos enfoques que las han sostenido, el de la utilidad cardinal de los marginalistas y el de la utilidad ordinal, sobre el que descansa la teoría actual.

La teoría neoclásica de la demanda del consumidor (tema A08) plantea la elección como el **problema primal**, la maximización de la utilidad sujeta a la restricción presupuestaria. El mismo equilibrio puede alcanzarse también "dándole la vuelta" al problema, minimizando el gasto necesario para alcanzar un nivel de utilidad dado, lo que constituye el **problema dual**. La **dualidad** es el conjunto de relaciones entre ambos problemas, sus soluciones (demandas marshalliana y hicksiana) y sus funciones de valor (función indirecta de utilidad y función de gasto).

Su interés es doble. Analíticamente, basta con resolver uno de los dos problemas para obtener todas las funciones del otro, y el dual es a menudo más sencillo. Teóricamente, la dualidad proporciona la derivación formal de la ecuación de Slutsky y resuelve el problema de la **integrabilidad** (si de unas demandas observadas pueden recuperarse unas preferencias). Además, fundamenta los sistemas de demanda con los que se estima empíricamente la teoría y proporciona las medidas monetarias del bienestar (variaciones compensatoria y equivalente, números índice) con las que se evalúan los cambios de precios y las políticas.

La **identidad de Roy** permite obtener las demandas marshallianas a partir de la función indirecta de utilidad, y el **lema de Shephard**, las hicksianas a partir de la función de gasto, sin resolver de nuevo ningún problema de optimización. El mismo razonamiento se aplica a la empresa, cuya función de costes resume la tecnología (tema A12).

En la práctica, el sistema de demanda casi ideal de Deaton y Muellbauer (1980), que se deriva de una función de gasto, se estima con encuestas de presupuestos familiares para conocer cómo responden los hogares a los precios y a la renta. Las variaciones compensatoria y equivalente miden el coste de bienestar de una subida de precios o de impuestos, y los números índice de precios, con el índice de precios de consumo a la cabeza, aproximan el coste de la vida con el mismo aparato.

El tema estudia el análisis dual y sus aplicaciones en tres pasos:

- *Problema primal*: se desarrolla junto con sus dos productos, la función de demanda marshalliana y la función indirecta de utilidad.

- *Problema dual*: en paralelo, se desarrolla y se compara con el primal mediante las relaciones de dualidad.

- *Extensiones y aplicaciones*: se presentan las implicaciones teóricas, los sistemas de demanda empíricos y las medidas de cambio de bienestar.

1. Fundamentos del análisis dual: el problema primal

La teoría neoclásica trata al consumidor como un agente racional que persigue la mayor utilidad que le permite su renta disponible, una variable exógena. El marco es estático y de certidumbre, y la utilidad nace de comprar bienes de consumo final.

> Los axiomas de las preferencias, la función de utilidad, las curvas de indiferencia y la restricción presupuestaria se desarrollan en el tema A08. Aquí se retoma el problema primal con el detalle necesario para que el problema dual de la sección 2 pueda presentarse como su imagen especular.

1.1. El problema primal: maximización de la utilidad

Dados precios y renta, exógenos, el consumidor elige en el conjunto asequible $\text{CA} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq M_0\}$[1] la cesta de máxima utilidad.

Planteamiento: el consumidor maximiza su utilidad sujeto a la restricción presupuestaria:

$$\max_{\mathbf{x}} \; u(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} \sum p_i x_i \leq M_0 \\ x_i \geq 0 \; \forall i \end{cases}$$

donde u es la función de utilidad, $\mathbf{x}$ la cesta, p_i los precios y M_0 la renta. El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = u(\mathbf{x}) + \lambda \left(M_0 - \sum p_i x_i \right)$$

CPO: con preferencias monótonas y solución interior, el consumidor agota su renta y la condición de primer orden es la tangencia entre curva de indiferencia y recta de balance, $\text{RMS}_{ji} \equiv \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}$ para cada par de bienes i, j. La tasa subjetiva de intercambio iguala así al precio relativo (o, lo que es lo mismo, $\frac{\partial u / \partial x_i}{p_i} = \lambda$ en todos los bienes, la utilidad marginal de la renta).

CSO: con utilidad estrictamente cuasicóncava (curvas de indiferencia estrictamente convexas), la tangencia es el máximo y la solución es única.

Solución: se obtienen las demandas marshallianas, $x_i^m = d_i(\mathbf{p}, M)$.

Función de valor óptimo: se obtiene la función indirecta de utilidad, $v(\mathbf{p}, M) = u(\mathbf{d}(\mathbf{p}, M))$.

> El lagrangiano y el precio sombra de la renta, las soluciones interior y de esquina (Kuhn-Tucker), la CSO y el desarrollo gráfico se encuentran en el tema A08, apartado 1.4.1.

[1] El conjunto asequible es cerrado, acotado (con precios estrictamente positivos) y convexo, lo que, con una función de utilidad continua, garantiza la existencia de solución (teorema de Weierstrass) y, con preferencias estrictamente convexas, su unicidad.

1.2. Función de demanda del problema primal: función de demanda marshalliana

Definición: resolviendo las CPO y la restricción para cualesquiera precios y renta se obtienen las demandas ordinarias, marshallianas o walrasianas:

$$x_i^m \equiv x_i^* = d_i(\mathbf{p}, M)$$

donde d_i es la función de demanda marshalliana del bien i. Las demandas marshallianas son funciones *ordinarias* o no compensadas, ya que, ante una variación de los precios, la renta monetaria permanece fija y la utilidad alcanzada cambia.

Propiedades:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: son continuas en precios y renta (teorema del máximo) y diferenciables si u es C^2 con curvas de indiferencia de curvatura estrictamente positiva (hessiano orlado no singular), lo que permite el análisis de estática comparativa.

2. *Transformaciones*: son homogéneas de grado cero en precios y renta, $d_i(k\mathbf{p}, kM) = d_i(\mathbf{p}, M)$ (ausencia de ilusión monetaria), e invariantes ante transformaciones monótonas crecientes de u, pues dependen de las preferencias y no de su representación.

3. *Inclinación*: en el precio propio, pendiente indeterminada, pues recogen efecto renta y efecto sustitución (negativa salvo para bienes Giffen). En la renta, son crecientes para bienes normales y decrecientes para bienes inferiores.

4. *Forma*: la teoría no restringe su curvatura respecto al precio. La restricción de segundo orden recae sobre la matriz de Slutsky, que reúne sus pendientes compensadas y es simétrica y semidefinida negativa (apartado 3.1.2).

5. *Otras propiedades*:

- *Agotamiento de la renta*: cumplen la ley de Walras, $\sum_i p_i d_i(\mathbf{p}, M) = M$.

- *Envolvente* (*identidad de Roy*): son el cociente, cambiado de signo, de las derivadas de la función indirecta de utilidad respecto al precio y a la renta, $d_i = -(\partial v/\partial p_i)/(\partial v/\partial M)$.

- *Dualidad*: coinciden con las hicksianas evaluadas en la utilidad máxima, $d_i(\mathbf{p}, M) = h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M))$ (apartado 2.4.2).

- *Integrabilidad*: de ellas pueden recuperarse la función de gasto y las preferencias si cumplen las condiciones del teorema de la integrabilidad (apartado 3.1.3).

- *Observabilidad*: son estimables a partir de datos de precios, rentas y cantidades.

> La derivación y las propiedades de la demanda marshalliana se encuentran en el tema A08, apartado 1.4.2.

1.3. Función de valor óptimo del problema primal: función indirecta de utilidad

Definición: la *función indirecta de utilidad* (FIU) es la utilidad máxima alcanzable para cada par de precios y renta. Se obtiene sustituyendo las demandas marshallianas en la función objetivo:

$$v(\mathbf{p}, M) = u(\mathbf{d}(\mathbf{p}, M)) = \max_{\mathbf{x}} \; u(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.: } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = M$$

donde v es la FIU y $\mathbf{d}(\mathbf{p}, M)$ el vector de demandas marshallianas, de modo que la utilidad depende indirectamente de precios y renta.

Propiedades:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en precios y renta (teorema del máximo) y diferenciable cuando lo son las demandas, lo que permite aplicar el teorema de la envolvente.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado cero en precios y renta, $v(k\mathbf{p}, kM) = v(\mathbf{p}, M)$ (ausencia de ilusión monetaria). Además, como la utilidad es ordinal, toda transformación monótona creciente de v es también una FIU de las mismas preferencias, lo que permite una representación monetaria (apartado 3.3.1).

3. *Inclinación*: estrictamente creciente en renta, $\partial v/\partial M = \lambda > 0$ (por la monotonía de las preferencias), y no creciente en precios, $\partial v/\partial p_i = -\lambda x_i \leq 0$.

4. *Forma*: cuasiconvexa en precios, es decir, un vector de precios promedio de dos situaciones no es mejor que al menos una de ellas.

5. *Otras propiedades*:

- *Envolvente* (*identidad de Roy*): sus derivadas son $\partial v/\partial p_i = -\lambda x_i^*$ y $\partial v/\partial M = \lambda$, cuyo cociente recupera la demanda marshalliana (Roy, 1942), $d_i(\mathbf{p}, M) = -\dfrac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial M}$.

- *Dualidad*: evaluada en el gasto mínimo, devuelve la utilidad exigida, $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0)) = u_0$, de modo que invirtiendo v respecto a la renta se obtiene la función de gasto (apartado 2.4.3).

- *Observabilidad*: no es observable, pues la utilidad no lo es.

> La función indirecta de utilidad se introduce en el tema A08, apartado 1.4.3. Sus propiedades se desarrollan aquí porque son el insumo de la dualidad de la sección 2.

1.4. Conclusiones

El problema primal elige, con precios y renta dados, la cesta asequible de máxima utilidad. Con preferencias monótonas y solución interior, el consumidor agota su renta e iguala la relación marginal de sustitución al precio relativo, con una misma utilidad marginal por euro en todos los bienes, igual a λ, la utilidad marginal de la renta. La cuasiconcavidad estricta asegura que esa tangencia es un máximo único. Resuelta para cualesquiera precios y renta, la elección da las demandas marshallianas, observables y homogéneas de grado cero en precios y renta, cuya pendiente en el precio propio es indeterminada porque suma el efecto renta y el efecto sustitución.

La función indirecta de utilidad mide, en cambio, la utilidad máxima alcanzable, que no es observable. Sus derivadas respecto a un precio y a la renta devuelven las demandas marshallianas por la identidad de Roy, y su inversión respecto a la renta conduce a la función de gasto. Ese paso abre el problema dual de la sección 2, que intercambia los papeles de la renta y de la utilidad.

2. Análisis de dualidad

Esta sección desarrolla el problema dual con la misma estructura que el primal (problema, función de demanda y función de valor) y compara después ambos problemas.

2.1. El problema dual: minimización del gasto

El problema dual invierte los papeles de la función objetivo y de la restricción del primal. Dados los precios y un nivel de utilidad exigido, el consumidor busca la cesta que lo alcanza con el mínimo gasto. De este modo, la renta deja de ser un dato y pasa a ser el resultado del problema, y la utilidad deja de ser el resultado y pasa a ser el dato. El primer producto del problema dual es la misma cesta óptima que la del primal. Al generalizar para cualesquiera precios y utilidad, se obtienen además la función de demanda hicksiana y la función de gasto.

Planteamiento: suponiendo solución interior, el programa es:

$$\min_{\mathbf{x}} \; G = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \quad \text{s.a.:} \begin{cases} u(\mathbf{x}) \geq u_0 \\ x_i \geq 0 \; \forall i \end{cases}$$

donde G es el gasto, $\mathbf{p}$ el vector de precios, $\mathbf{x}$ la cesta y u_0 el nivel de utilidad exigido. El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mu \left(u_0 - u(\mathbf{x}) \right)$$

donde el multiplicador $\mu = 1/\lambda$ es el coste marginal de la utilidad, $\mu = \partial G^*/\partial u$, es decir, el gasto adicional necesario para obtener una unidad más de utilidad. Este multiplicador es el precio sombra de la utilidad, simétrico del precio sombra de la renta del primal.

CPO (condiciones de primer orden), con solución interior y la restricción agotada:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = u_0 - u(\mathbf{x}^*) = 0 \;\Rightarrow\; u(\mathbf{x}^*) = u_0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = p_i - \mu \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{p_i}{\mu} \;\Rightarrow\; \text{RMS}_{ji} = \frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j} \tag{2}$$

La intuición es simétrica a la del primal, en el sentido de que (1) el consumidor alcanza exactamente la utilidad exigida, sin exceso, y (2) iguala el precio de cada bien a su utilidad marginal valorada al coste marginal de la utilidad. Del cumplimiento de las CPO se obtiene la misma condición de tangencia que en el primal, $\text{RMS}_{ji} = p_i/p_j$, propia de una solución interior[2].

CSO (condiciones de segundo orden): la tangencia es un mínimo si el conjunto de cestas que alcanzan u_0 es convexo, es decir, si la función de utilidad es cuasicóncava. La condición sobre las preferencias es la misma que en el primal, pues ahora el conjunto de contorno superior de u actúa de restricción.

Solución: se obtienen las demandas hicksianas, $x_i^h = h_i(\mathbf{p}, u_0)$.

Desarrollo gráfico: la minimización del gasto se representa en el plano (x_1, x_2) (figura A9.1):

[2] Con dos bienes y solución de esquina en $x_2 = 0$: $\text{RMS}_{21} = \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} \geq p_1/p_2$, y el método sería Kuhn-Tucker (restricciones de desigualdad).

1. *Curva de indiferencia objetivo* (u_0): es ahora la restricción. Permanece fija y el consumidor se desplaza sobre ella buscando la isogasto más cercana al origen.

2. *Rectas isogasto*: cada una es el lugar geométrico de las cestas que suponen un mismo gasto G dados unos precios $\mathbf{p}$. Su pendiente es también $-p_1/p_2$ y cortan el eje horizontal en G/p_1, de modo que el gasto disminuye al acercarse al origen.

3. *Equilibrio*: en el punto 0, de tangencia entre la curva de indiferencia objetivo y la isogasto más baja compatible con ella, G^*, se elige la cesta (x_1^h, x_2^h). En cambio, la isogasto G_1 no alcanza u_0, y la G_2 la alcanza con un gasto mayor.

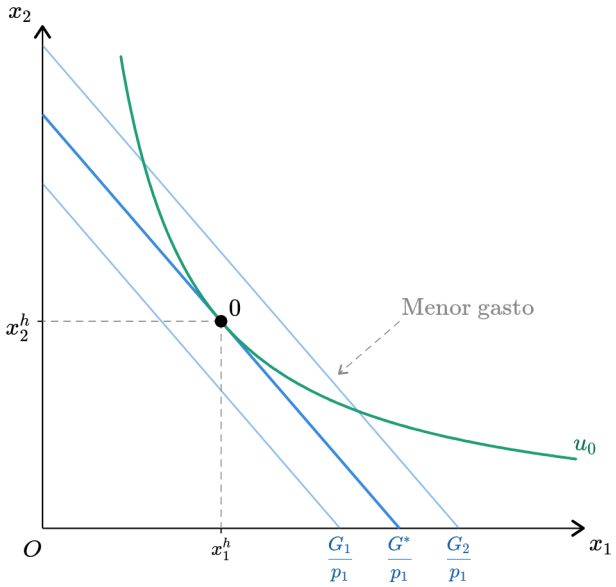


Figura A9.1: El problema dual. Consiste en minimizar el gasto necesario para alcanzar un nivel de utilidad dado. La solución se sitúa en la tangencia entre la curva u_0 y la recta isogasto más baja compatible con ella.

Función de valor óptimo: se obtiene la función de gasto, $e(\mathbf{p}, u_0) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}, u_0)$.

2.2. Función de demanda del problema dual: función de demanda hicksiana

Definición: resolviendo el sistema formado por las CPO y la restricción de utilidad y generalizando para cualesquiera precios y utilidad, se obtienen las *funciones de demanda hicksianas*. Expresan la cantidad óptima demandada de cada bien como función de los precios y de la utilidad exigida, es decir, la cesta que permite alcanzar un nivel de utilidad dado con el mínimo gasto:

$$x_i^h \equiv x_i^* = h_i(\mathbf{p}, u_0)$$

donde h_i es la función de demanda hicksiana del bien i. Las demandas hicksianas son funciones *compensadas*, ya que, para garantizar que se alcanza el nivel de utilidad exigido, ante una variación de los precios el gasto no permanece fijo, sino que se reajusta. Mantienen así constante la renta real en el sentido de Hicks mediante una compensación hipotética de renta.

Propiedades:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: son continuas en precios y utilidad (teorema del máximo) y diferenciables bajo los supuestos habituales, lo que permite el análisis de estática comparativa.

2. *Transformaciones*: son homogéneas de grado cero en precios, $h_i(k\mathbf{p}, u_0) = h_i(\mathbf{p}, u_0)$, de modo que, ante un aumento equiproporcional de los precios, el gasto monetario sube en la misma proporción, pero la cesta no cambia (ausencia de ilusión monetaria).

3. *Inclinación*: al ser compensadas solo recogen el efecto sustitución, por lo que son siempre no crecientes en el precio propio (ley de la demanda compensada) y no admiten bienes Giffen. Además, para un bien normal son más inclinadas (menos elásticas) que las marshallianas, pues no incorporan el efecto renta.

4. *Forma*: la teoría tampoco restringe su curvatura respecto al precio. La restricción de segundo orden recae sobre la función de gasto, cóncava en precios. Como las pendientes de las demandas hicksianas son las segundas derivadas de esa función, forman una matriz simétrica que la concavidad hace semidefinida negativa (apartado 3.1.2).

5. *Otras propiedades*:

- *No exceso de utilidad*: se alcanza exactamente el nivel de utilidad exigido, $u(\mathbf{h}(\mathbf{p}, u_0)) = u_0$, y no más.

- *Envolvente* (*lema de Shephard*): son el gradiente de la función de gasto, $h_i = \partial e / \partial p_i$.

- *Dualidad*: coinciden con las marshallianas evaluadas en el gasto mínimo, $h_i(\mathbf{p}, u_0) = d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0))$.

- *Integrabilidad*: la función de gasto se recupera integrándolas cuando la matriz de sustitución es simétrica y semidefinida negativa (apartado 3.1.3).

- *Observabilidad*: no son directamente observables, pues la utilidad no lo es[3]. Son, por ello, una construcción teórica que solo puede recuperarse indirectamente a partir de las demandas marshallianas mediante la dualidad.

2.3. Función de valor óptimo del problema dual: función de gasto

Definición: la función de valor óptimo del problema dual se construye sustituyendo el vector de demandas hicksianas $\mathbf{x}^* = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u_0)$ en la función objetivo $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$, y se denomina *función de gasto* (FG):

$$G^* = e(\mathbf{p}, u_0) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}, u_0) = \min_{\mathbf{x}} \ \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \quad \text{s.a.: } u(\mathbf{x}) = u_0$$

donde e es la función de gasto y $\mathbf{h}$ el vector de demandas hicksianas. Da el mínimo gasto necesario para cada vector de precios y nivel de utilidad exigido, sin necesidad de repetir el problema. Sus propiedades son análogas a las de la función de costes en la teoría de la producción (tema A12).

Propiedades:

[3] En el caso de demandas compensadas de factores, a pesar de su naturaleza similar, esto no ocurre porque el *output* es observable.

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en precios y utilidad y diferenciable en precios, lo que permite aplicar el teorema de la envolvente.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado uno en precios, $e(k\mathbf{p}, u_0) = k \cdot e(\mathbf{p}, u_0)$, es decir, un cambio equiproporcional en los precios deja inalterada la cesta elegida, pero multiplica el gasto en la misma proporción.

3. *Inclinación*: estrictamente creciente en utilidad, $\partial e/\partial u = \mu > 0$ (una mayor utilidad exige siempre más gasto), y no decreciente en precios, $\partial e/\partial p_i = h_i \geq 0$ (un aumento de los precios nunca reduce el gasto mínimo).

4. *Forma*: es cóncava en precios para un nivel de utilidad dado, $\partial^2 e/\partial p_i^2 \leq 0$, es decir, los aumentos de un precio elevan el gasto mínimo menos de lo que lo harían si la cesta se mantuviese fija, gracias a la posibilidad de sustituir entre bienes. De ahí que la matriz de Slutsky sea semidefinida negativa (apartado 3.1.2). La concavidad implica que el consumo compensado del bien encarecido no aumenta, pero no que aumente el de todos los demás, porque algunos pueden ser complementarios netos del bien encarecido y reducirse también, mientras la sustitución se dirige hacia otros. Si sube la electricidad, por ejemplo, se sustituye por gas, pero puede caer la compra de electrodomésticos eléctricos, complementarios netos de ella.

5. *Otras propiedades*:

- *Envolvente* (*lema de Shephard*): la derivada de la función de gasto respecto a un precio es la demanda hicksiana (Shephard, 1953), $\dfrac{\partial e(\mathbf{p}, u_0)}{\partial p_i} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = x_i^h \equiv x_i^* = h_i(\mathbf{p}, u_0)$. Así, al subir marginalmente un precio, el gasto mínimo aumenta en la cantidad que se consumía de ese bien, porque el reajuste de la cesta es de segundo orden. El lema, con el que se deriva la ecuación de Slutsky (apartado 3.1.1), es el análogo de la identidad de Roy en el problema dual, pero más simple, porque la función objetivo ya está en dinero y no hay multiplicador que eliminar.

- *Dualidad*: evaluada en la utilidad máxima que permite una renta, devuelve esa renta, $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M$, de modo que es la inversa de la FIU respecto a su segundo argumento.

- *Integrabilidad*: recíprocamente, toda función continua, homogénea de grado uno, no decreciente y cóncava en precios (y estrictamente creciente en la utilidad) es la función de gasto de unas preferencias de buen comportamiento, lo que permite resolver el problema de la integrabilidad (apartado 3.1.3).

- *Observabilidad*: no es observable directamente, pero al estar medida en unidades monetarias es la base de las medidas del bienestar (apartado 3.3).

Ejemplo: función de gasto y lema de Shephard con una función Cobb-Douglas

Sea $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$. La tangencia del dual, $\text{RMS}_{21} = x_2/x_1 = p_1/p_2$, implica $p_1 x_1 = p_2 x_2$, es decir, el gasto se reparte a partes iguales, $p_1 x_1 = p_2 x_2 = G^*/2$. Sustituyendo en la restricción de utilidad y despejando el gasto mínimo:

$$u_0 = \left(\frac{G^*}{2p_1}\right)^{1/2} \left(\frac{G^*}{2p_2}\right)^{1/2} = \frac{G^*}{2p_1^{1/2} p_2^{1/2}} \quad \rightarrow \quad e(\mathbf{p}, u_0) = 2u_0\, p_1^{1/2} p_2^{1/2}$$

Es homogénea de grado uno en precios, creciente en la utilidad ($\mu = \partial e/\partial u = 2p_1^{1/2} p_2^{1/2} = 1/\lambda$) y la inversa de la FIU $v = M/(2p_1^{1/2} p_2^{1/2})$ respecto a su segundo argumento. Por el lema de Shephard:

$$x_1^h = \frac{\partial e}{\partial p_1} = u_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2}, \qquad x_2^h = \frac{\partial e}{\partial p_2} = u_0 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2}$$

que coinciden con la hicksiana que se obtiene por otra vía en el apartado 2.4.2. Además, $\partial^2 e/\partial p_1^2 = \partial x_1^h/\partial p_1 = -\frac{1}{2} u_0\, p_2^{1/2} p_1^{-3/2} < 0$. La concavidad de e en precios es, así, la pendiente negativa de la demanda compensada.

2.4. Comparativa: relaciones de dualidad y pendientes

Entre los problemas de maximización de utilidad (PMU) y de minimización del gasto (PMG) se dan tres relaciones de dualidad, pues ambos problemas tienen los mismos componentes. A ellas se añade la comparación de las pendientes de las curvas de demanda que generan.

2.4.1. Dualidad entre soluciones: teorema básico de la dualidad

Las soluciones numéricas o cestas de consumo óptimas de ambos problemas son idénticas, siempre que se realice el debido intercambio de información entre problemas:

1. *Del primal al dual*: si la cesta $\mathbf{x}^*$ es la solución óptima al primal con un nivel de renta fijo M_0, $\mathbf{x}^*$ también es solución óptima en el dual. La condición es que el nivel de utilidad requerida en el dual sea el obtenido en el primal, es decir, $u_0 = u(\mathbf{x}^*) = v(\mathbf{p}, M_0)$. Corolario: $G^* = M_0$.

2. *Del dual al primal*: si la cesta $\mathbf{x}^*$ es solución óptima del dual cuando la utilidad requerida es u_0, entonces $\mathbf{x}^*$ es solución óptima en el primal. La condición es que la renta sea el nivel de gasto incurrido en la solución del PMG, es decir, $M_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = e(\mathbf{p}, u_0)$. Corolario: $u^* = u_0$.

Este resultado se refiere exclusivamente a las cestas (cantidades) óptimas, pues las funciones de demanda marshallianas y las hicksianas son objetos distintos (dependen de distintas variables).

2.4.2. Dualidad entre funciones de demanda

Hallada la función de demanda de uno de los problemas, la del otro se obtiene con la función de valor óptimo de este último:

$$d_i(\mathbf{p}, M) = h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M))$$

$$h_i(\mathbf{p}, u_0) = d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0))$$

donde la primera identidad evalúa la demanda hicksiana en la utilidad máxima del primal y la segunda la marshalliana en el gasto mínimo del dual. La demanda marshalliana se obtiene de la hicksiana y la FIU, y la hicksiana, de la marshalliana y la FG. Esta relación es la extensión natural del teorema básico de dualidad al ámbito de las funciones de demanda.

Ejemplo: de la demanda marshalliana a la hicksiana (Cobb-Douglas)

Con $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, si se parte de la FIU $v = \frac{M}{2p_1^{1/2} p_2^{1/2}}$ y la demanda marshalliana $x_1^m = \frac{M}{2p_1}$, basta con despejar M en la FIU y sustituir:

$$x_1^h = \frac{1}{2p_1} \cdot 2u_0\, p_1^{1/2} p_2^{1/2} = u_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2}$$

2.4.3. Dualidad entre funciones de valor óptimo: inversión

Hallada la función de valor óptimo de uno de los problemas, la del otro se obtiene sin resolverlo, porque la FIU es la inversa de la FG respecto a su segundo argumento (o viceversa) bajo condiciones muy generales:

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M \quad \rightarrow \quad v(\mathbf{p}, M) = e^{-1}(\mathbf{p}, M)$$

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0)) = u_0 \quad \rightarrow \quad e(\mathbf{p}, u_0) = v^{-1}(\mathbf{p}, u_0)$$

2.4.4. Comparativa de las pendientes de las curvas de demanda

La demanda marshalliana recoge el efecto total de una variación del precio, suma del efecto sustitución y del efecto renta, mientras que la hicksiana solo recoge el efecto sustitución. La diferencia entre ambas pendientes respecto al precio propio es, por tanto, el efecto renta, cuyo signo depende del tipo de bien. En elasticidades, que es la forma en que la comparación se lleva a los datos:

$$\varepsilon_{ii}^m = \varepsilon_{ii}^c - s_i\, \varepsilon_{iM}$$

donde ε_{ii}^m es la elasticidad-precio marshalliana, ε_{ii}^c la compensada, s_i la participación del bien en el gasto y ε_{iM} su elasticidad-renta. Para un bien normal ($\varepsilon_{iM} > 0$) la marshalliana es más elástica que la hicksiana, y para un bien inferior no Giffen, menos, mientras que para un bien frontera ($\varepsilon_{iM} = 0$) ambas coinciden. La expresión se deriva formalmente en el apartado 3.1.1.

Desarrollo gráfico: en el plano (x_1, p_1) (figura A9.2) se proyectan los equilibrios del plano de bienes, donde la recta de balance del primal se corresponde con la recta isogasto del dual y la curva de indiferencia es la misma en ambos problemas:

1. *Demanda marshalliana*, $x_1^m(\mathbf{p}, M_0)$: en el primal, la curva de indiferencia alcanzada se desplaza ante variaciones de precios y renta. Así, ante una bajada del precio, la demanda añade al movimiento a lo largo de la curva de indiferencia el salto a una curva superior, y recoge el efecto total del precio con la renta monetaria constante.

2. *Demanda hicksiana*, $x_1^h(\mathbf{p}, u_0)$: en el dual, la curva de indiferencia permanece fija y la demanda solo recoge el movimiento a lo largo de ella. Por eso, para un bien normal es más inclinada (menos elástica) que la marshalliana.

3. *Punto de corte*: ambas curvas se cortan en el punto 0, al precio inicial p_1^0, porque allí la utilidad exigida en el dual, u_0, es la máxima que permite la renta M_0 en el primal.

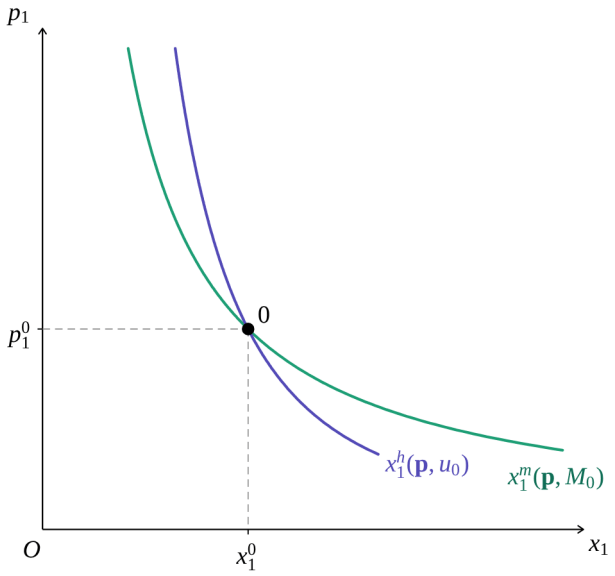


Figura A9.2: Demanda marshalliana y demanda hicksiana. Ante una bajada del precio, la demanda compensada recoge solo el efecto sustitución, por lo que es menos elástica para un bien normal.

2.5. Conclusiones

El problema dual invierte los papeles del primal al fijar la utilidad y minimizar el gasto necesario para alcanzarla. Su multiplicador, $\mu = 1/\lambda$, es el coste marginal de la utilidad, y su solución coincide con la del primal cuando la utilidad exigida es la máxima de este. Las demandas hicksianas, compensadas, solo recogen el efecto sustitución, por lo que nunca crecen con el precio propio y excluyen los bienes Giffen, pero no son directamente observables. La función de gasto, homogénea de grado uno y cóncava en precios, reúne esa información, porque sus derivadas son las demandas hicksianas (lema de Shephard).

Las relaciones de dualidad enlazan los dos problemas en sus soluciones, sus demandas y sus funciones de valor, de modo que basta resolver uno para obtener todas las funciones del otro. La comparación de pendientes añade que las dos demandas difieren en el efecto renta. De esas identidades se deducen, en la sección 3, la ecuación de Slutsky y el teorema de la integrabilidad, y la función de gasto, medida en dinero, sirve allí de métrica del bienestar. La tabla A9.1 resume las cuatro funciones y sus relaciones.

Tabla A9.1: Problema primal y problema dual: funciones y relaciones.

	Problema primal (PMU)	Problema dual (PMG)
Programa	$\max u(\mathbf{x})$ s.a.: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq M_0$	$\min \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ s.a.: $u(\mathbf{x}) \geq u_0$
Dato / resultado	Renta dada, utilidad resultante	Utilidad dada, gasto resultante
Multiplicador	$\lambda = \partial v / \partial M$ (utilidad marginal de la renta)	$\mu = 1/\lambda = \partial e / \partial u$ (coste marginal de la utilidad)
Función de demanda	Marshalliana, $d_i(\mathbf{p}, M)$: observable, homogénea de grado 0 en $(\mathbf{p}, M)$, cualquier pendiente, agota la renta (ley de Walras)	Hicksiana, $h_i(\mathbf{p}, u_0)$: no observable, homogénea de grado 0 en $\mathbf{p}$, no creciente en el precio propio, alcanza exactamente u_0
Función de valor	Indirecta de utilidad, $v(\mathbf{p}, M)$: cuasiconvexa en $\mathbf{p}$	De gasto, $e(\mathbf{p}, u_0)$: cóncava y homogénea de grado 1 en $\mathbf{p}$
Teorema de la envolvente	Identidad de Roy: $d_i = -(\partial v / \partial p_i)/(\partial v / \partial M)$	Lema de Shephard: $h_i = \partial e / \partial p_i$
Relaciones de dualidad	$d_i(\mathbf{p}, M) = h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M))$; $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M$	$h_i(\mathbf{p}, u_0) = d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0))$; $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0)) = u_0$

3. Extensiones y aplicaciones

Conocidas las herramientas, puede pasarse a sus extensiones y aplicaciones: las implicaciones teóricas (la derivación formal de la ecuación de Slutsky y la resolución del problema de la integrabilidad), los sistemas de demanda que se estiman empíricamente y las medidas de cambio de bienestar.

3.1. Implicaciones teóricas: ecuación de Slutsky e integrabilidad

La dualidad tiene dos implicaciones teóricas en direcciones opuestas:

1. *Hacia delante* (de las preferencias a la conducta): la ecuación de Slutsky, que descompone formalmente el efecto de un precio sobre la demanda observable.

2. *Hacia atrás* (de la conducta a las preferencias): el teorema de la integrabilidad, que dice qué condiciones debe cumplir una demanda observada para proceder de unas preferencias racionales.

3.1.1. Ecuación de Slutsky: derivación formal

La **ecuación de Slutsky** descompone el efecto de una variación *ceteris paribus* del precio p_j sobre la demanda marshalliana del bien i en un efecto sustitución, a utilidad constante, y un efecto renta. La dualidad entre funciones de demanda permite derivarla en tres pasos:

1. *Dualidad entre funciones de demanda*: se parte de la identidad que iguala la demanda hicksiana y la marshalliana evaluada en el gasto mínimo, $h_i(\mathbf{p}, u_0) = d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0))$.

2. *Regla de la cadena*: derivando la función de demanda hicksiana respecto a uno de los precios se obtiene la ecuación de Slutsky expresada en términos del gasto:

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^m}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial p_j}$$

3. *Lema de Shephard*: sustituyendo $\frac{\partial e}{\partial p_j} = h_j(\mathbf{p}, u_0) = x_j^*$ y, por dualidad, teniendo en cuenta que en el óptimo $M = G^*$, se llega a la formulación habitual:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^m}{\partial M} \cdot x_j$$

donde x_i^m es la demanda marshalliana, h_i la hicksiana y x_j la cantidad del bien cuyo precio varía.

El primer término del lado derecho representa el efecto sustitución y el segundo (incluido el signo negativo) representa el efecto renta. Su suma es el efecto total de una variación en el precio sobre la cantidad demandada del bien i.

Ecuación de Slutsky en elasticidades: como corolario de la derivación anterior, multiplicando ambos miembros por p_j/x_i se obtiene:

$$\varepsilon_{ij}^m = \varepsilon_{ij}^c - s_j \cdot \varepsilon_{iM}$$

donde ε_{ij}^m es la elasticidad marshalliana (no compensada), ε_{ij}^c la elasticidad hicksiana (compensada), ε_{iM} la elasticidad-renta y $s_j = \frac{p_j x_j}{M}$ la participación del bien j en el gasto. Para $i = j$ es la expresión del apartado 2.4.4.

Consecuencias: el efecto sustitución (ES) queda definido formalmente por derivadas parciales de la demanda hicksiana, y el ES propio (ESP) es no positivo en todo caso, por la concavidad de la función de gasto. Por el contrario, el ES cruzado (ESC) tiene signo indeterminado y permite clasificar los bienes en complementarios netos (ESC < 0), sustitutivos netos (ESC > 0) e independientes (ESC $= 0$). Las clasificaciones por efectos totales (ordinarios, Giffen, rígidos; sustitutivos y complementarios brutos) se desarrollan en el tema A08, apartado 2.2.3.

3.1.2. Matriz de Slutsky: caso general

Si se considera un cambio simultáneo en varios precios, las derivadas parciales se ordenan en forma matricial, en la **matriz de Slutsky** o **matriz de efectos sustitución**. Esta matriz es la hessiana de la función de gasto, es decir, la de sus segundas derivadas respecto de todos los precios. Se obtiene en tres pasos:

1. *Primera derivada*: por el lema de Shephard, derivar la función de gasto respecto a cada precio da la demanda hicksiana: $\partial e(\mathbf{p}, u_0)/\partial p_i = h_i(\mathbf{p}, u_0)$.

2. *Segunda derivada*: derivando de nuevo respecto a cada precio p_j se obtiene el efecto sustitución de p_j sobre el bien i:

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p}, u_0)}{\partial p_i \, \partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, u_0)}{\partial p_j} \equiv S_{ij}$$

donde S_{ij} es el efecto sustitución propio si $i = j$ y cruzado si $i \neq j$, es decir, la pendiente de la demanda hicksiana del bien i respecto al precio del bien j.

3. *Ordenación matricial*: ordenando los n^2 efectos en una matriz $n \times n$, con los propios en la diagonal y los cruzados fuera de ella, se obtiene la matriz de Slutsky, que para dos y para n bienes es:

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_n}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{S}_n$ es la matriz hessiana de $e(\mathbf{p}, u_0)$ respecto a los precios, de modo que el efecto de cualquier vector de variaciones de precios sobre las demandas compensadas es $d\mathbf{h} = \mathbf{S}_n \, d\mathbf{p}$.

Por la ecuación de Slutsky, cada elemento puede calcularse a partir de magnitudes observables, $S_{ij} = \partial x_i^m/\partial p_j + (\partial x_i^m/\partial M)\, x_j$, lo que hace la matriz contrastable.

Propiedades: la matriz de Slutsky tiene dos propiedades de gran alcance:

1. *Simétrica*: los efectos precio-cruzados en las demandas hicksianas son idénticos ($\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j}{\partial p_i}$)[4]. Esto no ocurre, en general, con las demandas ordinarias (sí, p. ej. con preferencias homotéticas). La implicación es que la clasificación de bienes en sustitutivos/complementarios netos es simétrica, pero las relaciones brutas no lo son, porque el efecto renta introduce asimetría (p. ej. Coca-Cola puede ser sustitutivo bruto de Pepsi pero no al revés). Además, por la homogeneidad de grado cero de las hicksianas ($\sum_j p_j S_{ij} = 0$), no todos los bienes pueden ser complementarios netos simultáneamente.

2. *Semidefinida negativa* (por la concavidad en precios de la FG): los efectos precio propios en demandas hicksianas son no positivos[5]. De ahí que las hicksianas cumplan la ley de demanda compensada (pendiente nunca positiva).

3.1.3. Teorema de la integrabilidad (Antonelli, 1886)

La integrabilidad plantea el camino inverso al de la ecuación de Slutsky, porque lo único que se observa en los datos son las demandas marshallianas, no las preferencias que supuestamente las generan.

La cuestión es si un sistema completo de ecuaciones de demanda marshalliana, estimado a partir de la conducta, es compatible con la existencia de unas preferencias de buen comportamiento y, en caso afirmativo, si estas pueden reconstruirse. Giovanni Battista Antonelli[6] planteó y resolvió este problema en 1886, y Hurwicz y Uzawa (1971) le dieron su formulación moderna.

Teorema: la solución pasa por la función de gasto, que contiene toda la información sobre las preferencias y cuyas derivadas son observables a través de la ecuación de Slutsky. El razonamiento sigue tres pasos:

1. *De las demandas a la matriz de Slutsky*: a partir del sistema completo de ecuaciones de demanda marshalliana (SCEDM) se calcula la matriz de Slutsky con la ecuación de Slutsky, $S_{ij} = \partial x_i^m / \partial p_j + (\partial x_i^m / \partial M)\, x_j$, sin necesidad de conocer las demandas hicksianas.

2. *De la matriz de Slutsky a la función de gasto*: como $\partial e / \partial p_i = d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u_0))$ (lema de Shephard y dualidad), la FG se obtiene integrando este sistema, cuyas derivadas respecto a los precios, $S_{ij} = \partial^2 e / \partial p_i \partial p_j$, forman la matriz de Slutsky. Para que ese sistema de ecuaciones en derivadas parciales tenga solución, y para que la solución tenga las propiedades de una FG (apartado 2.3), el SCEDM debe cumplir tres condiciones:

- *Ley de Walras*: las demandas agotan la renta, lo que, junto con la simetría, implica que son homogéneas de grado cero en precios y renta, de donde la FG recuperada es homogénea de grado uno en precios.

- *Simetría*: $S_{ij} = S_{ji}$, que es la condición de integrabilidad propiamente dicha (teorema de Frobenius), es decir, que las derivadas cruzadas de una misma función deben coincidir.

- *Semidefinición negativa*: **S** semidefinida negativa, que garantiza que la FG recuperada es cóncava en precios, es decir, que procede de una minimización del gasto.

[4] Por el teorema de Young-Schwarz-Clairaut, el orden de las derivadas parciales cruzadas no importa.
[5] Si una matriz es semidefinida negativa, los elementos de la diagonal principal son no positivos.
[6] Ingeniero italiano cuyo trabajo de 1886 pasó inadvertido hasta su traducción al inglés en Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K. y Sonnenschein, H. F. (eds.) (1971): *Preferences, Utility, and Demand*, Nueva York, Harcourt Brace Jovanovich.

3. *De la función de gasto a las preferencias*: obtenida la FG, la FIU se recupera por inversión (apartado 2.4.3) y, con ella, una representación de las preferencias.

Las tres condiciones son necesarias y suficientes, en el sentido de que toda demanda que procede de la maximización de una utilidad de buen comportamiento las cumple, y todo sistema completo de ecuaciones de demanda que las cumple procede de alguna utilidad de buen comportamiento.

Relación con las condiciones de agregación: las condiciones de homogeneidad, Engel y Cournot (tema A08, apartado 3.1.3) son consecuencias de la ley de Walras y de la homogeneidad, y esta última se deduce a su vez de Walras y simetría.

Estas condiciones son, por tanto, solo necesarias, ya que un sistema completo de ecuaciones de demanda puede cumplirlas todas y no proceder de ninguna utilidad. Lo que la dualidad añade son las dos condiciones que faltan, simetría y negatividad de la matriz de Slutsky, y con ellas el conjunto pasa a ser suficiente.

Consecuencias: el teorema cierra el círculo del análisis dual. Empíricamente, permite contrastar la teoría del consumidor sin especificar ninguna función de utilidad, porque basta comprobar, o imponer, las tres condiciones sobre las demandas estimadas, que es exactamente lo que hacen los sistemas de demanda que se presentan a continuación[7]. Normativamente, garantiza que de las demandas observadas puede recuperarse la función de gasto, que es la métrica con la que se mide después el bienestar.

3.2. Sistemas de demanda utilizados en estudios empíricos

Un **sistema completo de demanda** es la especificación conjunta de las n ecuaciones de demanda (o de participaciones en el gasto, $s_i = p_i x_i / M$) de un consumidor o de un agregado de consumidores, estimadas simultáneamente con datos de precios, gasto y cantidades.

El fundamento de estos sistemas es la dualidad. En lugar de postular una función de utilidad e intentar resolver el primal, se parte de una forma funcional para la función de gasto (o la FIU) y se obtienen las demandas por el lema de Shephard (o la identidad de Roy). De este modo, las restricciones teóricas (agregación, homogeneidad, simetría) se traducen en restricciones lineales sobre los parámetros, y la negatividad en desigualdades, que pueden imponerse o contrastarse[8]. Hay tres sistemas de referencia.

3.2.1. Sistema lineal de gasto (Klein y Rubin, 1948; Geary, 1950; Stone, 1954)

Origen: el sistema lineal de gasto (SLG) es el resultado de la contribución de varios autores. Klein y Rubin propusieron la forma funcional, Geary derivó la función de utilidad que la genera y Stone estimó por primera vez el SLG como sistema completo con datos británicos. El SLG es el primer sistema no homotético estimado.

Idea: parte de la función de utilidad Stone-Geary, $u = \sum_i \gamma_i \ln(x_i - \bar{x}_i)$ con $\sum_i \gamma_i = 1$, que introduce consumos de *subsistencia* $\bar{x}_i$ cubiertos con independencia de precios y renta.

Planteamiento: su función de gasto es de la forma polar de Gorman, $e(\mathbf{p}, u) = a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})\, u$, con $a(\mathbf{p}) = \sum_k p_k \bar{x}_k$ (el coste de la subsistencia) y $b(\mathbf{p}) = \prod_k (p_k/\gamma_k)^{\gamma_k}$ (tomando como índice de utilidad la transformación monótona $\prod_k (x_k - \bar{x}_k)^{\gamma_k}$), y los gastos resultantes, $p_i x_i$, son lineales en renta y precios:

[7] Encontrar las preferencias concretas requiere resolver el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (teorema de Frobenius), tarea enormemente difícil en la práctica.

[8] La obra de Deaton y Muellbauer (1980b) es la referencia clásica, y en castellano lo es Segura (1986), cap. 5.

$$p_i x_i = p_i \bar{x}_i + \gamma_i \left(M - \sum_k p_k \bar{x}_k \right)$$

donde $\bar{x}_i \geq 0$ es el consumo de subsistencia del bien i, $\gamma_i \in (0,1)$ su proporción de la renta *supernumeraria* $M - \sum_k p_k \bar{x}_k$, y el gasto en cada bien es lineal en la renta, de ahí el nombre.

La agregación ($\sum_i \gamma_i = 1$), la homogeneidad, la simetría y la negatividad se cumplen por construcción, por lo que el sistema es integrable y sus parámetros son pocos ($2n-1$). Además, las curvas de Engel son rectas que no pasan por el origen, lo que, si los parámetros son comunes a los consumidores, satisface la condición de agregación de Gorman y permite el consumidor representativo.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: es parsimonioso y coherente con la teoría.

- *Limitaciones*: es rígido, pues todos los bienes son normales ($\varepsilon_{iM} = \gamma_i M / p_i x_i > 0$), sustitutivos netos y complementarios brutos, y la demanda propia es siempre inelástica si $\bar{x}_i > 0$, $\varepsilon^m_{ii} = -1 + (1-\gamma_i)\bar{x}_i / x_i$. No admite bienes inferiores ni complementarios netos, por lo que impone la teoría en lugar de contrastarla.

3.2.2. Modelo de Rotterdam (Barten, 1964; Theil, 1965)

Origen: Anton Barten y Henri Theil propusieron el modelo en la Escuela de Economía de Rotterdam.

Idea: adopta el enfoque opuesto al SLG. En lugar de partir de una utilidad concreta, especifica directamente el sistema de demanda en *diferenciales logarítmicas*, para que las restricciones de la teoría puedan imponerse y contrastarse una a una.

Planteamiento: diferenciando totalmente las demandas marshallianas y aplicando la ecuación de Slutsky, la variación de la cantidad de cada bien, ponderada por su participación, se descompone en un efecto renta real y efectos precio compensados:

$$s_i \, d\ln x_i = b_i \, d\ln Q + \sum_j c_{ij} \, d\ln p_j$$

donde $d\ln Q = \sum_k s_k \, d\ln x_k$ es el índice de volumen de Divisia (la variación de la renta real), $b_i = p_i \, \partial x_i / \partial M$ la participación marginal del bien i en el gasto ($b_i > 0$ si el bien es normal y $b_i < 0$ si es inferior) y $c_{ij} = (p_i p_j / M) \, \partial h_i / \partial p_j$ los coeficientes de Slutsky ($c_{ii} < 0$, y $c_{ij} \gtrless 0$ según los bienes sean sustitutivos o complementarios netos), que el modelo trata como constantes.

La teoría se traduce en restricciones lineales sobre los coeficientes: agregación ($\sum_i b_i = 1$, $\sum_i c_{ij} = 0$), homogeneidad ($\sum_j c_{ij} = 0$) y simetría ($c_{ij} = c_{ji}$), a las que se añade la negatividad (la matriz $[c_{ij}]$ es semidefinida negativa), que no es lineal. Al ser lineales, las tres primeras pueden imponerse en la estimación o contrastarse con tests convencionales.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: fue el primer sistema en el que homogeneidad y simetría se contrastaron sistemáticamente, con rechazos frecuentes de la homogeneidad que motivaron una larga literatura.

▪ *Limitaciones*: son de orden teórico. Unos coeficientes constantes solo son compatibles globalmente con la maximización de utilidad en un caso muy particular (utilidad Cobb-Douglas), por lo que el modelo es una aproximación local y no procede de una función de gasto global.

3.2.3. Sistema casi ideal de demanda (Deaton y Muellbauer, 1980a)

Origen: Angus Deaton y John Muellbauer buscaron un sistema que reuniera las ventajas de los anteriores (derivado de una función de gasto, como el SLG, y con restricciones lineales contrastables, como Rotterdam). El sistema debía ser, además, una aproximación de primer orden a cualquier sistema de demanda y agregar exactamente sobre consumidores.

Idea: parte de una función de gasto de la clase PIGLOG (*price-independent generalized logarithmic*), logarítmicamente lineal en la utilidad, $\ln e(\mathbf{p}, u) = (1-u)\ln a(\mathbf{p}) + u \ln b(\mathbf{p})$, con $\ln a(\mathbf{p})$ translogarítmica en los precios y $\ln b(\mathbf{p}) = \ln a(\mathbf{p}) + \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}$.

Planteamiento: por el lema de Shephard, las participaciones en el gasto resultan:

$$s_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln \left(\frac{M}{P} \right)$$

donde α_i es la participación autónoma del bien i, $\gamma_{ij} \gtrless 0$ la sensibilidad de su participación al precio j, $\beta_i \gtrless 0$ la de la renta real, $\ln P = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \gamma_{kj} \ln p_k \ln p_j$ es un índice de precios y M/P la renta real. En la práctica P suele aproximarse por el índice de Stone, $\ln P^* = \sum_k s_k \ln p_k$, lo que hace el sistema lineal en los parámetros (LA-AIDS, *Linear Approximate Almost Ideal Demand System*).

Agregación ($\sum_i \alpha_i = 1$, $\sum_i \gamma_{ij} = 0$, $\sum_i \beta_i = 0$), homogeneidad ($\sum_j \gamma_{ij} = 0$) y simetría ($\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$) son restricciones lineales, mientras que la negatividad no puede imponerse linealmente y se comprueba en la muestra. La elasticidad-renta es $\varepsilon_{iM} = 1 + \beta_i / s_i$, de modo que $\beta_i > 0$ identifica los bienes de lujo y $\beta_i < 0$ los de primera necesidad. Las curvas de Engel en participaciones en el gasto son lineales en el logaritmo de la renta (forma de Working-Leser), lo que preserva la agregación exacta (Muellbauer) con un índice de distribución de la renta.

Extensiones: la generalización cuadrática (QUAIDS, Banks, Blundell y Lewbel, 1997) permite curvas de Engel con forma de U invertida.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: satisface los axiomas de elección, es compatible con la agregación, contrasta la teoría y se ajusta a los datos de presupuestos familiares, y a ello se debe su uso generalizado.

▪ *Limitaciones*: el gran número de parámetros con n elevado y la aproximación de Stone, que sesga las elasticidades.

3.2.4. Comparación y aplicaciones empíricas

Aplicaciones: los sistemas de demanda son el instrumento con el que la teoría del consumidor llega a los datos, en cuatro usos principales:

1. *Medición de elasticidades*: precio, cruzadas y renta por grupos de bienes, con datos de encuestas de presupuestos familiares o series temporales agregadas. Estas elasticidades son los parámetros que alimentan los modelos de equilibrio general aplicado y las previsiones de demanda.

2. *Contraste de la teoría*: los tests de homogeneidad y simetría sobre los parámetros. El rechazo frecuente de la homogeneidad en series temporales se atribuye a la agregación, la dinámica omitida y los errores de medida, más que a la irracionalidad.

3. *Evaluación de políticas*: con la función de gasto estimada se calculan las variaciones compensatoria y equivalente de una reforma de la imposición indirecta o de una subida de precios regulados, y su distribución por hogares.

4. *Índices del coste de la vida*: el sesgo de sustitución del IPC se cuantifica comparando el índice de Laspeyres con el índice verdadero implícito en el sistema estimado.

La tabla A9.2 compara los tres sistemas por su punto de partida, la variable explicada, las restricciones, la forma de las curvas de Engel, la agregación y su principal limitación.

Tabla A9.2: Sistemas completos de demanda: comparación.

	SLG (Stone, 1954)	Rotterdam (Barten, 1964, y Theil, 1965)	AIDS (Deaton y Muellbauer, 1980a)
Punto de partida	Utilidad Stone-Geary; FG polar de Gorman	Diferencial total de las demandas	FG PIGLOG
Variable explicada	Gasto $p_i x_i$	$s_i \, d\ln x_i$	Participación s_i
Restricciones	Impuestas por construcción	Lineales (salvo negatividad), contrastables	Lineales (salvo negatividad), contrastables
Curvas de Engel	Lineales, no por el origen	Locales	Lineales en $\ln M$
Agregación	Gorman (exacta si parámetros comunes)	No garantizada	Muellbauer (exacta con índice de distribución)
Limitación	Rígido: sin inferiores ni complementarios netos	Sin FG global	Muchos parámetros; sesgo del índice de Stone

3.3. Análisis normativo: medidas de cambio de bienestar

Hasta ahora, los efectos de los cambios en los precios se han estudiado desde un punto de vista positivo. La pregunta normativa, en cambio, es cómo medir los cambios en el bienestar de un consumidor ante cambios en los precios. Considérese un consumidor con preferencias estables que adquiere dos bienes en dos situaciones, una inicial (precios $\mathbf{p}^0$, renta M_0, utilidad u_0) y una final ($\mathbf{p}^1$, renta M_0, utilidad u_1), tras un cambio de precios debido a inflación, poder de mercado o impuestos.

3.3.1. Utilidad métrica monetaria (Samuelson, 1974)

Definición: dado que las funciones de utilidad son ordinales, el índice de utilidad es un número arbitrario cuya magnitud no tiene significado, aunque su ordenación permita jerarquizar las cestas. La función de gasto ofrece, sin embargo, la salida, que consiste en elegir, entre las representaciones de las preferencias, la que mide la utilidad en dinero. La *función de utilidad métrica monetaria* (FUMM) es el gasto mínimo necesario, a unos precios de referencia $\mathbf{q}$, para alcanzar la utilidad de una cesta $\mathbf{x}$:

$$m(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{q}, u(\mathbf{x}))$$

donde $\mathbf{q}$ son los precios de referencia y $u(\mathbf{x})$ la utilidad de la cesta. Su versión indirecta (FIUMM) sustituye la cesta por la situación $(\mathbf{p}, M)$ que la genera:

$$\tilde{m}(\mathbf{q}; \mathbf{p}, M) = e(\mathbf{q}, v(\mathbf{p}, M))$$

donde $v(\mathbf{p}, M)$ es la FIU. La FIUMM mide así en dinero, a los precios de referencia $\mathbf{q}$, la utilidad máxima que permiten los precios $\mathbf{p}$ y la renta M.

Ejemplo: utilidad métrica monetaria con una función Cobb-Douglas

Sea $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, cuya función de gasto es $e(\mathbf{p}, u) = 2u\, p_1^{1/2} p_2^{1/2}$ y cuya FIU es $v = M/(2p_1^{1/2} p_2^{1/2})$ (apartado 2.3). Sustituyendo en la función de gasto, evaluada a los precios de referencia, la utilidad de la cesta, se obtiene la FUMM:

$$m(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{q}, u(\mathbf{x})) = 2\,(q_1 q_2)^{1/2}\,(x_1 x_2)^{1/2}$$

Sustituyendo, en cambio, la FIU, se obtiene la FIUMM:

$$\tilde{m}(\mathbf{q}; \mathbf{p}, M) = e(\mathbf{q}, v(\mathbf{p}, M)) = M \left(\frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} \right)^{1/2}$$

Con precios de referencia $\mathbf{q} = (4, 1)$, la cesta $\mathbf{x} = (12{,}5;\ 50)$ vale $m = 2 \cdot 2 \cdot 25 = 100$ unidades monetarias. Por su parte, un consumidor con renta $M = 100$ que afronta los precios $\mathbf{p} = (1, 1)$ alcanza una utilidad que, a los precios de referencia, costaría $\tilde{m} = 100 \cdot 4^{1/2} = 200$. Si los precios de referencia coinciden con los vigentes, $\tilde{m} = M$.

Propiedades (con los precios de referencia $\mathbf{q}$ fijos):

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: heredan las de la función de gasto y las de u o de v.

2. *Transformaciones*: ambas son transformaciones monótonas crecientes de la utilidad y, por tanto, representaciones válidas de las preferencias, pero expresadas en unidades monetarias. Además, la FIUMM es, como la FIU, homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, M)$.

3. *Inclinación*: la FUMM es creciente en las cantidades de los bienes, y la FIUMM, creciente en la renta y no creciente en los precios $\mathbf{p}$.

4. *Forma*: la FUMM es cuasicóncava en $\mathbf{x}$ y la FIUMM, cuasiconvexa en $\mathbf{p}$, como u y v.

5. *Otras propiedades*:

- *Dualidad*: con precios de referencia iguales a los vigentes, la FIUMM es la renta, $\tilde{m}(\mathbf{p}; \mathbf{p}, M) = e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M$ (apartado 2.4.3).

- *Observabilidad*: no son observables directamente, porque exigen conocer la función de gasto, pero, al medir la utilidad en dinero, son la base de las medidas exactas del bienestar.

3.3.2. Medidas monetarias del bienestar: VC, VE y VEC

Variación compensatoria (VC) (Hicks, 1939b): es la diferencia entre la renta del consumidor y la renta que, a los precios finales, le permitiría alcanzar su utilidad inicial. Responde así a la pregunta ¿cuánto dinero hay que dar o quitar al consumidor después del cambio de precios para restaurar su bienestar inicial?

$$\text{VC} = e(\mathbf{p}^1, u_1) - e(\mathbf{p}^1, u_0) = M_0 - e(\mathbf{p}^1, u_0)$$

donde $e(\mathbf{p}^1, u_0)$ es lo que costaría la utilidad inicial a los precios finales. La VC es la diferencia de FIUMM con precios de referencia $\mathbf{p}^1$ y, en términos de la demanda hicksiana a la utilidad inicial, $\text{VC} = \int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(\mathbf{p}, u_0)\, dp_i$ para una bajada de p_i. Al valorar el cambio a la utilidad de partida, mide la compensación que habría que pagar (o cobrar) a los afectados para dejarlos como estaban, por lo que es la medida natural cuando se trata de compensar a quienes soportan un cambio[9].

Variación equivalente (VE): es la diferencia entre la renta que, a los precios iniciales, permitiría al consumidor alcanzar su utilidad final y su renta. Responde así a la pregunta ¿cuánto dinero hay que dar o quitar al consumidor antes del cambio para alterar su bienestar en la misma cuantía que el cambio?

$$\text{VE} = e(\mathbf{p}^0, u_1) - e(\mathbf{p}^0, u_0) = e(\mathbf{p}^0, u_1) - M_0$$

donde $e(\mathbf{p}^0, u_1)$ es lo que costaría la utilidad final a los precios iniciales. La VE es la diferencia de FIUMM con referencia $\mathbf{p}^0$ y, en términos de la hicksiana a la utilidad final, $\text{VE} = \int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(\mathbf{p}, u_1)\, dp_i$. A diferencia de la VC, la VE usa como referencia unos precios fijos, los iniciales, cualesquiera que sean las alternativas evaluadas, por lo que es la medida adecuada para comparar y ordenar de forma coherente varios cambios o políticas alternativos.

Variación del excedente del consumidor (VEC) (Dupuit, 1844; Marshall, 1890): a diferencia de las dos anteriores, se basa en la demanda ordinaria. El excedente del consumidor es la diferencia entre la disposición máxima a pagar y el precio efectivamente pagado[10], y la VEC su cambio ante una variación del precio:

$$\text{VEC} = \int_{p_i^1}^{p_i^0} d_i(p_i, M_0)\, dp_i$$

donde d_i es la demanda marshalliana y p_i^0, p_i^1 los precios inicial y final. Gráficamente, la VEC es el área entre la curva de demanda ordinaria y las cotas de precios.

Comparación: las tres medidas tienen el mismo signo que el cambio de bienestar, pero difieren en magnitud según el efecto renta. Cabe distinguir cuatro casos:

- *Bajada del precio de un bien normal*: $\text{VE} > \text{VEC} > \text{VC}$, porque la hicksiana a la utilidad final está a la derecha de la hicksiana a la utilidad inicial y la marshalliana entre ambas.

[9] La VC es la compensación hipotética necesaria para aislar el ES del efecto renta (ER) en la descomposición de Slutsky según la definición de Hicks.

[10] La curva de demanda puede entenderse también como la agregación de demandas unitarias de consumidores heterogéneos, ordenados de mayor a menor disposición a pagar, de modo que el excedente es la suma, para cada comprador, de la diferencia entre su disposición a pagar y el precio (Tirole, 1988, introducción).

- *Subida del precio de un bien normal*: el orden se invierte en valor absoluto, $|\text{VC}| > |\text{VEC}| > |\text{VE}|$.

- *Bien inferior*: ocurre lo contrario en cada caso.

- *Bien sin efecto renta*: las tres medidas coinciden.

En la práctica, la diferencia entre las tres medidas suele ser pequeña. De hecho, Willig (1976) acota el error de usar la VEC en lugar de la VC o la VE, que es aproximadamente

$$\frac{|\text{VC} - \text{VEC}|}{|\text{VEC}|} \approx \frac{\varepsilon_{iM}\,|\text{VEC}|}{2M_0}$$

donde ε_{iM} es la elasticidad-renta del bien i y M_0 la renta inicial (lo mismo vale para la VE). Por ejemplo, con una elasticidad-renta unitaria y un excedente del 5 % de la renta, el error ronda el 2,5 %. El excedente del consumidor es así una buena aproximación cuando el gasto en el bien pesa poco en la renta o el efecto renta es débil.

Gráficamente, en el plano (x_1, p_1) (figura A9.3), el primer caso es una bajada del precio de p_1^0 a p_1^1, que lleva al consumidor del punto 0 al 1. Cada medida es el área a la izquierda de una curva entre ambos precios:

1. *Demanda marshalliana*, $x_1^m(\mathbf{p}, M_0)$: recoge el efecto total del precio con la renta constante. Pasa por 0 y por 1, entre las dos hicksianas, y su área es la VEC.

2. *Demanda hicksiana a la utilidad inicial*, $x_1^h(\mathbf{p}, u_0)$: recoge solo el efecto sustitución a la utilidad de partida. Pasa por 0 y su área es la VC.

3. *Demanda hicksiana a la utilidad final*, $x_1^h(\mathbf{p}, u_1)$: recoge el efecto sustitución a la utilidad final. Pasa por 1 y queda a la derecha de la hicksiana inicial, porque, para un bien normal, una utilidad mayor exige más cantidad a cada precio. Su área es la VE.

El Anexo A.1 representa cada medida por separado en el plano de bienes y en el plano cantidad-precio.

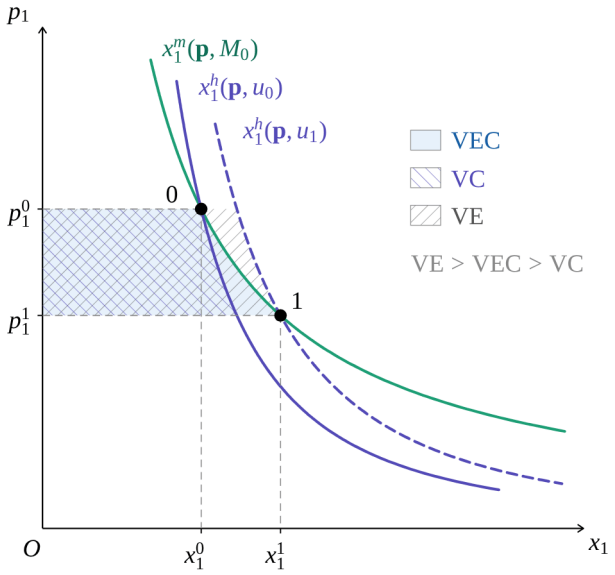


Figura A9.3: Medidas monetarias del bienestar ante un cambio de precio. El gráfico compara la variación compensatoria, la variación equivalente y la variación del excedente del consumidor.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: como VE y VC son diferencias de FIUMM, jerarquizan rigurosamente $\mathbf{p}^0$ y $\mathbf{p}^1$.

▪ *Limitaciones*: VE y VC requieren conocer la función de gasto, lo que en la práctica se resuelve estimando un sistema de demanda. Frente a ellas, la VEC solo es una medida exacta cuando la demanda carece de efecto renta (preferencias cuasilineales, bienes frontera), pues en otro caso el ER la distorsiona[11]. Por ello se usa como aproximación en equilibrio parcial, con el error acotado por Willig (1976).

3.3.3. Indexación de precios: IVC, IVE y sus aproximaciones

Cuando no es posible construir las demandas hicksianas pero sí se conocen cestas y precios, las variaciones de bienestar pueden aproximarse mediante **números índice**, es decir, medidas de la evolución relativa del coste de la vida respecto a un periodo base.

Índice de variación compensatoria (IVC): factor de actualización de la renta que mantiene constante la utilidad inicial, $\text{IVC} = e(\mathbf{p}^1, u_0)/e(\mathbf{p}^0, u_0)$.

Índice de variación equivalente (IVE): factor de actualización que mantiene constante la utilidad final, $\text{IVE} = e(\mathbf{p}^1, u_1)/e(\mathbf{p}^0, u_1)$.

Ninguno de los dos es observable, porque exigen la función de gasto, y los índices de precios habituales los aproximan con cestas observadas:

Índice de Laspeyres (1871): valora la cesta del periodo base a los precios de ambos periodos.

[11] Equivale al supuesto de Marshall (1890) de utilidad marginal de la renta constante.

$$P_L = \frac{\sum_i p_i^1 x_i^0}{\sum_i p_i^0 x_i^0} \geq \text{IVC}$$

Solo exige la cesta del periodo base, por lo que es sencillo y barato de elaborar, y es la fórmula de los IPC. Sin embargo, sobrestima el aumento del coste de la vida, porque la cesta inicial sigue siendo asequible con la renta $P_L \cdot M_0$, pero el consumidor puede sustituir hacia los bienes que se abaratan en términos relativos (*sesgo de sustitución*). Además, sus ponderaciones envejecen con el paso del tiempo y, aplicado a un conjunto de hogares con ponderaciones de gasto, el índice es *plutocrático*, porque pesan más los hogares que más gastan.

Ejemplo: sesgo del índice de Laspeyres

Sea $u = x_1 x_2^2$. La cesta $(10, 10)$ es óptima a precios $\mathbf{p}^0 = (10, 20)$, con $M_0 = 300$ y $u_0 = 1000$. A los precios $\mathbf{p}^1 = (15, 40)$, la cesta compensada es (12,1; 9,1), aproximadamente, y $e(\mathbf{p}^1, u_0) \approx 545{,}1$. Índice verdadero: IVC $= 545{,}1/300 \approx 1{,}817$. Laspeyres: $P_L = (10 \cdot 15 + 10 \cdot 40)/300 = 550/300 \approx 1{,}833$. Sesgo al alza: $P_L >$ IVC.

Índice de Paasche (1874): valora la cesta del periodo corriente a los precios de ambos periodos.

$$P_P = \frac{\sum_i p_i^1 x_i^1}{\sum_i p_i^0 x_i^1} \leq \text{IVE}$$

Sus ponderaciones están siempre al día, pero el índice exige observar la cesta de cada periodo, lo que lo encarece, y, por el argumento simétrico, subestima el aumento del coste de la vida. Como la cesta cambia en cada periodo, tampoco permite comparar directamente dos periodos distintos del base. El Anexo A.2 representa los sesgos de ambos índices en el plano de bienes.

Índice de Konüs (1924): es el índice verdadero del coste de la vida, el cociente entre los gastos mínimos necesarios para alcanzar una misma utilidad de referencia a los precios de ambos periodos.

$$P_K(u) = \frac{e(\mathbf{p}^1, u)}{e(\mathbf{p}^0, u)}$$

Con $u = u_0$ es el IVC y con $u = u_1$, el IVE. Con preferencias homotéticas no depende del nivel de utilidad y queda acotado entre los índices de Paasche y de Laspeyres, $P_P \leq P_K \leq P_L$, y, en general, Konüs demostró que existe una utilidad intermedia entre u_0 y u_1 para la que el índice verdadero está comprendido entre ambos. El índice de Konüs es la referencia teórica exacta, pero no es observable.

Índice de Fisher (1922): es la media geométrica de los de Laspeyres y Paasche.

$$P_F = \sqrt{P_L \cdot P_P}$$

Compensa los sesgos de signo contrario de ambos y es exacto para preferencias homotéticas cuadráticas (Fisher lo llamó índice *ideal*). A cambio, exige las cestas de los dos periodos y no corresponde a ninguna cesta concreta.

Los índices de Laspeyres y Paasche como IPC y deflactor del PIB, sus sesgos (Comisión Boskin, índice plutocrático) y los índices encadenados se desarrollan en el tema A30, apartados 3.2.1 y 3.3.2.

3.4. Conclusiones

Las extensiones comparten una misma lógica. La función de gasto y la demanda hicksiana, no observables, se conectan con las demandas marshallianas observables a través de la dualidad. Esa conexión se concreta en cuatro aplicaciones:

- *Hacia delante*: la ecuación de Slutsky descompone los efectos precio.
- *Hacia atrás*: la integrabilidad recupera las preferencias a partir de las demandas observadas.
- *Sistemas de demanda*: convierten las propiedades teóricas de las demandas en restricciones sobre parámetros estimables.
- *Medidas de bienestar*: utilizan la función de gasto, estimada o aproximada, como métrica monetaria de la utilidad.

Estas herramientas tienen, sin embargo, un alcance limitado, porque todas se refieren a un individuo aislado. Las comparaciones interpersonales no son posibles en general, dado que, con utilidad ordinal, la utilidad marginal de la renta no es comparable entre agentes. Por ello, el bienestar colectivo solo es medible en situaciones restringidas (preferencias idénticas, cuasilineales o agente representativo), y el análisis del bienestar social trata de cubrir estas lagunas con criterios de deseabilidad colectiva.

Conclusiones

El tema ha mostrado que la elección del consumidor puede estudiarse desde dos problemas equivalentes. La maximización de la utilidad da la demanda marshalliana, observable, y la función indirecta de utilidad, mientras que la minimización del gasto da la demanda hicksiana, compensada, y la función de gasto, medida en dinero. Las relaciones de dualidad y los resultados de la envolvente (identidad de Roy, lema de Shephard) permiten pasar de unas funciones a otras resolviendo solo el problema más sencillo, con las mismas predicciones que el enfoque primal. De ahí proceden la derivación formal de la ecuación de Slutsky y de las propiedades de la matriz de sustitución, el teorema de la integrabilidad, los sistemas de demanda que llevan la teoría a los datos y las medidas monetarias del bienestar, exactas o aproximadas. Sin embargo, el alcance del enfoque dual tiene dos límites. La demanda hicksiana y la función de gasto deben recuperarse de las marshallianas, y las medidas son individuales.

La dualidad completa la teoría del consumidor, de la que toma los axiomas y la demanda marshalliana (tema A08), pero su lógica va más allá del consumidor. La misma estructura describe a la empresa, que minimiza costes para obtener las demandas condicionadas de factores y maximiza beneficios para obtener su oferta, con el lema de Hotelling como análogo del de Shephard (temas A12 y A16). Por su parte, la agregación exacta de los sistemas de demanda justifica el agente representativo de la macroeconomía, y las medidas monetarias del bienestar fundamentan los excedentes con los que se evalúan mercados y políticas (tema A22) y los números índice de precios (tema A30). Fuera de este marco estático quedan la elección intertemporal y la elección con riesgo (temas A33 y A10).

La dualidad se aplica hoy a la medición del bienestar cuando faltan precios fiables para una parte del consumo. Por ejemplo, Atkin, Faber, Fally y Gonzalez-Navarro (2024) recuperan las variaciones equivalente y compensatoria de cada nivel de renta, bajo ciertas condiciones sobre las preferencias, de los desplazamientos de las curvas de Engel en encuestas de gasto. Asimismo, los bienes digitales gratuitos, que el PIB apenas recoge, se valoran con experimentos de elección masivos en línea que miden la compensación que exige el usuario por renunciar a ellos durante un tiempo (Brynjolfsson, Collis y Eggers, 2019).

Anexos

A.1. Medidas del bienestar en el plano de bienes y en el plano cantidad-precio

Las tres medidas del apartado 3.3.2 pueden leerse en dos planos. En el plano de bienes, (x_1, x_2), la VC y la VE son distancias entre rectas de balance paralelas. En el plano cantidad-precio, (x_1, p_1), las tres medidas son áreas a la izquierda de una curva de demanda. Las figuras de este anexo representan en ambos planos un mismo cambio, la bajada del precio de un bien normal de p_1^0 a p_1^1, con la renta, M_0, y el precio del otro bien, p_2, constantes. El consumidor pasa de la cesta 0, sobre la curva de indiferencia u_0, a la cesta 1, sobre u_1. Los dos paneles de cada figura comparten el eje de x_1, de modo que cada cesta del panel superior se proyecta sobre su punto del panel inferior.

La ordenada en el origen de una recta de balance es la renta dividida por p_2. Por ello, la distancia vertical entre dos rectas de balance paralelas mide una diferencia de renta en unidades del bien 2 y, multiplicada por p_2, en dinero.

Variación compensatoria: en el plano de bienes y en el plano cantidad-precio (figura A9.4):

1. *Rectas de balance inicial y final* (RP_0 y RP_1): la bajada de p_1 hace girar la recta de balance sobre su ordenada en el origen, M_0/p_2, y el consumidor pasa de la cesta 0 a la cesta 1.

2. *Recta de balance compensada*, RP_c: es paralela a RP_1, porque tiene los precios finales, y tangente a u_0 en la cesta $0'$. Su ordenada en el origen es $e(\mathbf{p}^1, u_0)/p_2$, la renta mínima que permite alcanzar la utilidad inicial a los precios finales.

3. *Variación compensatoria en el plano de bienes*: es la distancia entre las ordenadas en el origen de RP_1 y de RP_c, $\text{VC}/p_2 = [M_0 - e(\mathbf{p}^1, u_0)]/p_2$. Mide la renta que habría que retirar al consumidor después de la bajada para devolverlo a u_0.

4. *Variación compensatoria en el plano cantidad-precio*: el paso de la cesta 0 a la cesta $0'$ es un movimiento a lo largo de u_0 y, por tanto, a lo largo de la demanda hicksiana $x_1^h(\mathbf{p}, u_0)$. La VC es el área a la izquierda de esa curva entre p_1^1 y p_1^0. La demanda marshalliana, $x_1^m(\mathbf{p}, M_0)$, que pasa por 0 y por 1, queda a su derecha entre ambos precios.

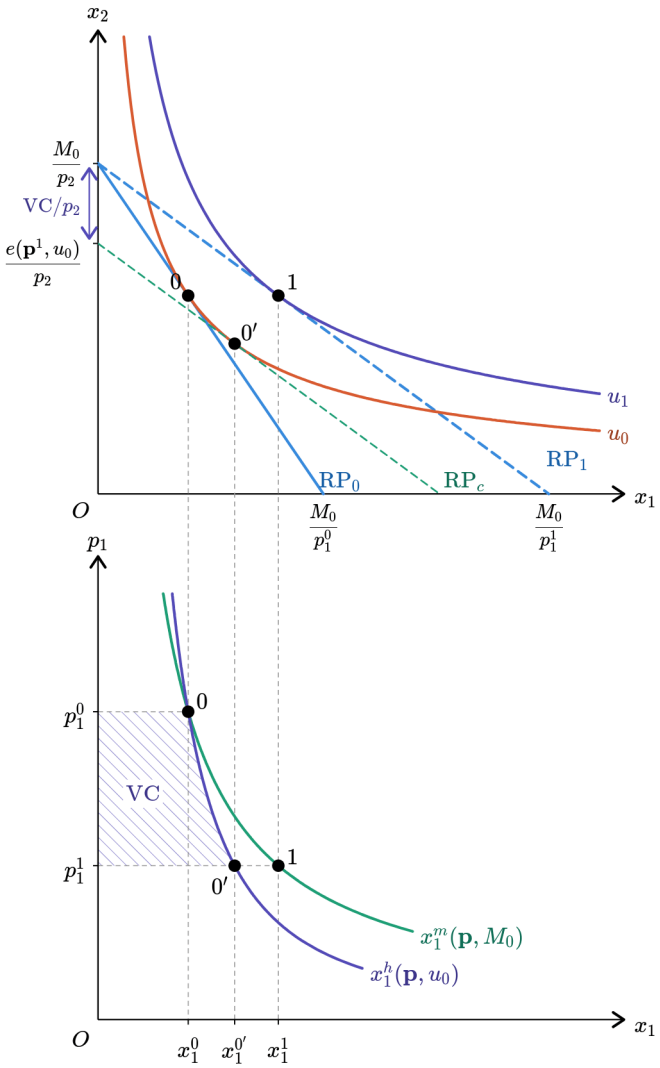


Figura A9.4: Variación compensatoria ante una bajada de p_1. En el plano de bienes (panel superior), la recta compensada RP$_c$, paralela a RP$_1$ y tangente a u_0 en $0'$, corta el eje del bien 2 en $e(\mathbf{p}^1, u_0)/p_2$, y su distancia a M_0/p_2 es VC$/p_2$. En el plano cantidad-precio (panel inferior), la VC es el área a la izquierda de la demanda hicksiana $x_1^h(\mathbf{p}, u_0)$, que pasa por 0 y $0'$, entre p_1^1 y p_1^0.

Variación equivalente: en el plano de bienes y en el plano cantidad-precio (figura A9.5):

1. *Recta de balance equivalente*, RP$_e$: es paralela a RP$_0$, porque tiene los precios iniciales, y tangente a u_1 en la cesta $1'$. Su ordenada en el origen es $e(\mathbf{p}^0, u_1)/p_2$, la renta mínima que permite alcanzar la utilidad final a los precios iniciales.

2. *Variación equivalente en el plano de bienes*: es la distancia entre las ordenadas en el origen de RP$_e$ y de RP$_0$, VE$/p_2 = [e(\mathbf{p}^0, u_1) - M_0]/p_2$. Mide la renta que habría que dar al consumidor antes de la bajada para llevarlo a u_1.

3. *Variación equivalente en el plano cantidad-precio*: el paso de la cesta $1'$ a la cesta 1 es un movimiento a lo largo de u_1 y, por tanto, a lo largo de la demanda hicksiana $x_1^h(\mathbf{p}, u_1)$. La VE es el área a la izquierda de esa curva entre p_1^1 y p_1^0. La demanda marshalliana queda a su izquierda entre ambos precios.

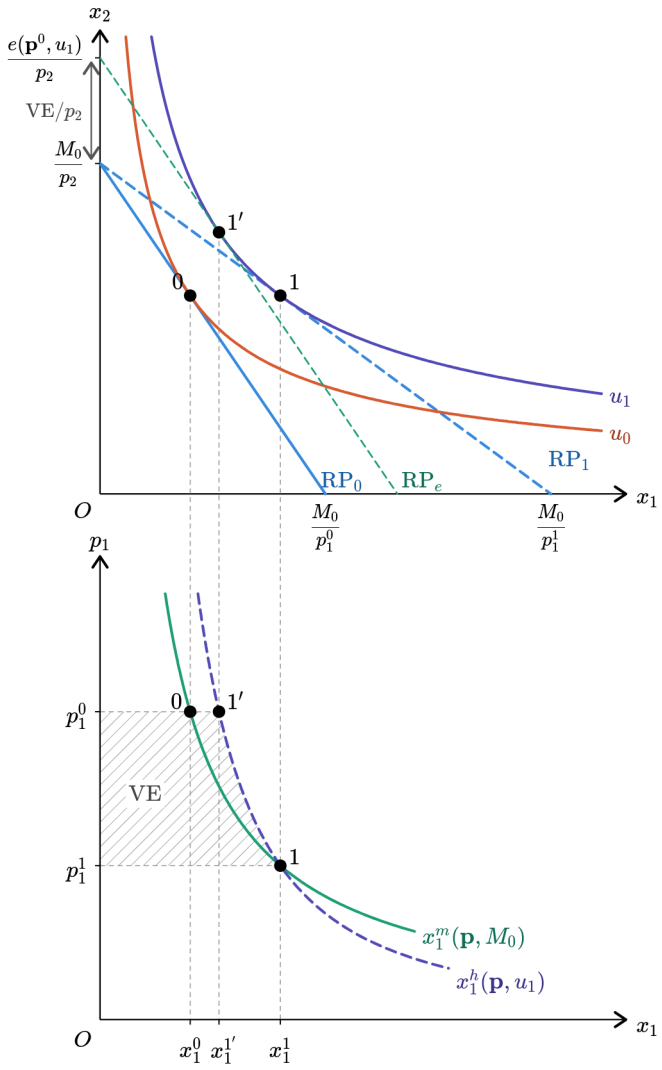


Figura A9.5: Variación equivalente ante una bajada de p_1. En el plano de bienes (panel superior), la recta RP$_e$, paralela a RP$_0$ y tangente a u_1 en $1'$, corta el eje del bien 2 en $e(\mathbf{p}^0, u_1)/p_2$, y su distancia a M_0/p_2 es VE/p_2. En el plano cantidad-precio (panel inferior), la VE es el área a la izquierda de la demanda hicksiana $x_1^h(\mathbf{p}, u_1)$, que pasa por $1'$ y 1, entre p_1^1 y p_1^0.

Variación del excedente del consumidor: en el plano de bienes y en el plano cantidad-precio (figura A9.6):

1. *Curva precio-consumo* (CPC): une las cestas óptimas que el consumidor elige al bajar p_1 con la renta constante, de la cesta 0 a la cesta 1 (tema A08, apartado 2.3.1). Con las preferencias de la figura es horizontal, porque el gasto en el bien 2 no depende de p_1.

2. *Demanda marshalliana*, $x_1^m(\mathbf{p}, M_0)$: es la proyección de la CPC sobre el plano cantidad-precio y pasa por 0 y por 1.

3. *Variación del excedente del consumidor*: es el área a la izquierda de la demanda marshalliana entre p_1^1 y p_1^0. A diferencia de la VC y de la VE, la VEC no es una distancia entre dos rectas de balance paralelas, porque a lo largo de la CPC cambian a la vez los precios relativos y la utilidad.

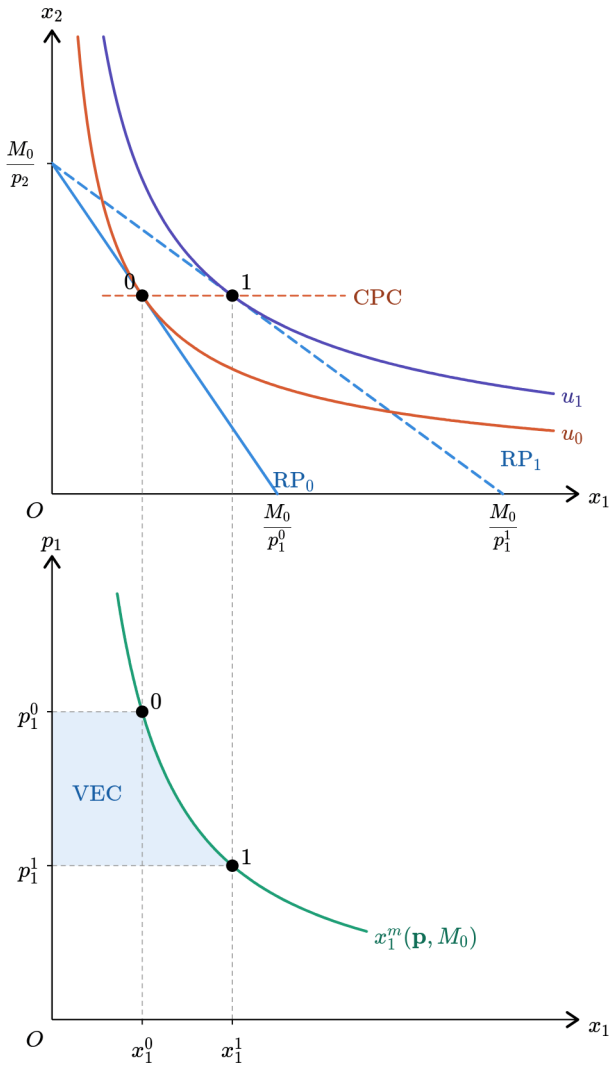


Figura A9.6: Variación del excedente del consumidor ante una bajada de p_1. En el plano de bienes (panel superior), la curva precio-consumo, CPC, une las cestas 0 y 1. En el plano cantidad-precio (panel inferior), la proyección de esas cestas da la demanda marshalliana $x_1^m(\mathbf{p}, M_0)$, y la VEC es el área a su izquierda entre p_1^1 y p_1^0.

La comparación de los tres paneles inferiores reproduce el orden del apartado 3.3.2. Entre p_1^1 y p_1^0, la demanda hicksiana a la utilidad inicial queda a la izquierda de la marshalliana y la hicksiana a la utilidad final, a su derecha, de modo que VC $<$ VEC $<$ VE. Las tres curvas solo coinciden cuando no hay efecto renta, como en el ejemplo de preferencias cuasilineales del Anexo A.3.

A.2. Índices de Laspeyres y de Paasche en el plano de bienes

Los sesgos de los índices de Laspeyres y de Paasche del apartado 3.3.3 se aprecian en el plano de bienes al comparar dos rectas de balance paralelas, la que pasa por la cesta observada y la que es tangente a la curva de indiferencia de referencia. La figura A9.7 representa una subida del precio del bien 1, de p_1^0 a p_1^1, con p_2 constante.

Índice de Laspeyres: en el plano de bienes (figura A9.7, panel a):

1. *Situación inicial*: a los precios $\mathbf{p}^0$ y con la renta M_0, el consumidor elige la cesta 0, sobre u_0, en la recta de balance RP_0.

2. *Recta de Laspeyres*, RP_L: tiene los precios finales y pasa por la cesta 0. Le corresponde la renta $M_L = \sum_i p_i^1 x_i^0 = P_L \cdot M_0$, que resulta de actualizar la renta inicial con el índice de Laspeyres.

3. *Recta compensada*, RP_c: tiene los precios finales y es tangente a u_0 en la cesta $0'$. Le corresponde la renta $M_c = e(\mathbf{p}^1, u_0) = \text{IVC} \cdot M_0$, la mínima que mantiene la utilidad inicial.

4. *Sesgo de sustitución*: RP_L queda por encima de RP_c, porque la cesta 0 es asequible con la renta M_L, pero ya no es óptima a los precios finales. Con esa renta, el consumidor sustituye el bien 1, que se ha encarecido, por el bien 2 y elige la cesta L, sobre una curva de indiferencia más alta, $u_L > u_0$. Por tanto, $M_L \geq M_c$ y $P_L \geq \text{IVC}$.

Índice de Paasche: en el plano de bienes (figura A9.7, panel b):

1. *Situación final*: a los precios $\mathbf{p}^1$ y con la renta M_1, el consumidor elige la cesta 1, sobre u_1, en la recta de balance RP_1.

2. *Recta de Paasche*, RP_P: tiene los precios iniciales y pasa por la cesta 1. Le corresponde la renta $M_P = \sum_i p_i^0 x_i^1 = M_1/P_P$, lo que habría costado la cesta final a los precios iniciales.

3. *Recta equivalente*, RP_e: tiene los precios iniciales y es tangente a u_1 en la cesta $1'$. Le corresponde la renta $M_e = e(\mathbf{p}^0, u_1) = M_1/\text{IVE}$, la mínima que permite alcanzar la utilidad final a los precios iniciales.

4. *Sesgo de sustitución*: RP_P queda por encima de RP_e, porque a los precios iniciales el consumidor habría alcanzado u_1 con la cesta $1'$, más barata que la cesta 1. Por tanto, $M_P \geq M_e$, es decir, $M_1/P_P \geq M_1/\text{IVE}$ y $P_P \leq \text{IVE}$.

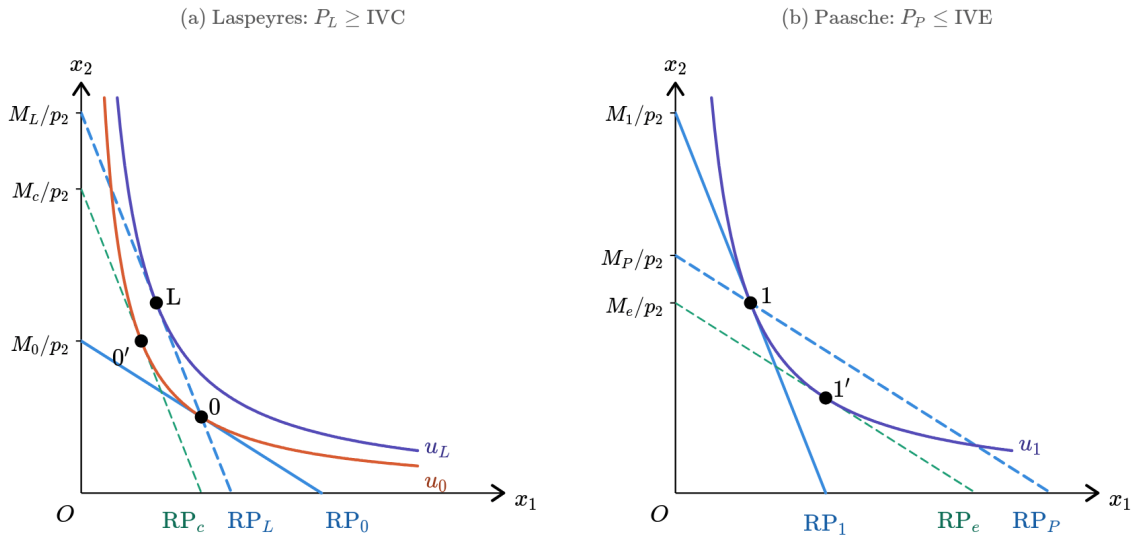


Figura A9.7: Índices de Laspeyres y de Paasche ante una subida de p_1. En el panel (a), la recta RP_L, con los precios finales y que pasa por la cesta inicial 0, queda por encima de la recta RP_c, tangente a u_0 en $0'$, de modo que $M_L \geq M_c$ y $P_L \geq$ IVC. Con la renta M_L el consumidor alcanza la cesta L, sobre $u_L > u_0$. En el panel (b), la recta RP_P, con los precios iniciales y que pasa por la cesta final 1, queda por encima de la recta RP_e, tangente a u_1 en $1'$, por lo que $M_P \geq M_e$ y $P_P \leq$ IVE.

Los dos sesgos proceden de la sustitución entre bienes. Por ello, desaparecen con preferencias de Leontief, con las que la cesta observada es también la de mínimo coste a cualquier precio relativo.

A.3. Ejemplos resueltos

Ejemplo: demanda hicksiana y medidas del bienestar ante una bajada de precio

Sean $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$, $M_0 = 100$, $p_2 = 1$ y una bajada del precio del bien 1 de $p_1^0 = 4$ a $p_1^1 = 1$. Con la FIU y la función de gasto del apartado 2.3, $v = M/(2p_1^{1/2}p_2^{1/2})$ y $e = 2u\,p_1^{1/2}p_2^{1/2}$, las utilidades inicial y final son $u_0 = 100/4 = 25$ y $u_1 = 100/2 = 50$.

La demanda marshalliana, $x_1^m = M/(2p_1)$, pasa de 12,5 a 50 unidades. La hicksiana, $x_1^h = u\,(p_2/p_1)^{1/2}$, vale 12,5 en el punto inicial, como la marshalliana, y 25 a los precios finales con la utilidad inicial. El efecto sustitución es, por tanto, $25 - 12{,}5 = 12{,}5$ unidades, y el efecto renta, $50 - 25 = 25$.

La VC es lo que habría que quitar al consumidor tras la bajada para devolverlo a u_0, $\text{VC} = M_0 - e(\mathbf{p}^1, u_0) = 100 - 2 \cdot 25 = 50$. La VE es lo que habría que darle antes de la bajada para llevarlo a u_1, $\text{VE} = e(\mathbf{p}^0, u_1) - M_0 = 2 \cdot 50 \cdot 2 - 100 = 100$. La VEC es el área a la izquierda de la demanda marshalliana entre ambos precios:

$$\text{VEC} = \int_1^4 \frac{100}{2p_1}\,dp_1 = 50\ln 4 \approx 69{,}3$$

Se cumple VE > VEC > VC, como corresponde a la bajada del precio de un bien normal (apartado 3.3.2). Las mismas cifras salen de integrar la hicksiana a cada utilidad, $\int_1^4 25\,p_1^{-1/2}\,dp_1 = 50$ y $\int_1^4 50\,p_1^{-1/2}\,dp_1 = 100$.

La utilidad métrica monetaria valora las dos situaciones a unos mismos precios de referencia (apartado 3.3.1). Con $\mathbf{q} = \mathbf{p}^0$, la FIUMM vale $e(\mathbf{p}^0, u_0) = 100$ antes y $e(\mathbf{p}^0, u_1) = 200$ después, y su diferencia es la VE. Con $\mathbf{q} = \mathbf{p}^1$, vale 50 y 100, y su diferencia es la VC.

Ejemplo: preferencias cuasilineales, sin efecto renta

Sean $u = 10\ln x_1 + x_2$, $M_0 = 100$, $p_2 = 1$ y una bajada de p_1 de 2 a 1. La CPO, $10/x_1 = p_1$, da una demanda marshalliana que no depende de la renta, $x_1^m = 10/p_1$ (con $M \geq 10$, para que $x_2 = M - 10 \geq 0$). Sin efecto renta, la hicksiana coincide con ella, y la función de gasto es $e(p_1, u) = u + 10 - 10\ln(10/p_1)$.

Las tres medidas coinciden, VC = VE = VEC = $\int_1^2 (10/p_1)\,dp_1 = 10\ln 2 \approx 6{,}93$, porque las tres curvas de demanda son la misma. Este caso, en el que el excedente del consumidor mide el bienestar sin error, equivale al supuesto de Marshall de utilidad marginal de la renta constante (apartado 3.3.2).

A10. Elección en riesgo e incertidumbre

Teoría de la demanda del consumidor (III). Elección del consumidor en situaciones de riesgo e incertidumbre.

Introducción

El consumidor neoclásico elige, por hipótesis, con información perfecta, y por ello cada decisión le reporta una utilidad *cierta*[1]. En cambio, las decisiones económicas reales se toman en su mayoría sin saber con seguridad qué consecuencias tendrán y, a menudo, sabiendo que otros agentes están mejor informados. El estudio de la elección con información imperfecta extiende así la teoría del consumidor y de la empresa a los contextos que mejor describen el mundo real, como invertir, asegurarse, contratar o comprar un bien cuya calidad no se observa.

Siguiendo a Frank Knight en *Risk, Uncertainty and Profit* (1921), se distinguen dos situaciones:

1. *Riesgo*[2]: cada resultado que puede seguirse de una decisión tiene una probabilidad *objetiva* y medible que el agente conoce, como al lanzar una moneda o jugar en un casino.

2. *Incertidumbre*: el agente no puede asignar probabilidades objetivas, porque los sucesos futuros no son cuantificables en términos de frecuencias, como ocurre en las apuestas deportivas. La teoría posterior propuso tratar estas situaciones mediante probabilidades *subjetivas* (Savage, 1954).

La formalización de la elección en estos contextos comienza con la **teoría de la utilidad esperada** de John von Neumann y Oskar Morgenstern (1944) y con la **teoría de la utilidad esperada subjetiva** de Leonard Savage (1954). Desde finales de los años setenta se enriquece con la **economía conductual**, que documenta desviaciones sistemáticas respecto de la racionalidad (Kahneman y Tversky, 1979). En paralelo, la **economía de la información** estudió qué ocurre cuando la información no solo es incompleta, sino que está *asimétricamente* repartida entre las partes de un contrato. Los trabajos sobre el **riesgo moral** (Arrow, 1963), la **selección adversa** (Akerlof, 1970) y las **señales** (Spence, 1973) mostraron que la asimetría informativa puede impedir que los mercados alcancen la eficiencia o incluso provocar su desaparición. Estas aportaciones, reconocidas con el Premio Nobel de 2001 a Akerlof, Spence y Stiglitz, son hoy la base del análisis de los seguros, los mercados financieros, el mercado de trabajo y el diseño de contratos.

La teoría de la elección con riesgo es el fundamento del análisis de los seguros y de la teoría de carteras, y la de la información asimétrica (tema A13) parte de ella. Sin embargo, su núcleo, la utilidad esperada, recibió pronto críticas empíricas. Las paradojas de Allais (1953) y de Ellsberg

[1] Aquí *cierta* significa conocida de antemano. No debe confundirse con *cardinal*.

[2] Siguiendo a Machina y Rothschild (2008) y Knight (1921): aleatoriedad que se presenta en forma de probabilidades objetivas, especificadas exógenamente o calculables científicamente.

(1961) mostraron que los individuos violan de forma sistemática sus axiomas, y de esas críticas nacieron las teorías alternativas que el tema estudia en su segunda y tercera partes.

El tema estudia la elección en situaciones de riesgo e incertidumbre en tres bloques:

- *Riesgo*: teoría de la utilidad esperada (von Neumann-Morgenstern, 1944).

- *Riesgo*: teorías alternativas, en especial la teoría de la perspectiva (Kahneman y Tversky, 1979).

- *Incertidumbre*: teoría de la probabilidad subjetiva (Anscombe y Aumann, 1963), teoría de la perspectiva acumulativa (Tversky y Kahneman, 1992), análisis bayesiano y criterios de decisión.

1. Elección en situaciones de riesgo: teoría de la utilidad esperada

Siguiendo a Nicholson, el comportamiento en un contexto de incertidumbre y el estudio de la probabilidad tienen un origen común en el intento de comprender los juegos de azar. Ya en el siglo XVIII se planteó la **paradoja de San Petersburgo** (Nicolaus Bernoulli, 1713), que Daniel Bernoulli (1738) analizó y resolvió. Si se tira una moneda hasta que salga cara y el premio se duplica con cada lanzamiento, el valor esperado del juego es infinito, pero los jugadores no quieren pagar mucho por jugar. Daniel Bernoulli razonó que a los individuos no les importan directamente los premios, sino su utilidad (esperada).

1.1. El conjunto de elección y la ordenación de las preferencias

La **teoría de la utilidad esperada** (TUE), formulada axiomáticamente por von Neumann y Morgenstern (1944) y extendida al caso de probabilidades subjetivas por Savage (1954), es el desarrollo moderno de esta idea. Busca obtener una función de utilidad a partir de un conjunto de axiomas sobre las preferencias entre loterías.

Supone que no existe plena certeza sobre la ocurrencia de sucesos, pero que sí se conoce la distribución de probabilidades de los estados de la naturaleza[3]. Así, al igual que en la teoría de preferencia y consumo, el consumidor establece una ordenación sobre un **conjunto de elección**, $\mathcal{L}$, no vacío y compacto[4]:

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{l} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

De acuerdo con la premisa "consecuencialista" (axioma de reducción de loterías compuestas), cada elemento del conjunto constituye una **lotería simple** o alternativa de riesgo, es decir, una distribución de probabilidad objetiva sobre un conjunto de sucesos. Cada suceso lleva asociado un pago, x_i (ganancia o pérdida).

Es decir, existe un vector fijo de resultados $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, y cada lotería asigna una probabilidad a cada uno de ellos. Una *lotería compuesta*, en cambio, es una distribución de probabilidad sobre otras loterías. Por el axioma de reducción, equivale a la lotería simple que asigna a cada resultado su probabilidad final, de modo que basta analizar $\mathcal{L}$.

Por lo tanto, a diferencia de la elección en certidumbre, el agente no decide sobre cestas que reportan utilidad cierta, sino sobre alternativas de riesgo que son útiles por los pagos monetarios que llevan asociados.

Entre las loterías, el agente puede establecer **relaciones binarias** que reflejan sus preferencias: indiferencia ($\sim$), estricta preferencia ($\succ$) y preferencia débil ($\succsim$).

[3] Estados de la naturaleza: eventos futuros contingentes fuera del control del decisor, mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

[4] Con un número finito de resultados posibles, $\mathcal{L}$ es el símplex de probabilidades, cerrado y acotado y, por tanto, compacto. Es, además, convexo, porque toda combinación convexa de dos loterías es también una lotería.

1.1.1. Axiomas de orden

Completitud: dadas dos loterías cualesquiera, el consumidor siempre puede expresar una preferencia: $\mathbf{l}_1 \succsim \mathbf{l}_2$, o $\mathbf{l}_2 \succsim \mathbf{l}_1$, o ambas (indiferencia, $\mathbf{l}_1 \sim \mathbf{l}_2$).

Reflexividad: una lotería es comparable consigo misma: $\mathbf{l}_0 \succsim \mathbf{l}_0$.

Transitividad: exige coherencia entre comparativas, de modo que $\mathbf{l}_1 \succsim \mathbf{l}_2$ y $\mathbf{l}_2 \succsim \mathbf{l}_3 \rightarrow \mathbf{l}_1 \succsim \mathbf{l}_3$.

1.1.2. Axiomas de regularidad

Monotonía (estricta): la preferencia por la lotería aumenta cuando aumenta la probabilidad del suceso más favorable.

Continuidad: no existen saltos en las preferencias. Pequeños cambios en las probabilidades de ocurrencia no cambian la naturaleza de la ordenación entre dos loterías[5].

Independencia: dada una relación entre dos loterías, si cada una se mezcla con una tercera, la ordenación entre ambas combinaciones no depende de la tercera lotería utilizada:

$$\mathbf{l}_1 \succsim \mathbf{l}_2 \leftrightarrow \alpha\mathbf{l}_1 + (1-\alpha)\mathbf{l}_3 \succsim \alpha\mathbf{l}_2 + (1-\alpha)\mathbf{l}_3, \quad \alpha \in (0,1]$$

El axioma de independencia está en el corazón de la teoría de la utilidad esperada y es el más controvertido. Implica que los pagos en estados distintos (bienes contingentes) no pueden ser sustitutivos ni complementarios entre sí en la utilidad (la utilidad marginal del pago en un estado no depende del pago en otro), porque solo uno de los estados llegará a ocurrir.

Diferenciabilidad (opcional): evita puntos angulares en la función de utilidad.

1.2. La función de utilidad esperada y los perfiles de riesgo

Los axiomas anteriores permiten representar las preferencias sobre loterías mediante una función de utilidad esperada, y la curvatura de la utilidad de Bernoulli caracteriza y mide la actitud del agente frente al riesgo.

1.2.1. La función de utilidad esperada y sus propiedades

El *teorema de representación* (Debreu, 1954) establece que los axiomas de racionalidad (completitud, reflexividad, transitividad) junto con el de continuidad garantizan la existencia de una función de utilidad continua que preserva la ordenación:

$$U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbf{l}_0 \succsim \mathbf{l}_1 \leftrightarrow U(\mathbf{l}_0) \geq U(\mathbf{l}_1)$$

Sin embargo, en riesgo se necesita que la función adopte una forma específica para recoger el "valor moral" de la lotería (que a los individuos les importe la utilidad de los pagos, no los pagos directamente).

[5] Excluye preferencias lexicográficas, como las de quien rechaza cualquier lotería con una probabilidad positiva, por pequeña que sea, de un resultado catastrófico.

Definición (teorema de la utilidad esperada; von Neumann y Morgenstern, 1944): si a los axiomas de racionalidad y continuidad se une el axioma de independencia, la ordenación se puede representar mediante una función de utilidad esperada:

$$U(\mathbf{l}) \equiv u^e(\mathbf{l}) = \mathbb{E}[u(\mathbf{l})] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u(x_i)$$

Donde $u^e(\mathbf{l})$ es la utilidad esperada de la lotería, $u(x_i)$ es el índice de utilidad cierta de cada pago (utilidad de Bernoulli) y p_i es la probabilidad objetiva de ocurrencia[6].

Propiedades (si se cumplen los axiomas):

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en las probabilidades, por el axioma de continuidad de las preferencias, y la utilidad de Bernoulli es dos veces diferenciable en los pagos (supuesto adicional, necesario para el análisis de Arrow-Pratt).

2. *Transformaciones*: es única salvo transformaciones lineales (afines) positivas, las únicas admisibles. Toda transformación monótona preserva la ordenación, pero solo la afín preserva la forma de esperanza matemática (la utilidad esperada es cardinal).

3. *Inclinación*: estrictamente creciente en la probabilidad del suceso más favorable, por el axioma de monotonía, y en los pagos, porque se supone que la utilidad de Bernoulli es creciente, $u'(x) > 0$.

4. *Forma*: lineal en las probabilidades (es una esperanza matemática) y aditivamente separable en los estados. La curvatura de $u(x)$, en cambio, queda libre y es la que caracteriza la actitud ante el riesgo.

5. *Otras propiedades*:

▪ *Observabilidad*: no es observable directamente, pero puede construirse a partir de elecciones entre loterías. Como es única salvo transformaciones afines positivas, basta fijar la utilidad del peor y del mejor pago, $u(x_1) = 0$ y $u(x_n) = 1$, con los pagos ordenados de menor a mayor. La utilidad de cualquier pago intermedio x_i es entonces la probabilidad p que hace al individuo indiferente entre recibir x_i con certeza y una lotería que paga x_n con probabilidad p y x_1 con probabilidad $1 - p$, pues $u(x_i) = p \cdot u(x_n) + (1 - p) \cdot u(x_1) = p$.

La forma lineal en probabilidades de la función de utilidad esperada, combinada con una utilidad de Bernoulli suficientemente cóncava (logarítmica, en la propuesta de Bernoulli), resuelve la paradoja de San Petersburgo. Lo consigue porque, para los premios del juego original, la esperanza de $u(x)$ es finita aunque la de x no lo sea. Ahora bien, la sola utilidad marginal decreciente no basta, porque con una utilidad no acotada siempre puede construirse una variante del juego con utilidad esperada infinita (Menger, 1934).

1.2.2. Perfiles de riesgo

Si los individuos cumplen los axiomas de von Neumann-Morgenstern (es decir, tienen un comportamiento racional y sus preferencias son continuas e independientes), actuarán eligiendo la lotería que maximiza el valor esperado de su utilidad, dadas las restricciones a las que se enfrenten.

[6] Los índices de utilidad son consecuencia del teorema, no un supuesto.

Su comportamiento dependerá de su **actitud frente al riesgo**. La intuición es que el efecto que la renta ganada y la renta perdida tienen sobre la utilidad es diferente para cada agente.

El comportamiento de cada perfil puede caracterizarse con tres claves, numeradas de (i) a (iii) en las expresiones que siguen:

1. *Relación entre loterías y utilidades*: entre una lotería degenerada $\mathbf{l}_d$ (suceso cierto con pago igual a la esperanza) y una lotería cualquiera $\mathbf{l}$, y entre $u(\mathbb{E}(\mathbf{l}))$ y $u^e(\mathbf{l}) = \mathbb{E}[u(\mathbf{l})]$.

2. *Forma de la utilidad de Bernoulli*: el signo de $u''(x)$ caracteriza los perfiles.

3. *Prima de riesgo* (ρ): la diferencia entre la esperanza de una lotería y el equivalente cierto[7]: $\rho = \mathbb{E}(\mathbf{l}) - x_c$. Intuitivamente, la prima de riesgo es el sobreprecio máximo que el agente estaría dispuesto a pagar, por encima de una prima actuarialmente justa, para eliminar el riesgo.

Averso al riesgo: el agente que prefiere el valor esperado cierto a la lotería. La prima de riesgo es positiva, es decir, el individuo paga por evitar el riesgo.

$$\text{(i) } \mathbf{l}_d \succ \mathbf{l} \leftrightarrow u(\mathbb{E}(\mathbf{l})) > \mathbb{E}[u(\mathbf{l})] \qquad \text{(ii) } u'(x) > 0,\ u''(x) < 0 \qquad \text{(iii) } \rho > 0$$

Su utilidad de Bernoulli, $u(x)$, es estrictamente cóncava. Conforme el agente gana renta, la utilidad crece a un ritmo cada vez menor (utilidad marginal decreciente). Por ello, ante variaciones equivalentes al alza y a la baja, la desutilidad de la renta perdida es mayor que la utilidad de la renta ganada.

Neutral al riesgo: el individuo es indiferente entre la lotería degenerada y cualquier lotería de igual esperanza. La prima de riesgo es nula y el individuo no paga por evitar el riesgo ni exige compensación por asumirlo.

$$\text{(i) } \mathbf{l}_d \sim \mathbf{l} \leftrightarrow u(\mathbb{E}(\mathbf{l})) = \mathbb{E}[u(\mathbf{l})] \qquad \text{(ii) } u'(x) > 0,\ u''(x) = 0 \qquad \text{(iii) } \rho = 0$$

Su utilidad de Bernoulli, $u(x)$, es una línea recta. La utilidad marginal es constante, por lo que la utilidad de la renta ganada y la desutilidad de la renta perdida se compensan exactamente.

Propenso al riesgo: prefiere la lotería a la lotería degenerada. La prima de riesgo es negativa, ya que el equivalente cierto supera al valor esperado de la lotería, de modo que el individuo exige una compensación por renunciar al riesgo, en lugar de pagar por evitarlo.

$$\text{(i) } \mathbf{l}_d \prec \mathbf{l} \leftrightarrow u(\mathbb{E}(\mathbf{l})) < \mathbb{E}[u(\mathbf{l})] \qquad \text{(ii) } u'(x) > 0,\ u''(x) > 0 \qquad \text{(iii) } \rho < 0$$

Su utilidad de Bernoulli, $u(x)$, es estrictamente convexa. Conforme el agente gana renta, la utilidad crece a un ritmo cada vez mayor (utilidad marginal creciente). Por ello, ante variaciones equivalentes al alza y a la baja, la utilidad de la renta ganada es mayor que la desutilidad de la renta perdida.

Gráficamente, en el plano pagos-utilidad (figura A10.1), una lotería $\mathbf{l}$ con pagos x_1 y x_2 se representa con tres elementos:

1. *Utilidad de Bernoulli*, $u(x)$: estrictamente cóncava con aversión al riesgo (panel a) y estrictamente convexa con propensión (panel b).

[7] Pago monetario cuya utilidad iguala la utilidad esperada de la lotería: $x_c \mid u(x_c) = u^e(\mathbf{l})$.

2. *Cuerda entre x_1 y x_2*: su altura sobre $\mathbb{E}(\mathbf{l})$ es la utilidad esperada, $\mathbb{E}[u(\mathbf{l})]$, que queda por debajo de $u(\mathbb{E}(\mathbf{l}))$ con aversión y por encima con propensión.

3. *Equivalente cierto y prima de riesgo*: x_c es el pago cierto que da la misma utilidad que la lotería, y la diferencia $\mathbb{E}(\mathbf{l}) - x_c$ es la prima de riesgo, positiva con aversión ($x_c < \mathbb{E}(\mathbf{l})$) y negativa con propensión ($x_c > \mathbb{E}(\mathbf{l})$).

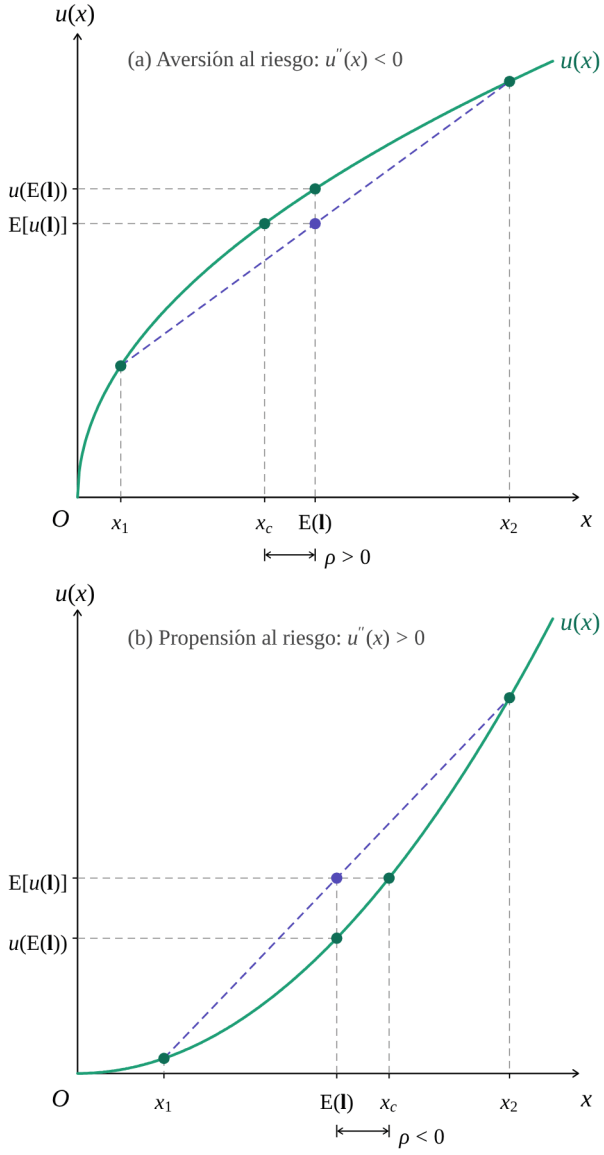


Figura A10.1: Perfiles de riesgo. La función de utilidad es cóncava con aversión al riesgo (panel a) y convexa con propensión (panel b). La aversión implica $u(\mathbb{E}(\mathbf{l})) > \mathbb{E}[u(\mathbf{l})]$ y la propensión, $u(\mathbb{E}(\mathbf{l})) < \mathbb{E}[u(\mathbf{l})]$.

1.2.3. Medida de la aversión: los coeficientes de Arrow-Pratt

En principio, bastaría estudiar la curvatura de la función de Bernoulli a través de $u''(x)$ para determinar el perfil de riesgo. No obstante, esta medida no es invariante ante transformaciones

afines y no permite cuantificar u ordenar las distintas actitudes frente al riesgo. Por ello existen indicadores que tratan de medir esa actitud, los coeficientes de aversión absoluta y de aversión relativa.

Supuestos: para cuantificar la actitud frente al riesgo se parte de dos:

1. *Perfil base*: se toma el perfil averso, $u''(x) < 0$, como referencia. De este modo, los indicadores miden cuán averso es el agente en cuestión.

2. *Monotonía*: las preferencias son monótonas, lo que garantiza que la utilidad es creciente en los pagos.

Coeficiente de aversión absoluta de Arrow-Pratt (Pratt, 1964; Arrow, 1965): mide la variación de la utilidad marginal por unidad de utilidad marginal, es decir, la curvatura relativa[8] de la función de Bernoulli:

$$\text{CAA} = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \in \mathbb{R}$$

El cambio de signo se introduce para tener una medida creciente con el grado de aversión, de modo que cuanto mayor es el coeficiente, mayor es la aversión al riesgo.

El coeficiente puede ser constante, creciente o decreciente en los pagos. Aunque cabría pensar que la disposición a jugar aumenta con la riqueza, *a priori* no tiene por qué ser así. Con todo, la evidencia empírica sugiere que el CAA es decreciente (Guiso y Paiella, 2008), es decir, conforme aumenta la riqueza, hay mayor disposición a asumir un riesgo de cuantía absoluta dada.

El coeficiente de aversión absoluta es útil por tres motivos:

1. *Caracterización*: su signo indica la actitud de los agentes (averso si $\text{CAA} > 0$, neutral si $\text{CAA} = 0$ y propenso si $\text{CAA} < 0$).

2. *Comparaciones*: permite ordenar el grado de aversión entre individuos y entre niveles de renta para un mismo individuo[9].

3. *Prima de riesgo*: permite aproximarla mediante un desarrollo de Taylor de segundo orden, que muestra que la prima es proporcional al producto de la medida de aversión por la varianza de los pagos:

$$\rho \approx \frac{1}{2} \cdot \text{CAA} \cdot \sigma_x^2$$

[8] Dividir por $u'(x)$ hace la medida invariante ante transformaciones afines positivas de $u(\cdot)$.

[9] La aversión absoluta aumenta con la riqueza si la función es cuadrática, disminuye si es logarítmica (la relativa es constante) y es constante si es exponencial.

Ejemplo: equivalente cierto y prima de riesgo con utilidad raíz cuadrada

Sea $u(x) = x^{1/2}$ y la lotería $\mathbf{l}$ que paga $x_1 = 36$ o $x_2 = 100$ con probabilidad $1/2$ cada uno. Su esperanza es $\mathbb{E}(\mathbf{l}) = 68$ y su utilidad esperada,

$$u^e(\mathbf{l}) = \tfrac{1}{2} \cdot 6 + \tfrac{1}{2} \cdot 10 = 8 \; < \; u(68) \approx 8{,}25$$

El equivalente cierto resuelve $x_c^{1/2} = 8$, es decir, $x_c = 64$, y la prima de riesgo exacta es $\rho = 68 - 64 = 4 > 0$. Con $u'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ y $u''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, el coeficiente es $\text{CAA} = 1/(2x)$, que en $x = 68$ vale $1/136$. Como $\sigma_x^2 = 32^2 = 1024$, la aproximación de Taylor da

$$\rho \approx \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{136} \cdot 1024 \approx 3{,}76$$

muy próxima a la prima exacta. Con utilidad cóncava la prima es positiva y crece con la aversión y con la varianza de los pagos.

Coeficiente de aversión relativa de Arrow-Pratt (Pratt, 1964; Arrow, 1965): corrige una de las principales limitaciones del coeficiente de aversión absoluta, que depende de las unidades de medida, pues se expresa en términos monetarios absolutos.

Para superar este problema, el coeficiente de aversión relativa tiene en cuenta el nivel de riqueza, de modo que ofrece una medida relativa, a menudo en términos porcentuales. El coeficiente relativo es la elasticidad de la utilidad marginal respecto a los pagos, cambiada de signo:

$$\text{CAR} = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \cdot x \in \mathbb{R}$$

Intuitivamente, un CAR constante implica que la proporción de la riqueza que se mantiene en activos con riesgo no varía con el nivel de riqueza.

En el caso de una función de aversión relativa al riesgo constante (CRRA, *constant relative risk aversion*) o isoelástica, el CAR es constante y se denota θ. En un contexto intertemporal, su inversa ($1/\theta$) es la elasticidad de sustitución intertemporal (ESI) entre consumo presente y futuro.

1.3. La decisión del individuo: aplicaciones financieras

Las herramientas anteriores tienen una aplicación importante en el análisis de las decisiones financieras en un contexto de riesgo. Las decisiones financieras son las elecciones sobre activos financieros:

- *Seguros*: cuyo pago monetario depende de la ocurrencia de una contingencia (p. ej. un accidente).
- *Acciones*: cuyo pago monetario depende de la marcha de la empresa.
- *Bonos*: cuyo pago monetario no depende de ningún evento en concreto más allá de la llegada de un momento del tiempo.

La teoría de la utilidad esperada puede aplicarse a dos tipos de decisiones financieras, simétricas entre sí:

▪ *Decisiones de aseguramiento*: el agente parte de una exposición al riesgo (fuera de la línea de certeza) y busca reducir dicha exposición mediante la adquisición de un contrato de seguro.

▪ *Decisiones de cartera*: el agente parte de una situación de certeza (sobre la línea de certeza) y busca aumentar su exposición al riesgo (y diversificarlo) mediante la adquisición de acciones.

1.3.1. Decisión de aseguramiento: demanda de seguros

Origen: la demanda de seguros es la aplicación de la teoría de la utilidad esperada (von Neumann y Morgenstern, 1944) a la primera de las decisiones financieras, la de aseguramiento. Su tratamiento en el plano de rentas contingentes enlaza con el enfoque de preferencia por estados de Arrow (1953) y Debreu (1959).

Idea: el agente elige la cuantía asegurada igualando la tasa subjetiva a la que intercambia renta entre los dos estados de la naturaleza con la tasa objetiva que ofrece el mercado de seguros.

Supuestos:

▪ *Entorno*: información imperfecta (y simétrica) con dos posibles estados de la naturaleza:

- *Escenario sin pérdida*: estado de la naturaleza sin contingencia, en el que se mantiene la riqueza inicial, M_0.
- *Escenario con pérdida*: estado de la naturaleza con contingencia, en el que la riqueza inicial se minora en una pérdida L: $M_0 - L$.

▪ *Agentes*: un agente averso al riesgo, con riqueza inicial M_0. Sus preferencias se recogen, por tanto, en una función de utilidad esperada cuya utilidad de Bernoulli es continua, creciente y cóncava. El agente se enfrenta a una sola lotería, que asigna una probabilidad p_1 al resultado sin contingencia, M_0, y una probabilidad p_2 al resultado con contingencia, $M_0 - L$, con $p_1 + p_2 = 1$. Su decisión de aseguramiento consiste en:

- *Cuantía asegurada*: elegir qué cuantía de su renta asegura, M_s, que puede ser igual, inferior o superior a la cuantía perdida, L. La cuantía asegurada es, por tanto, la variable de elección del problema.
- *Prima*: pagar una prima de seguro (o precio de aseguramiento), γ, por unidad de renta asegurada. En consecuencia, si contrata el seguro, asumirá con independencia del resultado un coste de aseguramiento γM_s.

▪ *Restricciones*: el pago en cada estado depende de la decisión de aseguramiento:

- *Sin seguro*: si no se asegura, obtiene $x_1 = M_0$ en ausencia de contingencia y $x_2 = M_0 - L$ si esta se produce.
- *Con seguro*: si se asegura, obtiene $x_1 = M_0 - \gamma M_s$ en ausencia de contingencia y $x_2 = x_1 - L + M_s$ si esta se produce.

Despejando M_s de la primera expresión y sustituyendo en la segunda se obtiene la *recta de aseguramiento*:

$$x_2 = \frac{M_0}{\gamma} - L - \frac{1-\gamma}{\gamma}\, x_1$$

cuya pendiente en el plano (x_1, x_2), $-(1-\gamma)/\gamma$, es la tasa objetiva a la que el mercado permite intercambiar renta entre los dos estados de la naturaleza.

Planteamiento: el agente maximiza su utilidad esperada dadas las restricciones:

$$\max_{M_s} \; u^e = p_1 \cdot u(x_1) + p_2 \cdot u(x_2) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} x_1 = M_0 - \gamma M_s \\ x_2 = x_1 - L + M_s \\ M_s \geq 0 \end{cases}$$

donde M_s es la cuantía asegurada (variable de elección), u^e la utilidad esperada, $u(\cdot)$ la utilidad de Bernoulli, x_1 y x_2 la renta en el estado sin y con contingencia, p_1 y p_2 sus probabilidades respectivas, M_0 la riqueza inicial, L la pérdida y γ la prima por unidad de renta asegurada.

CPO: con solución interior, sustituyendo las restricciones en la función objetivo y derivando respecto a M_s se obtiene la condición de equilibrio:

$$\frac{du^e}{dM_s} = -\gamma\, p_1 \frac{du(x_1)}{dx_1} + (1-\gamma)\, p_2 \frac{du(x_2)}{dx_2} = 0$$
$$\Rightarrow \; \text{RMSE}_{21} = \frac{p_1\, du(x_1)/dx_1}{p_2\, du(x_2)/dx_2} = \frac{1-\gamma}{\gamma}$$

La *relación marginal de sustitución estocástica* (RMSE) es la tasa subjetiva a la que el agente está dispuesto a intercambiar renta entre los dos estados. En el equilibrio, esta coincide con el precio relativo de la renta entre ambos estados, $(1-\gamma)/\gamma$ (indemnización neta por unidad de prima pagada), que refleja la tasa objetiva de intercambio que ofrece el mercado de seguros. De no cumplirse la igualdad, el agente podría trasladar renta de un estado a otro y aumentar su utilidad esperada.

CSO: la concavidad de la utilidad de Bernoulli (aversión al riesgo) hace negativa la segunda derivada de la función objetivo respecto a M_s[10]. La función objetivo es, por tanto, estrictamente cóncava en M_s, y la CPO caracteriza un máximo global.

Solución: el grado de aseguramiento depende de la relación entre la probabilidad de contingencia y la prima, y la prima, a su vez, de la estructura competitiva del mercado de seguros y de sus costes de gestión:

1. *Prima actuarialmente justa* ($\gamma = p_2$, competencia perfecta sin costes de gestión): el agente se asegura por la totalidad de la pérdida ($M_s^* = L$), de modo que $x_1 = x_2$ y, gráficamente, el óptimo está sobre la línea de certeza.

2. *Prima actuarialmente desfavorable* ($\gamma > p_2$, por costes de gestión o poder de mercado de la aseguradora): la recta de aseguramiento es menos inclinada que la curva de indiferencia sobre la línea de certeza, y el agente se infraasegura ($M_s^* < L$): $x_1 > x_2$.

3. *Prima actuarialmente favorable* ($\gamma < p_2$): la recta de aseguramiento es más inclinada que la curva de indiferencia sobre la línea de certeza, y el agente se sobreasegura ($M_s^* > L$): $x_1 < x_2$[11].

Desarrollo gráfico: la decisión de aseguramiento se representa en el plano de rentas contingentes (x_1, x_2) (figura A10.2), con prima actuarialmente justa:

[10] La segunda derivada es $\gamma^2\, p_1\, u''(x_1) + (1-\gamma)^2\, p_2\, u''(x_2) < 0$.

[11] En la práctica los contratos de seguro impiden este caso, lo que equivale a añadir la restricción $M_s \leq L$ y convierte el óptimo en la solución de esquina $M_s^* = L$.

1. *Línea de certeza* (L.C.): recoge las combinaciones con la misma renta en ambos estados ($x_1 = x_2$) y forma un ángulo de 45° con los ejes.

2. *Recta de aseguramiento* (R.A.): parte del punto 0, la situación sin seguro $(M_0, M_0 - L)$, con pendiente $-(1-\gamma)/\gamma$.

3. *Curva de indiferencia* (u^e): recoge las combinaciones de rentas contingentes con la misma utilidad esperada, y su pendiente en valor absoluto es la RMSE.

4. *Equilibrio*: en el punto 1, la recta de aseguramiento es tangente a la mejor curva de indiferencia alcanzable. Con prima justa, el punto está sobre la línea de certeza y el agente obtiene $M_0 - \gamma L$ en ambos estados.

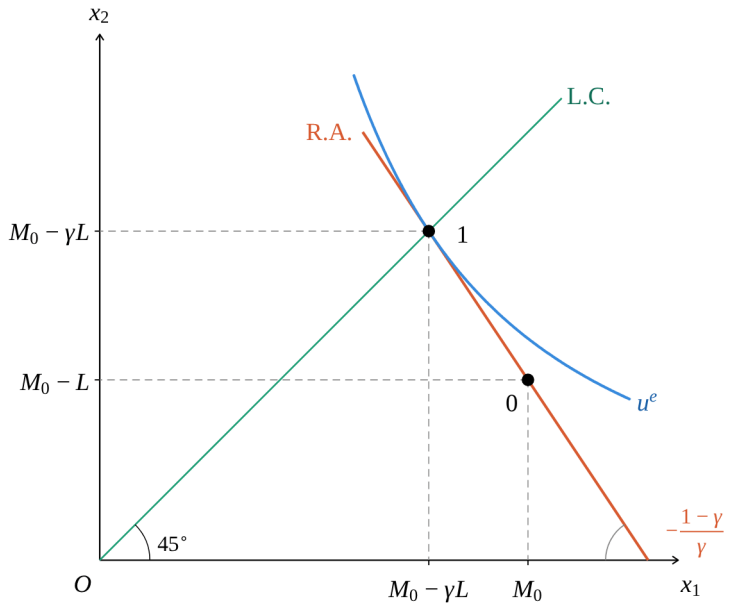


Figura A10.2: Demanda de seguro. Con prima actuarialmente justa, el individuo averso al riesgo se asegura completamente e iguala la riqueza en ambos estados de la naturaleza.

Estática comparativa: a partir de la condición de equilibrio, y dado que se cumple el teorema de la función implícita, la cuantía asegurada óptima (función de demanda de aseguramiento) puede expresarse en función de los parámetros del modelo. Unos afectan a la utilidad de Bernoulli (el grado de aversión) y otros a la lotería (probabilidades, riqueza inicial, pérdida y prima)[12]:

$$M_s^* = d_s(\underset{+}{\text{CAA}},\ \underset{-}{p_1},\ \underset{+}{p_2},\ \underset{\pm}{M_0},\ \underset{+}{L},\ \underset{\pm}{\gamma})$$

Extensiones: el modelo toma la prima como dada. Que la competencia pueda llevarla hasta la actuarialmente justa descansa en que la aseguradora se comporte de forma aproximadamente neutral al riesgo, gracias a dos mecanismos:

[12] El efecto de la prima se descompone en un efecto sustitución negativo y un efecto renta. Con CAA decreciente y prima actuarialmente desfavorable ($\gamma > p_2$) el seguro es un bien inferior (Mossin, 1968), el efecto renta es positivo y el signo total es ambiguo.

▪ *Agrupación de riesgos* (*risk pooling*): al reunir muchos riesgos independientes, la ley de los grandes números hace que la pérdida media por asegurado se aproxime a su valor esperado. Con n riesgos independientes e idénticamente distribuidos, de varianza σ^2, la varianza de la pérdida media es σ^2/n. Sin embargo, la agrupación solo elimina el riesgo idiosincrásico, ya que los riesgos agregados o sistemáticos (catástrofes, pandemias) no se diluyen al agruparlos.

▪ *Reparto de riesgos* (*risk sharing*): un riesgo dado, repartido entre muchos agentes (accionistas de la aseguradora, mutualistas, reaseguradoras o contribuyentes), genera una prima de riesgo total menor, que tiende a cero al crecer el número de partícipes. La razón es que la prima de cada agente es aproximadamente proporcional a la varianza que soporta, y esta, al cuadrado de su participación. En este principio se basan el reaseguro, las mutualidades y el argumento de Arrow y Lind (1970), según el cual una inversión pública cuyo rendimiento sea independiente de la renta nacional puede evaluarse como si el Estado fuera neutral al riesgo.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el modelo ofrece los fundamentos de la demanda de aseguramiento, sus determinantes y su estática comparativa.

▪ *Limitaciones*: la simplicidad de sus supuestos lo hace susceptible de extensiones, la más relevante de las cuales es la información asimétrica, tanto *ex ante* (selección adversa) como *ex post* (riesgo moral), que se estudia en el tema A13.

1.3.2. Decisión de cartera (Markowitz, 1952; Tobin, 1958; Sharpe, 1963)

Origen: la selección de carteras se formaliza con el enfoque media-varianza de Markowitz (1952), que Tobin (1958) extiende con un activo sin riesgo y Sharpe (1963) simplifica con el modelo de índice único (tema B23, §2). Aquí, en cambio, se expone la versión en utilidad esperada con dos estados, un activo seguro y otro arriesgado, en la línea de Pratt (1964) y Arrow (1965). Su modelización es similar a la de aseguramiento, con la diferencia de que el agente parte de una situación de certeza.

Idea: se trata de determinar las condiciones que empujan a un agente averso al riesgo a abandonar la línea de certeza, y sus efectos sobre los resultados finales.

Supuestos:

▪ *Entorno*: el agente parte de una riqueza M_0 invertida en un activo de rentabilidad cierta r, el bono[13]. Se le presenta la opción de invertir una proporción $\alpha \in [0,1]$ de su riqueza en un activo con riesgo, la acción, cuyo rendimiento es alto, r_a, con probabilidad $1-p$, y bajo, r_b, con probabilidad p, con $r_a > r > r_b$. En el resultado alto el agente gana, por tanto, respecto al bono, y en el bajo pierde. Los pagos en cada estado son $x_1 = M_0[1 + r + \alpha(r_a - r)]$ y $x_2 = M_0[1 + r - \alpha(r - r_b)]$.

▪ *Agentes*: sus preferencias vienen representadas por la misma función de utilidad esperada del problema de aseguramiento.

Planteamiento: la decisión consiste en elegir la proporción α que maximiza la utilidad esperada:

$$\max_{\alpha} \; u^e = (1-p) \cdot u(x_1) + p \cdot u(x_2)$$

[13] Rentabilidad asegurada no equivale a riesgo nulo en la realidad (riesgo de tipo de interés, insolvencia, etc.).

donde α es la proporción de la riqueza invertida en la acción, u^e la utilidad esperada, $u(\cdot)$ la utilidad de Bernoulli, x_1 y x_2 los pagos en los estados de rendimiento alto y bajo, y p la probabilidad del rendimiento bajo.

CPO: derivando respecto a α e igualando a cero se obtiene la condición de equilibrio:

$$\frac{du^e}{d\alpha} = (1-p)\frac{du(x_1)}{dx_1}M_0(r_a - r) - p\frac{du(x_2)}{dx_2}M_0(r - r_b) = 0$$
$$\Rightarrow \text{RMSE}_{21} = \frac{(1-p)\,du(x_1)/dx_1}{p\,du(x_2)/dx_2} = \frac{r - r_b}{r_a - r}$$

En el óptimo, la tasa subjetiva a la que el agente intercambia renta entre los dos estados (la RMSE) iguala la tasa objetiva a la que la cartera permite intercambiarla, el cociente entre la pérdida y la ganancia de la acción respecto al bono.

CSO: la aversión al riesgo ($u'' < 0$) hace estrictamente cóncava la utilidad esperada en α, de modo que la CPO caracteriza un máximo, mientras que con neutralidad o propensión al riesgo la solución es de esquina, $\alpha^* \in \{0, 1\}$.

Solución: como en toda demanda, el factor más interesante es el precio relativo, que aquí es una combinación de los tres rendimientos (r_a, r_b, r). En función de ellos caben tres equilibrios: cartera invertida por completo en el bono ($\alpha^* = 0$), cartera diversificada ($0 < \alpha^* < 1$) y cartera invertida por completo en la acción ($\alpha^* = 1$).

Desarrollo gráfico: en el plano de rentas contingentes (x_1, x_2) (figura A10.3), la condición de equilibrio es la tangencia entre la curva de indiferencia más elevada posible y la recta de cartera (R.C.), cuyos puntos extremos son las carteras no diversificadas, B (solo bonos, $\alpha = 0$), sobre la línea de certeza en $M_0(1 + r)$, y A (solo acciones, $\alpha = 1$), con pagos $M_0(1 + r_a)$ y $M_0(1 + r_b)$. La pendiente de la recta, $-(r - r_b)/(r_a - r)$, es la tasa objetiva a la que la cartera permite intercambiar renta entre los dos estados. Si en B la recta es menos inclinada que la curva de indiferencia, es decir, si el rendimiento esperado de la acción supera a r, el agente abandona la línea de certeza (punto 0).

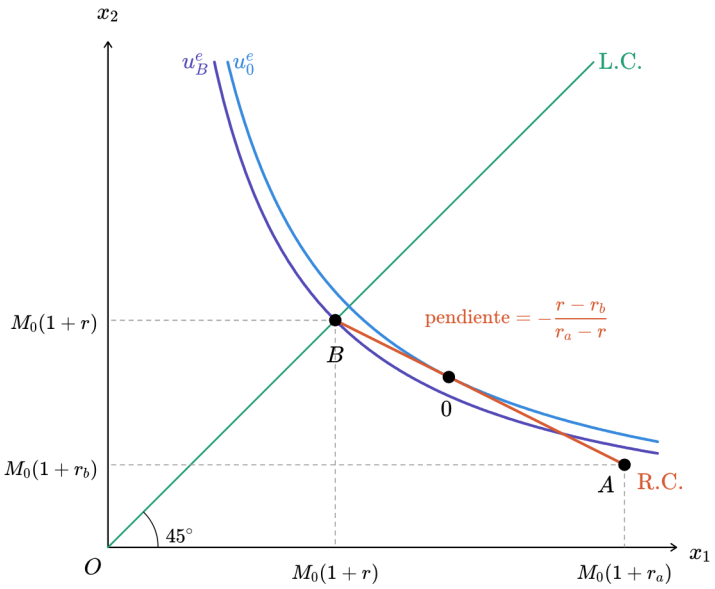


Figura A10.3: Decisión de cartera. La recta de cartera (R.C.) une B (solo bonos, $\alpha = 0$), sobre la línea de certeza (L.C.), con A (solo acciones, $\alpha = 1$). Como en B es menos inclinada que la curva de indiferencia u_B^e, el inversor averso al riesgo abandona la certeza y elige la cartera diversificada 0 ($0 < \alpha^* < 1$), donde la recta es tangente a la curva más alta alcanzable, u_0^e.

Estática comparativa: la demanda de activo con riesgo, α^*, depende de cuatro factores:

- *Grado de aversión*: su aumento la reduce.
- *Probabilidad del resultado desfavorable*, p: su aumento reduce la demanda de la acción.
- *Riqueza*: su efecto es indeterminado, como en el modelo de seguro.
- *Niveles de ganancia ($r_a - r$) y de pérdida ($r - r_b$) respecto al rendimiento del bono*: la afectan, en general, positiva y negativamente, respectivamente.

Estos efectos se resumen en la función de demanda:

$$\alpha^* = d(\underset{-}{\text{CAA}},\ \underset{-}{p},\ \underset{\pm}{M_0},\ \underset{+}{r_a},\ \underset{+}{r_b},\ \underset{-}{r})$$

El signo de r_b es inequívoco, porque, al subir, reduce la pérdida en el estado desfavorable y los efectos sustitución y renta actúan en el mismo sentido. Los signos de r_a y r, en cambio, son los del efecto sustitución y exigen supuestos adicionales. Por un lado, un aumento de r_a tiene también un efecto renta de signo opuesto, y el signo positivo solo está garantizado si CAR ≤ 1. Por otro lado, un aumento de r eleva además la riqueza, y el signo negativo está garantizado con CAA constante o creciente (con CAA decreciente, el efecto riqueza empuja en sentido contrario).

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: explica la demanda de activos con riesgo, y la elección entre una cartera sin riesgo, diversificada o concentrada en la acción, a partir de la aversión al riesgo y la riqueza del inversor. Enlaza así la teoría de la utilidad esperada con la selección de carteras y la valoración de activos (tema B23).

▪ *Limitaciones*: con dos estados y un solo activo arriesgado, el modelo no recoge la correlación entre rendimientos, de la que dependen las ganancias de la diversificación, y varios signos de la demanda exigen supuestos sobre la forma de la aversión al riesgo. Comparte, además, los límites empíricos de la utilidad esperada (apartado 2).

1.4. Extensiones: dominancia estocástica y preferencia por estados

La teoría admite dos extensiones. La dominancia estocástica ordena las loterías con independencia de las preferencias, y la preferencia por estados convierte la elección con riesgo en un problema ordinario de demanda.

1.4.1. Dominancia estocástica

Los coeficientes de Arrow-Pratt caracterizan al individuo y constituyen el componente subjetivo de la función de utilidad esperada. La **dominancia estocástica**, en cambio, caracteriza a las loterías, es decir, establece cuáles son mejores que otras con independencia de las preferencias de los agentes. Permite ordenarlas parcialmente (no todo par de loterías es comparable) sin conocer la función de utilidad concreta. Sean F y G las funciones de distribución de dos loterías sobre los pagos:

1. *Dominancia estocástica de primer orden*: F domina a G en primer orden si $F(x) \leq G(x)$ para todo x. Es decir, para cualquier nivel de pago, la probabilidad de no alcanzarlo nunca es mayor con F (y, si la dominancia es estricta, es menor para algún nivel). En consecuencia, todo agente con utilidad creciente (aversión al riesgo aparte) prefiere F.

2. *Dominancia estocástica de segundo orden*: F domina a G en segundo orden si $\int_{-\infty}^{x}[G(t) - F(t)]\,dt \geq 0$ para todo x. En este caso, todo agente averso al riesgo prefiere F. En particular, cuando ambas tienen la misma media, la condición significa que G es una versión de F con "más dispersión" (Rothschild y Stiglitz, 1970).

La dominancia de segundo orden es la formalización rigurosa de la intuición de que, a igual rendimiento esperado, el averso al riesgo elige la lotería menos arriesgada. El criterio media-varianza de Markowitz es un caso particular válido cuando las distribuciones son normales o la utilidad es cuadrática.

1.4.2. Preferencia por estados (Arrow, 1953; Debreu, 1959)

Origen: Arrow (1953) y Debreu (1959) reformulan el problema de la elección con riesgo en los términos de la teoría del consumidor.

Idea: el consumo en cada estado de la naturaleza se trata como un bien distinto.

Planteamiento: con dos estados $s = 1, 2$ de probabilidades p_1, p_2, el individuo elige el vector (x_1, x_2) maximizando $p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2)$ sujeto a $q_1 x_1 + q_2 x_2 = M_0$, donde q_s es el precio de un activo contingente (*activo Arrow*) que paga una unidad si ocurre el estado s y nada en caso contrario.

CPO: con solución interior y la restricción agotada, derivando el lagrangiano respecto al consumo de cada estado y eliminando el multiplicador, se obtiene la condición habitual del consumidor:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_s} = p_s \frac{du(x_s)}{dx_s} - \lambda q_s = 0 \quad (s = 1, 2) \;\Rightarrow\; \frac{p_1\, du(x_1)/dx_1}{p_2\, du(x_2)/dx_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

Es decir, la relación marginal de sustitución entre el consumo de los dos estados, ponderada por sus probabilidades, iguala al precio relativo de los activos contingentes. El individuo traslada consumo de un estado a otro hasta que la tasa subjetiva a la que está dispuesto a intercambiarlo coincide con la tasa objetiva que fija el mercado de activos Arrow.

CSO: la concavidad estricta de $u(x)$ (aversión al riesgo) hace estrictamente cuasicóncava la utilidad esperada en (x_1, x_2) y la restricción es lineal, por lo que la CPO es suficiente.

Solución: si los precios de los activos contingentes son actuarialmente justos ($q_1/q_2 = p_1/p_2$), el averso al riesgo iguala el consumo en ambos estados ($x_1 = x_2$), es decir, se asegura plenamente, resultado idéntico al de la decisión de aseguramiento (figura A10.2).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el enfoque tiene dos ventajas. En primer lugar, convierte la elección bajo riesgo en un problema ordinario de demanda, con curvas de indiferencia en el plano (x_1, x_2) y el mismo instrumental de los temas A08 y A09. En segundo lugar, muestra que un sistema completo de mercados contingentes permite asignar el riesgo de forma eficiente entre los agentes. El resultado es la base del tratamiento de la incertidumbre en el equilibrio general (tema A21) y de la valoración de derivados por replicación (tema B25).

- *Limitaciones*: la asignación eficiente del riesgo exige un sistema completo de mercados contingentes, que en la práctica no existe. La razón es que crear un mercado para cada estado es costoso y que los estados deben ser observables y verificables por todas las partes, lo que excluye la información asimétrica (tema A13).

1.5. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría de la utilidad esperada extiende la teoría de la elección al riesgo con un aparato mínimo, porque los axiomas de racionalidad y continuidad más el de independencia bastan para representar las preferencias sobre loterías mediante una esperanza matemática de utilidades. Además, la curvatura de la utilidad de Bernoulli caracteriza y mide la actitud ante el riesgo (Arrow-Pratt), y el mismo instrumental del consumidor (curvas de indiferencia, restricción, tangencia) resuelve las decisiones de aseguramiento y de cartera y se generaliza a los mercados contingentes.

Limitaciones: destacan tres, que ordenan el resto del tema:

1. *Independencia*: el axioma que da a la función su forma lineal en probabilidades es también el más contestado empíricamente.

2. *Estabilidad de los perfiles*: la actitud ante el riesgo cambia con el nivel o el marco de referencia de la riqueza.

3. *Probabilidades objetivas*: la teoría las presupone, de modo que la incertidumbre en sentido de Knight exige un tratamiento propio.

2. Desarrollos posteriores: críticas y teoría de la perspectiva

La teoría de la utilidad esperada es la herramienta de referencia para el análisis de situaciones de riesgo. Sin embargo, los perfiles de riesgo pueden cambiar en función de distintas variables, lo que ha motivado diferentes críticas y desarrollos posteriores. Todos ellos mantienen el supuesto de riesgo, con probabilidades objetivas y conocidas. En cambio, la incertidumbre, en la que las probabilidades son subjetivas o no existen, se estudia en la sección 3, con sus propias críticas.

2.1. Críticas teóricas: forma de la función de utilidad

Dos trabajos, el de Friedman y Savage (1948) y el de Markowitz (1952), cuestionaron la forma de la utilidad de Bernoulli para explicar comportamientos observados.

2.1.1. Paradoja de Friedman y Savage (1948)

Origen: según Friedman y Savage, existe incoherencia entre los perfiles de agentes tal y como se plantean en la teoría de la utilidad esperada. Por ejemplo, un mismo agente puede adquirir seguros (aversión al riesgo) y participar en juegos de azar desfavorables (propensión al riesgo).

Idea: la solución propuesta es una utilidad de Bernoulli con tres tramos (cóncavo-convexo-cóncavo) y dos puntos de inflexión, $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$.

Razonamiento: la aversión se da en niveles altos y bajos de renta, la propensión en los intermedios. En consecuencia, un mismo consumidor podría presentar distinta aversión al riesgo en función de cómo evoluciona su nivel de renta.

Desarrollo gráfico: en el plano pagos-utilidad (figura A10.4), la utilidad de Bernoulli, $u(x)$, es cóncava en las rentas bajas, hasta $\hat{x}_1$, convexa en las rentas medias, entre $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$, y de nuevo cóncava en las rentas altas, a partir de $\hat{x}_2$. Los tramos cóncavos reflejan aversión al riesgo y el convexo, propensión, por lo que la actitud del consumidor ante el riesgo depende de su nivel de renta.

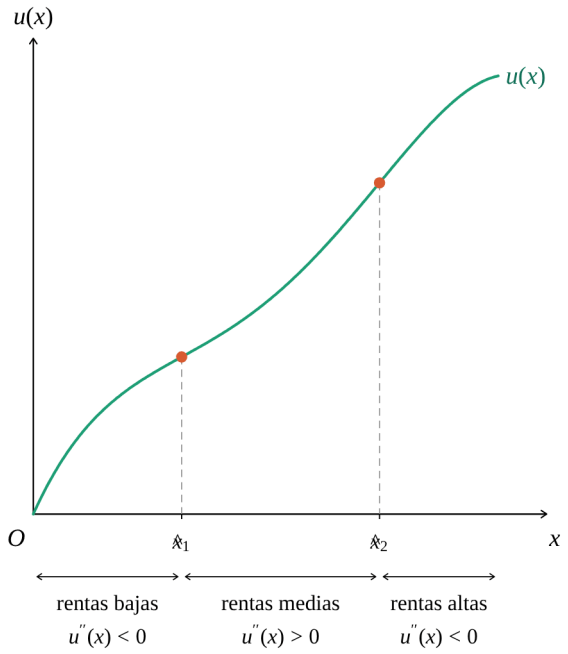


Figura A10.4: Función de utilidad de Friedman y Savage (1948). Sus tramos cóncavos y convexos explican la coexistencia de seguros y loterías en un mismo individuo.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: la aportación fue relevante porque permitía entender comportamientos observados.

▪ *Limitaciones*: la principal, señalada por Markowitz (1952), es que sus implicaciones no son compatibles con la evidencia empírica. En particular, los individuos de renta alta, situados en el último tramo cóncavo, no aceptarían apuestas desfavorables, y los de renta intermedia desearían apuestas simétricas de gran cuantía. Si lo primero fuera cierto, no existirían los casinos de Montecarlo, porque los millonarios no apostarían.

2.1.2. La utilidad de la riqueza (Markowitz, 1952)

Origen: Markowitz (1952) cuestionó que las loterías se evalúen según la renta final.

Idea: propuso que lo relevante son los cambios de renta respecto a la renta presente: $x = M_0 + \Delta x$, donde Δx representa la ganancia o pérdida respecto a la riqueza actual M_0, que actúa como punto de referencia (la renta "habitual" del agente).

Razonamiento: la solución propuesta en este caso es una utilidad con tres puntos de inflexión, el central situado en la riqueza habitual, que refleja el nivel de renta (o consumo) habitual y actúa como "ancla" del comportamiento. Esta utilidad es convexa ante ganancias pequeñas y cóncava ante las grandes, cóncava ante pérdidas pequeñas y convexa ante las grandes.

Desarrollo gráfico: en el plano pagos-utilidad (figura A10.5), el punto de inflexión central de $u(x)$ está en la riqueza habitual, M_0 ($\Delta x = 0$). A su derecha, en las ganancias, la función es primero convexa y luego cóncava, y a su izquierda, en las pérdidas, primero cóncava y luego convexa. Refleja así propensión al riesgo ante ganancias pequeñas y aversión ante las grandes, y aversión ante pérdidas pequeñas y propensión ante las grandes.

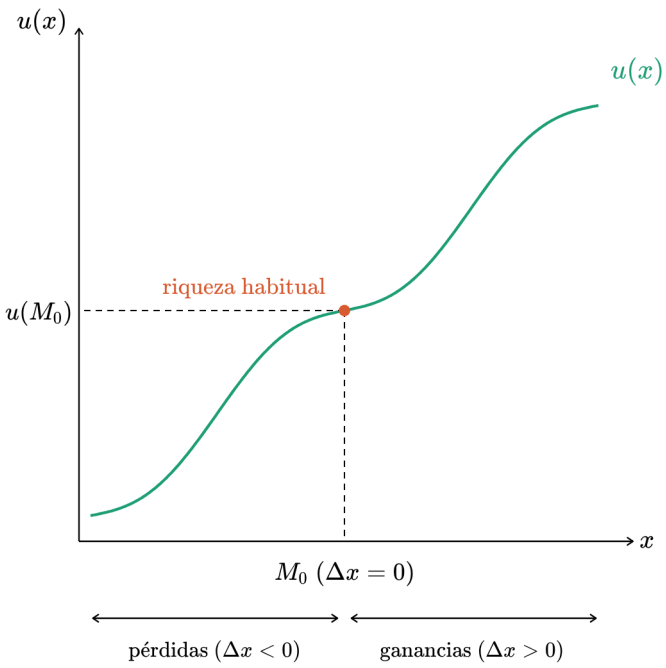


Figura A10.5: Función de utilidad de Markowitz (1952). La riqueza habitual M_0 ($\Delta x = 0$) es el punto de referencia. La función es convexa ante ganancias pequeñas y cóncava ante ganancias grandes, cóncava ante pérdidas pequeñas y convexa ante pérdidas grandes.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la teoría ofrece así más matices que la de Friedman y Savage, y su punto de referencia influyó en los trabajos de Kahneman y Tversky sobre la aversión a la pérdida.

- *Limitaciones*: la dificultad de postular funciones de este tipo y posibles incoherencias entre perfiles.

2.2. Críticas empíricas: violaciones de los axiomas

Junto a las críticas teóricas, la literatura sometió la teoría de la utilidad esperada a contraste experimental, observando las elecciones reales de los individuos ante situaciones de riesgo. Estos estudios descubrieron violaciones sistemáticas y recurrentes de sus hipótesis, que pueden ordenarse según el supuesto que incumplen.

Violaciones del axioma de independencia (Allais, 1953): la *paradoja de Allais* muestra que cambios en componentes comunes a dos loterías, que según el axioma de independencia no deberían alterar la elección entre ellas, sí la alteran.

En su experimento, con dos pares de loterías $(\mathbf{l}_1^1, \mathbf{l}_2^1)$ y $(\mathbf{l}_1^2, \mathbf{l}_2^2)$ construidos sobre los mismos resultados, la mayoría de los individuos prefiere $\mathbf{l}_1^1$ en el primer par y $\mathbf{l}_2^2$ en el segundo, aunque ambos pares solo difieren en una consecuencia común a las dos loterías.

La literatura posterior (MacCrimmon y Larsson, 1979) distinguió dos manifestaciones de este resultado:

- *Efecto consecuencia común*: la preferencia entre dos loterías cambia cuando se modifica un premio que ambas comparten con la misma probabilidad. Intuitivamente, cuanto mayor es el pago común, más averso se vuelve el agente respecto a la parte incierta.

- *Efecto razón común* (o *efecto certeza*, Kahneman y Tversky, 1979): la preferencia cambia cuando todas las probabilidades de ganar se reducen en la misma proporción. Los individuos sobrevaloran los resultados ciertos frente a los meramente probables.

Violaciones de la invarianza: la teoría supone que la elección depende de las loterías y no de cómo se presentan ni de cómo se pregunta por ellas. Sin embargo, dos resultados contradicen este supuesto:

- *Efecto marco* (Tversky y Kahneman, 1981): cambios en la forma de describir un mismo problema (en términos de ganancias o de pérdidas) conducen a elecciones diferentes, debido a sesgos cognitivos.

- *Inversiones de preferencia* (Lichtenstein y Slovic, 1971): al pedir a los individuos que elijan entre dos loterías y que valoren cada una por separado, la lotería elegida no es siempre la mejor valorada, lo que contradice la transitividad y la invarianza del procedimiento.

2.3. Teoría de la perspectiva (Kahneman y Tversky, 1979)

Origen: las regularidades empíricas anteriores, en especial las violaciones del axioma de independencia y de la invarianza, han guiado el desarrollo de enfoques alternativos[14] que rompen ese axioma. Estas teorías se basan en:

- *Dominancia estocástica*: debilitan la independencia preservando la dominancia estocástica de primer orden, como la utilidad dependiente del rango (Quiggin, 1982).

- *Ponderación de probabilidades*: abandonan la linealidad de las probabilidades e incorporan funciones que transforman las probabilidades objetivas en pesos de decisión, de modo que los agentes "incorporan" las probabilidades y las modifican o ponderan.

Idea: de estos enfoques se expone la *teoría de la perspectiva* de Daniel Kahneman (Nobel 2002) y Amos Tversky, formulada en 1979 para la elección con riesgo, es decir, con probabilidades objetivas conocidas. Su reformulación de 1992, la teoría de la perspectiva acumulativa, la extiende a la incertidumbre y se expone en el apartado 3.1.2. Según la versión de 1979, los agentes valoran las loterías como ganancias y pérdidas respecto a un punto de referencia. Para ello emplean una función de valor y una función de ponderación de las probabilidades, que sustituyen, respectivamente, a la utilidad de Bernoulli y a las probabilidades objetivas de la TUE.

2.3.1. Supuestos

Entorno: como en la TUE, el agente elige entre loterías definidas sobre un conjunto finito de resultados con probabilidades objetivas conocidas. El modelo es, por tanto, de riesgo y no de incertidumbre. La función de ponderación no sustituye esas probabilidades por creencias propias del agente, como hará la probabilidad subjetiva del apartado 3.1.1, sino que las transforma en pesos de decisión que recogen cómo las percibe el agente.

[14] Generalmente llamadas teorías de utilidad no esperada: utilidad subjetivamente ponderada, utilidad esperada dual, optimismo-pesimismo, teoría del arrepentimiento, entre otras.

La diferencia con la TUE está en que los resultados se codifican no como niveles de riqueza final, sino como ganancias y pérdidas respecto a un punto de referencia (habitualmente la riqueza actual, aunque puede ser una expectativa o una aspiración), Δx_i.

Agentes: el decisor evalúa la lotería en dos fases:

1. *Edición*: primero simplifica y codifica el problema (fija el punto de referencia, clasifica los resultados en ganancias y pérdidas, elimina componentes comunes), lo que hace posibles los efectos de marco.

2. *Evaluación*: después valora cada lotería mediante una función de valor $v(\cdot)$ sobre ganancias y pérdidas y una función de ponderación $\pi(\cdot)$ sobre las probabilidades.

Finalmente, elige la lotería con mayor valor ponderado.

2.3.2. Modelo

Planteamiento: para un caso discreto, las loterías se evalúan según:

$$V(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{n} \pi(p_i) \cdot v(\Delta x_i)$$

donde $v(\cdot)$ es la **función de valor**, creciente y con $v(0) = 0$, definida sobre ganancias y pérdidas ($\Delta x_i = x_i - x_0$) respecto del punto de referencia x_0, y $\pi(\cdot)$ es la **función de ponderación**, no lineal, que transforma las probabilidades objetivas en pesos de decisión. En esta versión los pesos se aplican a cada probabilidad por separado, lo que puede llevar a elegir loterías dominadas estocásticamente en primer orden. Kahneman y Tversky lo evitan suponiendo que, en la fase de edición, el agente detecta y descarta las alternativas dominadas. La versión acumulativa, en cambio, lo resuelve de forma general.

Los cuatro elementos esenciales del modelo se desprenden de cada función:

Función de valor ($v(\Delta x)$):

- *Dependencia del punto de referencia*: el valor se define sobre las ganancias y pérdidas Δx_i, porque el sistema perceptivo responde más a cambios que a magnitudes absolutas.

- *Aversión a la pérdida*: los agentes son más sensibles a las pérdidas que a ganancias de idéntica magnitud. Por ello, la función es asimétrica, con mayor pendiente en la región de pérdidas: $-v(-\Delta x) > v(\Delta x)$ para $\Delta x > 0$.

- *Sensibilidad decreciente*: la función $v(\cdot)$ es cóncava en ganancias y convexa en pérdidas, lo que implica aversión al riesgo en el dominio de las ganancias y propensión al riesgo en el de las pérdidas (para probabilidades moderadas).

Gráficamente, en el plano $(\Delta x, v)$ (figura A10.6), la función de valor, $v(\Delta x)$, pasa por el origen, que es el punto de referencia. Es cóncava en las ganancias, convexa en las pérdidas y más inclinada en estas, de modo que una pérdida $-\Delta x$ resta más valor, $v(-\Delta x)$, del que suma una ganancia de igual cuantía, $v(\Delta x)$.

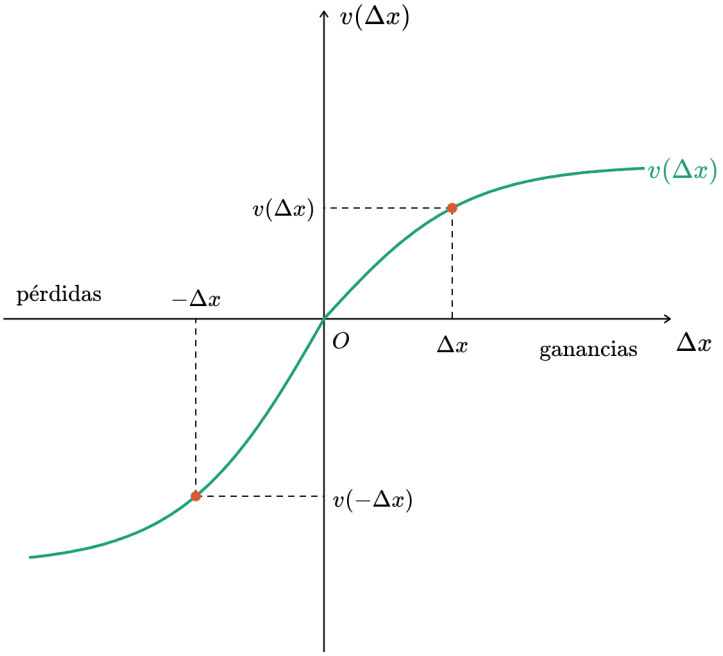


Figura A10.6: Función de valor de la teoría de la perspectiva (Kahneman y Tversky, 1979). Es cóncava en ganancias, convexa en pérdidas y más inclinada en el dominio de las pérdidas (aversión a las pérdidas).

Función de ponderación ($\pi(p)$):

▪ *Ponderación de probabilidades*: en el plano $(p, \pi(p))$ (figura A10.7), $\pi(\cdot)$ sobrepondera las probabilidades bajas e infrapondera las altas[15] (patrón de S invertida), de modo que el agente sobrepondera las colas de la distribución. Combinada con la función de valor, explica el patrón cuádruple de actitudes ante el riesgo: aversión ante ganancias probables y pérdidas improbables, propensión ante ganancias improbables (loterías) y pérdidas probables.

[15] Los pesos de decisión no tienen por qué cumplir las reglas de la probabilidad (por ejemplo, $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$, subcerteza).

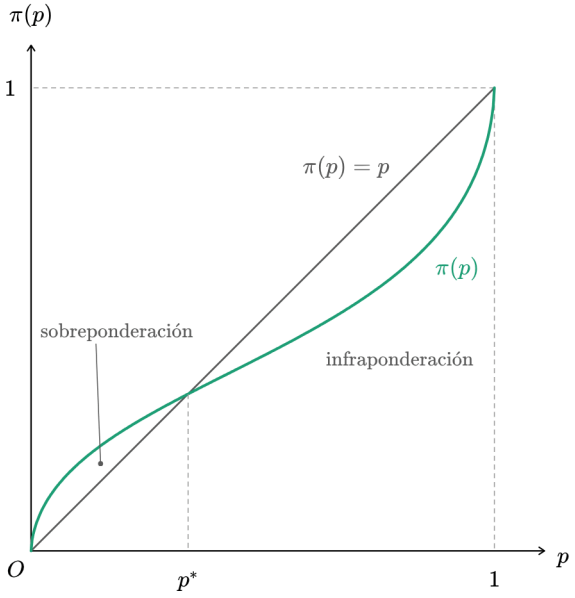


Figura A10.7: Función de ponderación de la teoría de la perspectiva, dibujada continua como en su versión acumulativa (Tversky y Kahneman, 1992). La curva $\pi(p)$, en S invertida, queda por encima de la diagonal $\pi(p) = p$ con probabilidades bajas, $p < p^*$ (sobreponderación), y por debajo con las moderadas y altas (infraponderación).

2.3.3. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría de la perspectiva recoge las violaciones sistemáticas del axioma de independencia y de la invarianza ya documentadas sin renunciar a un aparato formal comparable al de la TUE. Su versión acumulativa satisface, además, la dominancia estocástica de primer orden.

Camerer (2000) reúne diez regularidades de datos de campo que contradicen la utilidad esperada y que se explican con la aversión a la pérdida, la forma de $v(\cdot)$, cóncava en ganancias y convexa en pérdidas, y la ponderación no lineal de las probabilidades. Asimismo, conceptos derivados como el efecto dotación o la contabilidad mental (Thaler) constituyen hoy el núcleo de la economía conductual.

Limitaciones: la principal es la dificultad de aplicación a problemas económicos concretos[16]. En un caso concreto (p. ej. una decisión de cartera) no es evidente cómo especificar el punto de referencia. ¿Ganancias y pérdidas de la riqueza total, del valor de mercado de la cartera o de cada activo por separado?

A ello se añade que la fase de edición, que determina el punto de referencia, no está formalizada, y que la teoría es descriptiva y no normativa, es decir, explica cómo eligen los individuos, no cómo deberían elegir.

[16]Se ha aplicado a finanzas (carteras), aseguramiento, efecto dotación, consumo-ahorro, oferta de trabajo y organización industrial. Campos de potencial aplicación: economía pública, economía de la salud, macroeconomía (Barberis, 2013).

2.4. Conclusiones

La crítica teórica a la utilidad esperada cuestiona la forma de la utilidad de Bernoulli. Friedman y Savage (1948) combinan tramos cóncavos y convexos para que un mismo individuo compre seguros y participe en juegos de azar. Markowitz (1952) muestra que esa forma no casa con la evidencia y define la utilidad sobre las variaciones respecto a la riqueza habitual, su punto de referencia. La crítica empírica documenta, en cambio, violaciones sistemáticas de la independencia (Allais, 1953) y de la invarianza.

La teoría de la perspectiva reúne ambas críticas. Valora las loterías como ganancias y pérdidas respecto a un punto de referencia, como proponía Markowitz, y explica la paradoja de Allais y el efecto marco con la aversión a la pérdida, la sensibilidad decreciente y la ponderación no lineal de las probabilidades. Su versión de 1979 sigue limitada, sin embargo, a probabilidades objetivas y, sin la fase de edición, puede llevar a elegir loterías dominadas. La sección 3 abandona ese supuesto, y la versión acumulativa del apartado 3.1.2 resuelve ambos problemas.

3. Elección en incertidumbre

Rara vez los agentes se enfrentan a situaciones reducibles a distribuciones de probabilidad objetivas. Lo habitual es la incertidumbre en sentido de Knight (véase la introducción), en la que el término "probabilidad" se refiere a estimaciones subjetivas. Por ello existe toda una literatura dedicada a la toma de decisiones no en un contexto de riesgo, sino de incertidumbre.

La sección sigue el mismo orden que las dos anteriores. Primero extiende la utilidad esperada a las probabilidades subjetivas (Anscombe y Aumann, 1963) y expone su principal crítica, la paradoja de Ellsberg (1961), y después la teoría de la perspectiva. El análisis bayesiano muestra cómo se revisan esas creencias con nueva información, y los criterios de decisión cubren el caso en que el agente no asigna probabilidades, ni siquiera subjetivas.

3.1. Teoría de la probabilidad subjetiva y teoría de la perspectiva acumulativa

Las dos teorías de la elección con riesgo, la utilidad esperada y la teoría de la perspectiva, admiten extensiones a la incertidumbre, respectivamente la **teoría de la probabilidad subjetiva** y la teoría de la perspectiva acumulativa.

3.1.1. Teoría de la probabilidad subjetiva (Anscombe y Aumann, 1963)

Origen: las distintas formulaciones[17] comparten el objetivo de determinar simultáneamente una función de utilidad (gustos) y una medida de probabilidad (creencias) a partir de las preferencias observadas. Se expone la de Anscombe y Aumann (1963), porque es la más próxima a la teoría de utilidad esperada.

Idea: el enfoque de probabilidad subjetiva utiliza el mismo aparato formal que la teoría de la utilidad esperada, pero el agente se comporta *como si* estableciera probabilidades subjetivas o creencias.

Supuestos:

▪ *Entorno*: existe un conjunto finito[18] de estados de la naturaleza, $j = 1, \dots, s$, cuyas probabilidades no están dadas, sino que son establecidas subjetivamente por el agente. El planteamiento admite, además, valoraciones estado-dependientes[19]. Cada alternativa asigna a cada estado j una lotería objetiva F_j sobre los pagos. El caso particular en que cada F_j es degenerada (paga una cantidad cierta) da el vector de pagos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s_+$. El conjunto de elección $\mathcal{L}$ es el conjunto de todas las loterías compuestas $(F_1, \dots, F_s)$.

▪ *Agentes*: el agente establece sobre $\mathcal{L}$ las relaciones binarias $\sim$, $\succ$ y $\succsim$ (esta última es la base de la axiomática) y cumple los axiomas de completitud, reflexividad, transitividad, continuidad e independencia, ampliada esta última para preferencias estado-dependientes.

Razonamiento: la representación se obtiene en tres pasos:

[17] Savage (1954); Anscombe y Aumann (1963).
[18] Infinito en el planteamiento original de Savage (1954).
[19] Estado-dependiente: la valoración de un pago puede depender del estado en que se obtiene ($u_j(\cdot)$ en el teorema de la utilidad esperada ampliada).

1. *Teorema de la utilidad esperada ampliada*: existen funciones de valoración estado-dependientes $u_j(\cdot)$ tales que cualquier alternativa $(F_1, \dots, F_s)$ puede evaluarse mediante $\sum_j \int u_j(x)\, dF_j(x)$, expresión que se reduce a $\sum_j u_j(x_j)$ en el caso de pagos ciertos.

2. *Preferencias estado-uniformes*: para separar las probabilidades subjetivas π_j de la utilidad $u(\cdot)$, se impone que las preferencias sean estado-uniformes[20]: $\succsim_j = \succsim_{j'} \ \ \forall\, j, j'$.

3. *Teorema de la utilidad esperada subjetiva*: si se satisfacen los axiomas y las preferencias son estado-uniformes, existen $\pi_1, \dots, \pi_s \gg 0$, con $\sum_j \pi_j = 1$, y $u(\cdot)$ tales que:

$$(x_1, \dots, x_s) \succsim (x'_1, \dots, x'_s) \leftrightarrow \sum_j \pi_j \cdot u(x_j) \geq \sum_j \pi_j \cdot u(x'_j)$$

La diferencia con la TUE está en π_j, que refleja probabilidades subjetivas reveladas por las elecciones del agente, no distribuciones objetivas.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: su carácter unificador permite abordar riesgo e incertidumbre bajo el mismo aparato formal. Su carácter operativo también es relevante, pues las creencias del agente son objeto de análisis económico, al revelarse en sus elecciones, y pueden actualizarse con nueva información, que es lo que desarrolla el análisis bayesiano.

- *Limitaciones*: presenta los mismos problemas y críticas que la TUE y, además, problemas propios. En particular, la paradoja de Ellsberg (1961) muestra que, al combinar dos apuestas (una urna con probabilidades conocidas y otra con probabilidades desconocidas), las elecciones no son coherentes con la utilidad esperada subjetiva, porque incumplen el principio de la cosa segura de Savage, equivalente subjetivo del axioma de independencia. Los individuos tienden a preferir la apuesta de riesgo cuantificable aunque nada indique que la incierta sea menos ventajosa, un patrón que ninguna asignación de probabilidades subjetivas puede justificar, como si la incertidumbre generase desutilidad *per se*. Ello dio lugar al concepto de "aversión a la ambigüedad"[21]. Varios modelos posteriores lo incorporan al sustituir la probabilidad subjetiva única por un conjunto de probabilidades entre las que el agente evalúa el peor caso (utilidad esperada *maxmin*, Gilboa y Schmeidler, 1989) o por probabilidades no aditivas (Schmeidler, 1989).

3.1.2. Teoría de la perspectiva acumulativa (Tversky y Kahneman, 1992)

Origen: Tversky y Kahneman (1992) reformulan la versión de 1979 (apartado 2.3), limitada al riesgo y expuesta a violar la dominancia estocástica de primer orden, con la ponderación dependiente del rango de Quiggin (1982) y las probabilidades no aditivas de Schmeidler (1989).

Idea: la función de valor no cambia, mientras que el peso de cada resultado depende de su posición en la ordenación y se obtiene de las probabilidades acumuladas, por separado para ganancias y pérdidas.

Razonamiento: con incertidumbre, el agente no asigna a los sucesos probabilidades subjetivas aditivas, como en la teoría de la probabilidad subjetiva, sino capacidades (pesos no aditivos). Al permitir que los pesos dependan de la fuente de la incertidumbre, la teoría acomoda la aversión a la ambigüedad de la paradoja de Ellsberg.

[20] La valoración de una consecuencia no depende del estado en que se logre.

[21] A diferencia del riesgo y la aversión al riesgo, no existe acuerdo unánime sobre lo que implica la aversión a la ambigüedad.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: respeta la dominancia estocástica de primer orden, unifica riesgo e incertidumbre y, con pocos parámetros, reproduce el patrón cuádruple de actitudes ante el riesgo.

- *Limitaciones*: hereda de la versión de 1979 la dificultad de especificar el punto de referencia y su carácter descriptivo (apartado 2.3.3), y la mayor flexibilidad de los pesos exige estimar más parámetros.

3.2. Análisis bayesiano: árboles de decisión y teorema de Bayes (1763)

La teoría de la probabilidad subjetiva establece que el agente decide con creencias propias. El análisis bayesiano es su contrapartida operativa, pues muestra cómo formar esas creencias y cómo revisarlas cuando se dispone de información experimental adicional.

Teorema de la probabilidad total: permite calcular la probabilidad de un suceso B a partir de las probabilidades condicionadas a los sucesos de una partición[22] sobre el espacio muestral Ω:

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

Teorema de Bayes (1763): establece la probabilidad de un suceso condicionada a la ocurrencia de otro, cuando la información disponible es la del condicionado inverso:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Ejemplo: actualización bayesiana con un estudio de mercado

Una empresa estima que la demanda de un producto nuevo será alta (A_1) con probabilidad $P(A_1) = 0{,}4$ y baja (A_2) con $P(A_2) = 0{,}6$. Un estudio de mercado da un informe favorable (B) con probabilidad $P(B \mid A_1) = 0{,}8$ si la demanda es alta y $P(B \mid A_2) = 0{,}3$ si es baja.

1. *Probabilidad total del informe favorable*: $P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}32 + 0{,}18 = 0{,}50$.

2. *Probabilidad a posteriori de demanda alta*: $P(A_1 \mid B) = 0{,}32/0{,}50 = 0{,}64$.

3. *Probabilidad a posteriori de demanda baja*: $P(A_2 \mid B) = 0{,}18/0{,}50 = 0{,}36$, y ambas suman uno.

El informe favorable eleva la probabilidad de demanda alta de 0,4 a 0,64, porque es más frecuente cuando la demanda es alta (0,8) que cuando es baja (0,3).

Árboles de decisión: representan el problema como una sucesión de nodos de decisión (donde elige el agente) y nodos de azar (donde actúa la naturaleza), y se resuelven hacia atrás. En cada nodo de azar se calcula el valor esperado (o la utilidad esperada, si el agente no es neutral al riesgo) con las probabilidades vigentes, y en cada nodo de decisión se elige la rama de mayor valor. El teorema de Bayes permite actualizar esas probabilidades cuando se dispone de información

[22] B es un suceso cualquiera y $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una partición: $\cup A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall \, i \neq j$.

experimental (un ensayo, una encuesta), lo que a su vez permite valorar la información misma, cuyo valor esperado es la diferencia entre el valor del problema con la información y sin ella.

3.3. Criterios de decisión en incertidumbre

Cuando el agente no está dispuesto a asignar probabilidades, ni siquiera subjetivas, la decisión ha de apoyarse en reglas definidas directamente sobre la matriz de resultados de cada acción en cada estado de la naturaleza:

1. *Criterio de Wald (pesimista)*: "el mejor de los peores resultados" (*maximin* en ganancias, *minimax* en costes). Asegura el mejor resultado posible en el peor escenario.

2. *Criterio optimista (maximax)*: "el mejor de los mejores resultados".

3. *Criterio de Hurwicz*: combina los dos criterios anteriores mediante un índice de optimismo $\alpha \in [0, 1]$, valorando cada acción como $\alpha \cdot (\text{mejor resultado}) + (1-\alpha) \cdot (\text{peor resultado})$ y eligiendo la de mayor valor. Los criterios de Wald y *maximax* son los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

4. *Criterio de Savage (coste de oportunidad)*: calcula el coste de oportunidad de cada acción en cada estado (mejor resultado en ese estado menos el resultado con esa acción). Después selecciona para cada acción el mayor coste de oportunidad y escoge la acción que minimiza dicho máximo (*minimax* del arrepentimiento).

5. *Criterio de Laplace*: sin motivo para creer un estado más probable que otro (principio de razón insuficiente), da a todos el peso $1/s$ y elige la acción de mayor resultado esperado, lo que devuelve el problema a la probabilidad subjetiva.

Conclusiones

El tema ha estudiado la elección con resultados inciertos. Con riesgo, los axiomas de racionalidad, continuidad e independencia permiten representar las preferencias mediante la utilidad esperada, cuya curvatura mide la actitud ante el riesgo y explica las decisiones de aseguramiento y de cartera. Las paradojas de Allais y de Ellsberg y el efecto marco muestran, sin embargo, que la teoría es más una norma de racionalidad que una descripción de la conducta. La teoría de la perspectiva recoge esas regularidades con un punto de referencia, la aversión a la pérdida y la ponderación no lineal de las probabilidades. Con incertidumbre, el agente actúa como si tuviera creencias subjetivas, que revisa con el teorema de Bayes, o recurre a criterios definidos sobre la matriz de resultados. La teoría de la perspectiva acumulativa extiende también a ese caso sus regularidades.

La utilidad esperada extiende la teoría del consumidor al riesgo, con la independencia como axioma adicional (tema A08). Si los bienes se definen por el estado de la naturaleza en que se entregan, la elección con riesgo se convierte en elección entre bienes contingentes, y el equilibrio general abarca también los mercados de seguros (tema A21). La curvatura de la utilidad determina, además, la composición de las carteras y la prima que exigen los activos arriesgados (tema B23), así como el reparto óptimo del riesgo entre un principal y un agente con información asimétrica (tema A13). A su vez, las creencias bayesianas sostienen los juegos con información incompleta (tema A14), y los sesgos de la teoría de la perspectiva reaparecen en la economía conductual del consumo (tema A33).

La solidez de la economía conductual se pone a prueba con metaanálisis. El de Brown, Imai, Vieider y Camerer (2024), con más de seiscientas estimaciones, confirma la aversión a la pérdida, con un coeficiente medio próximo a 2, inferior al 2,25 que estimaron Tversky y Kahneman en 1992. Aun así, sigue abierto si los sesgos se corrigen con el aprendizaje o revelan límites profundos de la racionalidad (Simon, 1955). La modelización de la ambigüedad también avanza. A la utilidad esperada *maxmin* (Gilboa y Schmeidler, 1989) se han sumado modelos que separan la ambigüedad percibida de la actitud ante ella (Klibanoff, Marinacci y Mukerji, 2005) y preferencias robustas ante la desconfianza en el propio modelo (Hansen y Sargent, 2001). Con datos de hogares, la aversión a la ambigüedad se asocia a menor participación en bolsa y menor diversificación (Dimmock, Kouwenberg, Mitchell y Peijnenburg, 2016).

A11. Teoría de la producción

Teoría de la producción. Caracterización de la tecnología de la empresa a corto y largo plazo. El conjunto de posibilidades de producción. La función de producción. Rendimientos locales y globales a escala. Elasticidad de sustitución. Producción conjunta.

Introducción

Para analizar la determinación de precios y cantidades en una economía podría bastar una teoría del consumidor aplicada a una economía de intercambio puro[1], en la que los agentes poseen dotaciones iniciales de bienes y las intercambian para alcanzar sus patrones de consumo preferidos. Sin embargo, ese enfoque ignora la capacidad de la *empresa*, entendida como unidad institucional[2], para transformar esas dotaciones en bienes más elaborados.

La **teoría de la empresa** contempla a esta como el agente que, con la tecnología a su alcance, convierte factores productivos en bienes. Esa tarea está sometida a límites de distinta naturaleza, y por eso la literatura económica analiza la empresa desde varios ángulos que se complementan:

1. *Teoría de la producción*: atiende a lo que la técnica permite. Concibe la empresa como una "caja negra" donde entran factores y sale producto, y su criterio es la eficiencia técnica.

2. *Teoría de costes*: exige además producir al menor coste, para lo que valora los factores por su coste económico, es decir, por su coste de oportunidad.

3. *Teoría de mercados*: estudia cómo hace máximo su beneficio la empresa según la estructura del mercado en que opera.

4. *Teoría de la organización industrial*: adopta un enfoque transversal que abre la "caja negra" y atiende a la propiedad, la dirección y la organización interna de la empresa.

Históricamente, las leyes de la producción tienen su origen en la **ley de rendimientos decrecientes de la tierra** de Turgot y de los economistas clásicos, que la teoría neoclásica generalizó a todos los factores a partir de la productividad marginal (Wicksteed, Clark). La función de producción de Cobb y Douglas (1928) permitió contrastar empíricamente esa generalización, y Solow (1957) convirtió esa función en la herramienta con la que se mide la contribución del progreso técnico al crecimiento. Estos instrumentos son hoy especialmente relevantes, porque la digitalización, la robotización, la automatización, la inteligencia artificial y la transición hacia una economía descarbonizada están transformando los procesos productivos y alteran tanto la función de producción como la estructura de costes de las empresas.

[1] Cuando la economía es de intercambio puro, cualquier consumidor puede, intercambiando, convertir su dotación inicial en cualquier otra cesta del mismo valor a los precios vigentes. Sin embargo, el grupo en su conjunto no dispone de esa posibilidad, porque, para cada bien, el consumo total no puede exceder la dotación inicial total.

[2] La empresa no es solo un grupo de productores que cooperan para aprovechar la especialización, sino que tiene una estructura organizativa y un conjunto de derechos de propiedad determinados.

La **función de producción** es también la pieza con la que la macroeconomía explica el crecimiento y mide la contribución del progreso técnico (temas A43 y A44). Su estudio precede al de los costes (tema A12), porque la tecnología determina el coste mínimo de cada nivel de producción.

El tema desarrolla la teoría de la producción en los bloques siguientes:

- *Fundamentos*: conjunto de posibilidades de producción, función de producción, curvas isocuantas, relación marginal de sustitución técnica (RMST) y elasticidad de sustitución técnica (EST).

- *Leyes de producción*: corto plazo (ley de proporciones variables), largo plazo (rendimientos a escala) y muy largo plazo (progreso técnico).

- *Extensiones*: producción conjunta o multiproducto, paso previo al equilibrio general, y fronteras de eficiencia (medición empírica de la eficiencia productiva).

1. Fundamentos de la teoría de la producción

La teoría de la producción concibe la empresa como un agente racional que procura obtener, con una tecnología dada, el mayor *output* posible de los *inputs* que emplea. Por ello, la teoría excluye los precios y costes del análisis y se centra en las restricciones técnicas que condicionan físicamente la producción.

1.1. El conjunto de elección: planes de producción y tecnología

El conjunto de elección de la empresa se delimita en tres pasos, que van del espacio de todos los planes de producción al subconjunto de los técnicamente posibles y, dentro de este, a su frontera, formada por los técnicamente eficientes.

1.1.1. El espacio de planes de producción

Definición: un *plan de producción* recoge las combinaciones de *output* e *inputs* a las que da lugar un proyecto de producción. En su actividad, la empresa crea productos (*outputs*) y utiliza insumos (*inputs*).

El conjunto de todos los planes se conoce como *espacio de planes de producción* (EPP)[3]:

$$\text{EPP} = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n\}, \qquad \begin{cases} y_i > 0: \ x_i \text{ (output)} \\ y_i < 0: \ z_i \text{ (input)} \end{cases}$$

Sin embargo, cualquier economía tiene recursos limitados y, por lo tanto, existen límites a lo que cada empresa puede producir. Así, si se quiere producir un bien, se deberá renunciar a la producción de otro bien. Estos límites a la actividad empresarial se determinan por la tecnología y la dotación de recursos de la que dispone la empresa.

Por eso, de todos los planes concebibles, la empresa solo tiene a su alcance los que permite el conocimiento técnico disponible y, de entre ellos, los que su dotación de recursos le permite ejecutar.

1.1.2. El conjunto de posibilidades de producción: axiomas de delimitación

Definición: el *conjunto de posibilidades de producción* (CPP) agrupa todos los planes físicamente posibles:

$$\text{CPP} \subseteq \text{EPP}$$

Propiedades: el CPP se delimita dentro del EPP a partir de una serie de axiomas:

- *No vacío*: existe como mínimo un plan de producción a disposición de la empresa. Gráficamente, en el plano *input-output*, hay algún punto que pertenece al CPP.

[3] *Ejemplo*: $\mathbf{y} = (-5, 2, -6, 3, 0)$ significa que se producen 2 y 3 unidades de los bienes 2 y 4, se usan 5 y 6 unidades de los bienes 1 y 3, y del bien 5 no se produce nada.

▪ *Cerrado*: el límite de una secuencia de planes técnicamente posibles es también técnicamente posible. Gráficamente, el CPP incluye su propia frontera, y por eso los planes eficientes son técnicamente posibles.

▪ *Libre disposición*: dado un plan técnicamente posible $\mathbf{y}_0$, pertenece también al CPP cualquier otro que emplee los mismos *inputs* o más y obtenga el mismo *output* o menos, es decir, $\forall\, \mathbf{y}_0 \in \text{CPP};\ \mathbf{y}_1 \leq \mathbf{y}_0 \Rightarrow \mathbf{y}_1 \in \text{CPP}$.

La libre disposición supone que la capacidad productiva puede derrocharse sin coste. Gráficamente, en el plano (y_1, y_2), el axioma da a la frontera una pendiente no positiva (añadir *input* no reduce el *output*) y, unido a la inacción, deja dentro del CPP el ortante negativo (planes que gastan *inputs* sin producir nada).

▪ *Imposibilidad de producción gratuita* (*no free lunch*): no puede obtenerse una cantidad positiva de *output* si no se emplea algún *input* ($\text{CPP} \cap \mathbb{R}^n_+ \subseteq \{\mathbf{0}\}$). Gráficamente, el CPP no tiene ningún punto en el ortante positivo salvo, a lo sumo, el origen.

▪ *Posibilidad de inacción*: el plan nulo es posible, $\mathbf{0} \in \text{CPP}$, es decir, la empresa puede no producir. El axioma puede, sin embargo, incumplirse a corto plazo, cuando existen factores fijos o costes irrecuperables que la empresa soporta aunque no produzca. Gráficamente, el plan nulo es un punto del CPP y, con el axioma anterior, el origen queda sobre la frontera.

▪ *Irreversibilidad*: si un plan es técnicamente posible, el plan inverso no lo es. Formalmente, $\mathbf{y} \in \text{CPP},\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{y} \notin \text{CPP}$.

La irreversibilidad implica que no es posible deshacer la producción y recuperar los *inputs* a partir del *output*. Gráficamente, en el caso de un *input* y un *output*, el axioma descarta el cuadrante en el que el *output* aparecería como *input* y el *input* como *output*.

Gráficamente, la tecnología se representa en el plano *input-output*, (y_1, y_2) (figura A11.1), con el *input* en negativo:

1. *Conjunto de posibilidades de producción* (CPP): la región sombreada, que reúne los planes con las propiedades anteriores.

2. *Frontera de posibilidades de producción* (FPP): el límite superior del conjunto, una curva que pasa por el origen.

3. *Plan eficiente*: un punto de la frontera, como el 0, que emplea y_1^0 unidades de *input* para obtener y_2^0 de *output*.

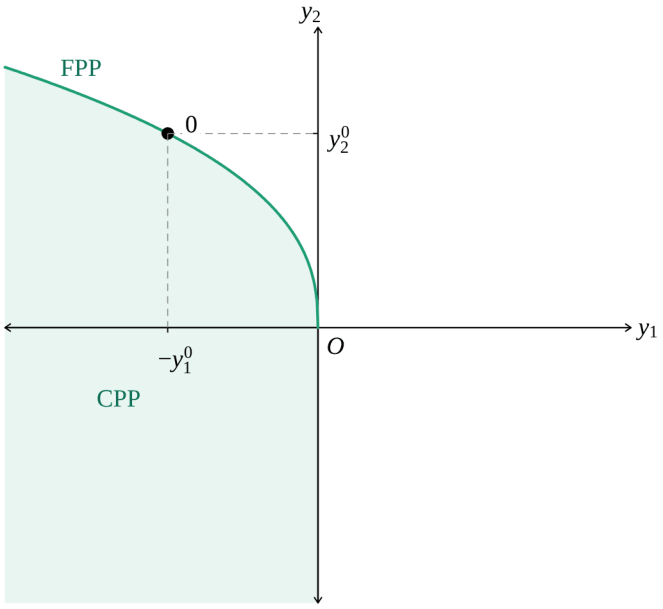


Figura A11.1: Conjunto y frontera de posibilidades de producción. El conjunto reúne los planes de producción técnicamente factibles y la frontera, los eficientes.

1.1.3. La frontera de posibilidades de producción: eficiencia técnica, axiomas de regularidad y rendimientos de escala

Definición: los puntos de la frontera cumplen la *eficiencia técnica*, es decir, no es posible obtener más *output* con los mismos *inputs* o el mismo *output* con menos *inputs*. Por eso, la FPP representa la restricción tecnológica efectiva de la empresa.

Propiedades: la forma de la FPP depende de axiomas sobre la escala de la tecnología, que, en tecnologías de producción simple, se trasladan directamente a la función de producción:

▪ *Aditividad* (libre entrada): sumar dos planes técnicamente posibles da otro plan posible ($\forall\, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in \text{CPP},\ \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1 \in \text{CPP}$), lo que equivale a suponer que dos planes posibles cualesquiera pueden ejecutarse a la vez en unidades de producción independientes (en particular, cualquier plan puede replicarse).

La aditividad implica rendimientos no decrecientes (constantes o crecientes, por ejemplo por indivisibilidades), porque garantiza que duplicar un plan es posible, pero nada impide que existan planes más productivos que esa duplicación.

▪ *Proporcionalidad* (divisibilidad): todo plan posible puede reducirse a escala, en cualquier proporción, sin dejar de ser posible ($\forall\, \mathbf{y}_0 \in \text{CPP},\ \lambda \mathbf{y}_0 \in \text{CPP},\ \lambda \in [0,1]$).

La proporcionalidad implica rendimientos no crecientes a escala (constantes o decrecientes).

▪ *Convexidad*: cualquier combinación de dos planes posibles es también posible, es decir, $\forall\, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in \text{CPP};\ \mathbf{y}_2 = \alpha \mathbf{y}_0 + (1-\alpha)\mathbf{y}_1 \in \text{CPP};\ \forall\, \alpha \in [0,1]$.

Económicamente, la convexidad supone que las combinaciones equilibradas de factores son al menos tan productivas como las extremas, lo que recoge la sustituibilidad decreciente entre factores. Si la convexidad es estricta, las combinaciones intermedias son estrictamente más productivas y

los rendimientos a escala son decrecientes. Para tecnologías de producción simple, la convexidad del CPP equivale a la concavidad de la función de producción (y, por tanto, implica su cuasiconcavidad). La convexidad estricta lleva a funciones estrictamente cóncavas, que excluyen los rendimientos crecientes y, por tanto, los mixtos.

Solo con rendimientos constantes pueden cumplirse los tres axiomas a la vez, y la combinación que se cumple en cada caso decide qué rendimientos hay:

1. *Rendimientos constantes a escala*: si se dan a la vez proporcionalidad y aditividad, el CPP es un cono convexo, aunque no estrictamente convexo. Todo plan admite cualquier cambio de escala, los rendimientos son constantes y la frontera es una recta que sale del origen.

2. *Rendimientos decrecientes a escala*: un CPP estrictamente convexo admite reducciones proporcionales (dada la inacción), pero no la suma de planes. Con el doble de *inputs* se obtiene menos del doble de *output*, los rendimientos son decrecientes y la frontera es estrictamente cóncava.

3. *Rendimientos crecientes a escala*: con aditividad y sin proporcionalidad hacia abajo, el CPP deja de ser convexo. Un plan grande rinde más que varios pequeños combinados, los rendimientos son crecientes y la frontera es convexa. La teoría neoclásica excluye este caso, que la teoría de la organización industrial recupera (tema A15).

1.2. La función de producción

La función de producción resume la tecnología descrita por el conjunto de posibilidades de producción como relación cardinal entre los factores y el *output* máximo, y sus derivadas definen las productividades marginal y media.

1.2.1. La función de producción y sus propiedades

Definición: la *función de producción* es una relación exclusivamente técnica que indica, para cada vector de *inputs* $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m_+$, el *output* máximo que permite la tecnología dada:

$$x = f(\mathbf{z}), \qquad f : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$$

La función describe la frontera del conjunto de posibilidades de producción. Para cada $\mathbf{z}$, $f(\mathbf{z})$ es el *output* del único plan técnicamente eficiente que emplea esos *inputs*.

Desde el punto de vista dual, la tecnología puede describirse también mediante el *conjunto de requerimientos de inputs*, $V(x) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_+ : f(\mathbf{z}) \geq x\}$, el conjunto de combinaciones de *inputs* con las que puede obtenerse al menos el *output* x. La frontera de ese conjunto es la isocuanta.

La función es *monoproducto* cuando existe un único *output*, $x = f(\mathbf{z})$, y *conjunta* o *multiproducto* cuando hay varios, en cuyo caso la tecnología se describe mediante una función de transformación implícita, $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$. La producción multiproducto se estudia en el apartado 3.1, y en lo que sigue el análisis se centra en la función monoproducto.

Propiedades:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en las cantidades de factores (perfecta divisibilidad de factores y producto) y dos veces diferenciable, lo que permite definir productividades marginales y relaciones de sustitución.

2. *Transformaciones*: es una función cardinal, pues sus variables son observables y medibles. Por ello, a diferencia de la utilidad, no admite transformaciones que alteren sus valores.

La comparación de $f(\lambda\mathbf{z})$ con $\lambda f(\mathbf{z})$ ante un cambio equiproporcional de todos los factores define los *rendimientos a escala*: crecientes, constantes o decrecientes (si es homogénea de grado h, según $h > 1$, $h = 1$ o $h < 1$), que se estudian en el apartado 2.2.

3. *Inclinación*: al recoger solo planes técnicamente eficientes, es no decreciente en la cantidad de cada factor (libre disposición), y las productividades marginales son positivas en la región económica.

4. *Forma*: su curvatura depende de la tecnología. La cuasiconcavidad (isocuantas convexas) recoge la sustituibilidad decreciente entre factores, y los rendimientos de cada factor (apartado 2.1) recogen cómo varía el *output* al aumentar uno de ellos manteniendo fijos los demás.

5. *Otras propiedades*:

- *Agotamiento del producto*: si es homogénea de grado h, por el teorema de Euler, $\sum_i z_i\, \partial f/\partial z_i = h \cdot f(\mathbf{z})$. Con rendimientos constantes ($h = 1$), remunerar cada factor según su productividad marginal agota exactamente el producto, mientras que con rendimientos crecientes los pagos lo superan y con decrecientes no lo agotan (tema A03, apartado 2.5.1).

- *Observabilidad*: no es directamente observable, porque las empresas no siempre producen sobre la frontera, pero puede estimarse con datos de cantidades de factores y de producto separando la tecnología de la ineficiencia de cada empresa (apartado 3.2).

En lo que sigue, por simplicidad, se considera un único *output* x, dos factores (trabajo, L, y capital, K) y una función estrictamente cuasicóncava con rendimientos de los factores primero crecientes y luego decrecientes (rendimientos mixtos).

Gráficamente, en $\mathbb{R}^3$, la función de producción es una superficie en forma de colina. Si se fija uno de los factores (p. ej. $\bar{K}$) y se varía el otro (L), se obtiene un corte de la superficie, la función de producción a corto plazo, que muestra la relación entre el factor variable y el *output*. Si en cambio se fija el nivel de *output*, el corte horizontal es la isocuanta.

Estos dos cortes permiten introducir los conceptos esenciales de la teoría de la producción, las productividades media y marginal a partir del primero y la relación marginal de sustitución técnica y la elasticidad de sustitución a partir del segundo.

En el plano (L, x) (figura A11.2), el primer corte se representa con tres elementos:

1. *Función de producción a corto plazo*, $x = f(\bar{K}, L)$: con rendimientos mixtos, es primero convexa y luego cóncava.

2. *Radio-vector*: une el origen con un punto de la curva, y su pendiente, $\tan\beta$, es la productividad media.

3. *Óptimo técnico*: en el punto en que el radio-vector es tangente a la curva, con L_{OT} unidades de trabajo, la productividad media es máxima.

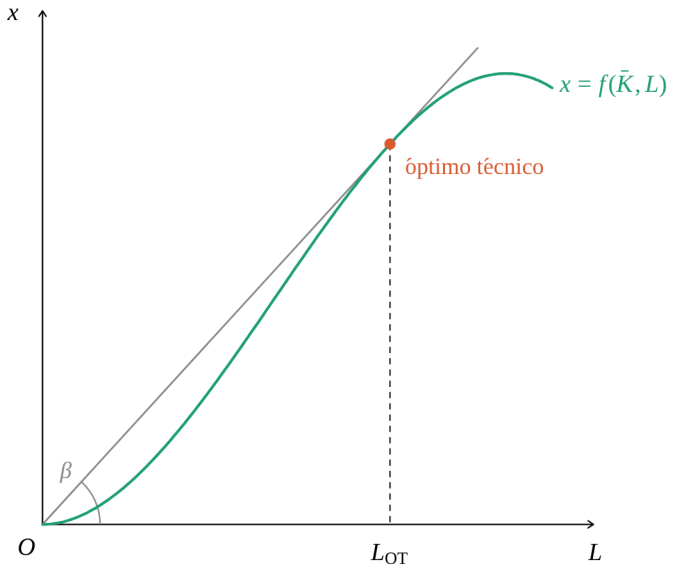


Figura A11.2: Función de producción a corto plazo ($\bar{K}$ fijo) con rendimientos mixtos. En el óptimo técnico el radio-vector es tangente a la curva y la productividad media es máxima.

1.2.2. Derivadas: el concepto de productividad

La **productividad** mide la contribución de los factores al proceso productivo. Se distingue entre productividad marginal y media, conceptos básicos de las leyes de producción a corto plazo.

Productividad marginal: el incremento en el producto total ante un incremento infinitesimal de un factor variable, *ceteris paribus*, si el factor es perfectamente divisible (si no lo es, $\text{Pmg}_L = \Delta x/\Delta L$):

$$\text{Pmg}_L \equiv f'_L = \frac{\partial f(K,L)}{\partial L}$$

Gráficamente, en el plano (L, x) (figura A11.2), es la pendiente de la función de producción en cada punto, creciente en su tramo convexo (rendimientos marginales crecientes), decreciente en el cóncavo y nula en el máximo técnico (apartado 2.1.2).

Productividad media: el producto total obtenido por unidad de factor variable aplicado:

$$\text{Pme}_L \equiv \frac{f(K,L)}{L} = \frac{x}{L}$$

Gráficamente, es la pendiente del radio-vector trazado desde el origen ($\tan\beta$). La productividad media, $\tan\beta$, crece al aumentar L hasta que el radio-vector es tangente a la función de producción (figura A11.2).

La relación entre productividad marginal y media tiene una lógica económica directa:

- Cuando la Pmg_L es superior a la Pme_L, cada trabajador adicional produce más que la media, por lo que la media sube.

- Cuando la Pmg_L es inferior a la Pme_L, cada trabajador adicional produce menos que la media, por lo que la media cae.

Por ello, ambas productividades coinciden necesariamente cuando la productividad media alcanza su máximo en lo que se denomina *óptimo técnico*, donde el radio-vector es tangente a la función de producción (figura A11.2).

1.3. Las curvas isocuantas

Las curvas de nivel de la superficie de la función de producción, trasladadas al plano de los factores productivos, componen el mapa de las que en economía se llaman **curvas isocuantas**.

Definición: una isocuanta recoge los distintos modos de combinar los factores que dan un mismo volumen de producto[4].

Propiedades:

- *Ordenación*: no se cortan, y las más alejadas del origen reflejan mayor nivel de producto.
- *Pendiente*: negativa en el plano (L, K) (si se cumple la eficiencia técnica).
- *Forma*: lineales (sustituibilidad perfecta), angulares/Leontief (complementariedad perfecta), quebradas (sustituibilidad limitada, programación lineal) y continuas y convexas (sustituibilidad continua e imperfecta).

1.3.1. Pendiente de la isocuanta: la relación marginal de sustitución técnica

Analíticamente, para dos factores cualesquiera, i y j, con los demás constantes, la pendiente de la isocuanta es:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j = 0 \;\Rightarrow\; \text{RMST}_{ji} = -\left.\frac{dz_j}{dz_i}\right|_{x_0} = \frac{\partial f / \partial z_i}{\partial f / \partial z_j}$$

Con los dos factores de este tema, trabajo y capital, es $\text{RMST}_{KL} = -dK/dL\,|_{x_0} = (\partial f/\partial L)/(\partial f/\partial K)$. La RMST muestra la tasa a la que se puede sustituir un factor por otro manteniendo la producción constante. Económicamente, mide cuántas unidades de capital puede liberar la empresa al contratar una unidad adicional de trabajo, sin que cambie su nivel de *output*, y es una medida de la sustituibilidad en términos de contribución marginal relativa.

Si la Pmg_L es elevada en relación con la Pmg_K, una unidad de trabajo sustituye muchas unidades de capital, y la RMST es alta. A medida que se sustituye capital por trabajo, la Pmg_L tiende a caer y la Pmg_K a subir, y la cuasiconcavidad garantiza que su cociente, la RMST, sea decreciente.

La RMST equivale, en la producción, a la relación marginal de sustitución (RMS) del consumidor, pero, como la función de producción es cardinal, la magnitud de las contribuciones marginales sí tiene significado. La limitación de la RMST, con todo, es que depende de las unidades en que se mida cada factor, que pueden ser distintas.

[4] Koutsoyiannis las restringe a combinaciones técnicamente eficientes (sin tramos de pendiente positiva), mientras que aquí se sigue la definición más general de Nicholson.

Gráficamente, en el plano (L, K) (figura A11.3), cada isocuanta, x_0 o x_1, reúne las combinaciones de trabajo y capital que dan ese nivel de producción. Tiene pendiente negativa porque, con productividades marginales positivas, emplear más trabajo permite producir lo mismo con menos capital, y es convexa respecto al origen porque la RMST es decreciente. Su pendiente en cada punto, cambiada de signo, es la RMST, y las más alejadas del origen recogen una producción mayor ($x_1 > x_0$).

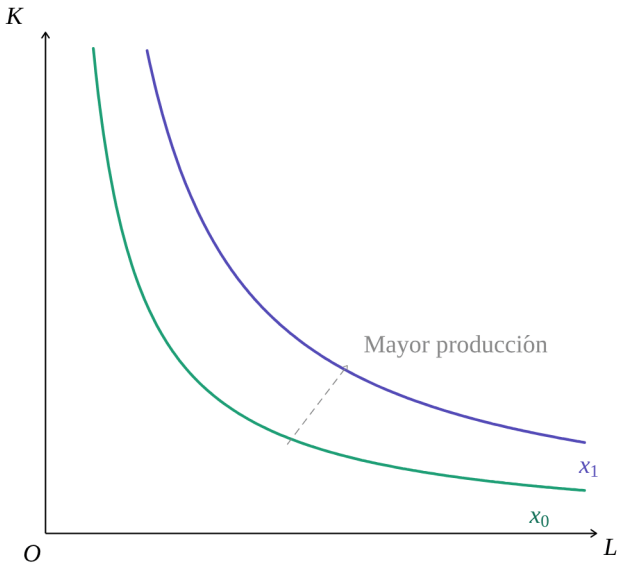


Figura A11.3: Isocuanta. La curva reúne las combinaciones de factores que generan el mismo nivel de producción. Su pendiente, cambiada de signo, es la relación marginal de sustitución técnica.

1.3.2. Forma de la isocuanta: la elasticidad de sustitución técnica (Hicks, 1932)

Medir la sustituibilidad con la RMST choca con el problema de las unidades. La EST lo evita porque relaciona dos variaciones porcentuales, la de la mezcla factorial y la de la RMST, cuyo cociente no depende de las unidades. Para dos factores cualesquiera, i y j, y, en particular, para el capital y el trabajo:

$$\sigma_{ji} = \left.\frac{\partial \ln(z_j/z_i)}{\partial \ln \mathrm{RMST}_{ji}}\right|_{x_0} \geq 0$$

$$\sigma_{KL} = \left.\frac{\Delta\%(K/L)}{\Delta\%(\mathrm{RMST}_{KL})}\right|_{x_0} = \frac{d(K/L)}{d\,\mathrm{RMST}_{KL}} \cdot \frac{\mathrm{RMST}_{KL}}{K/L} = \frac{\partial \ln(K/L)}{\partial \ln \mathrm{RMST}_{KL}}$$

Cuando la EST es alta, los factores se sustituyen con facilidad, y la RMST (el cociente de productividades marginales) apenas se mueve aunque cambie la mezcla factorial. Con dos factores y minimización de costes ($\mathrm{RMST} = w/r$), la EST coincide con la respuesta de la mezcla factorial al precio relativo de los factores. Con más de dos factores, se generaliza mediante la elasticidad parcial de Allen (1938), que se estudia en el tema A12.

Son casos especiales la función lineal ($\sigma = \infty$, sustituibilidad perfecta), la Leontief ($\sigma = 0$, complementariedad perfecta) y la Cobb-Douglas ($\sigma = 1$, sustituibilidad proporcional). En esta

última, la ratio K/L varía en la misma proporción que la RMST, de modo que, con minimización de costes, las participaciones relativas de los factores en el coste se mantienen constantes. Para funciones de elasticidad de sustitución constante (CES), $x = (\alpha K^{\rho} + \beta L^{\rho})^{1/\rho}$ con $\alpha, \beta > 0$, la EST es constante e igual a $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$.

Gráficamente, en el plano (L, K) (figura A11.4), una EST alta corresponde a una isocuanta poco curvada, en la que un mismo cambio en la proporción de factores apenas altera la RMST y la sustitución resulta sencilla. Se ilustra con tres elementos:

1. *Radio-vectores* $(K/L)_1$, $(K/L)_2$ y $(K/L)_3$: representan tres procesos productivos independientes y mutuamente excluyentes, con diferentes proporciones relativas de factores. Los movimientos sobre un radio-vector son cambios en la escala de producción, y el paso de uno a otro, $\Delta(K/L)$, un cambio en las proporciones relativas de factores.

2. *Isocuantas de dos empresas*, x_0^A y x_0^B: para un mismo nivel de producción, sus puntos de corte con los radio-vectores reflejan las combinaciones factoriales que cada empresa requiere para alcanzar ese nivel.

3. *Pendientes en los puntos de corte*: reflejan la RMST de cada empresa, de RMST_1^A a RMST_3^A y de RMST_1^B a RMST_3^B. Cuanto más convexa la isocuanta respecto al origen, menor es la EST, ya que el cambio en la pendiente de la isocuanta (la RMST) es grande en comparación con el cambio en la pendiente de los radio-vectores (la proporción K/L). Por eso, para el mismo $\Delta(K/L)$, la RMST varía más a lo largo de x_0^A que de x_0^B.

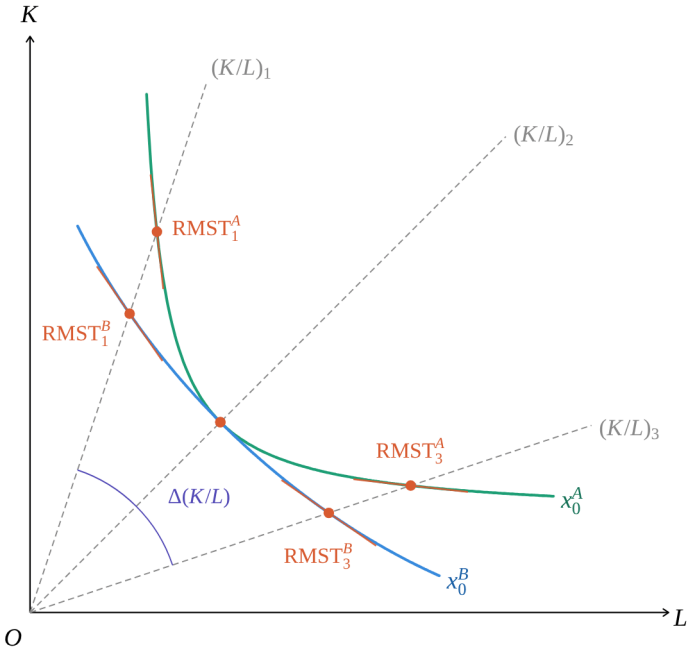


Figura A11.4: Elasticidad de sustitución técnica. Para el mismo cambio en la proporción de factores, del radio-vector $(K/L)_1$ al $(K/L)_3$, la RMST varía más a lo largo de la isocuanta más convexa, x_0^A (σ^A baja), que a lo largo de la más recta, x_0^B (σ^B alta).

1.3.3. Eficiencia técnica y región económica

Las herramientas anteriores permiten delimitar la parte del mapa de isocuantas que interesa al productor. Una empresa racional nunca emplea un factor en una cantidad tal que su productividad marginal sea negativa, porque reduciendo ese factor obtendría más *output* con menos *input* (el plan sería técnicamente ineficiente). Por eso solo es relevante el tramo de las isocuantas con pendiente negativa (RMST ≥ 0), que forma la *región económica*, la zona del mapa de isocuantas en la que tiene sentido producir.

Dentro de la **región económica** (figura A11.5), ambos factores tienen Pmg positiva, las isocuantas son decrecientes y hay eficiencia técnica. Fuera de ella, uno de los factores tiene Pmg negativa y las isocuantas son crecientes, pero esa zona solo existe si se prescinde del axioma de libre disposición, porque este excluye cualquier productividad marginal negativa. Separan las dos zonas las líneas de contorno (*ridge lines*), sobre las que la Pmg de uno de los dos factores vale cero. Las líneas de contorno son isoclinas rectas si la función es homotética e irregulares en otro caso.

Esta delimitación enlaza con las leyes de producción. En particular, con rendimientos constantes a escala, la región económica se corresponde con la etapa II del corto plazo, la región exterior superior (exceso de capital) con la etapa I y la región exterior inferior (exceso de trabajo) con la etapa III (apartado 2.1.2). Sin embargo, en general solo es exacta la correspondencia entre la región exterior inferior ($\text{Pmg}_L < 0$) y la etapa III.

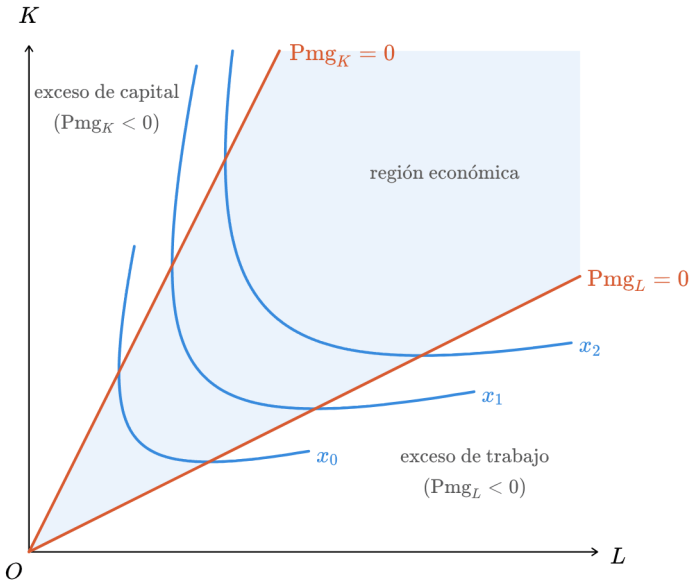


Figura A11.5: Región económica. Las líneas de contorno, rectas desde el origen porque la función es homotética, pasan por los puntos en que las isocuantas $x_0 < x_1 < x_2$ son verticales ($\text{Pmg}_K = 0$) u horizontales ($\text{Pmg}_L = 0$). Entre ellas queda la región económica (sombreada), con isocuantas decrecientes, y fuera, las zonas de exceso de capital y de exceso de trabajo, con isocuantas crecientes.

1.4. De la tecnología a la decisión

En este tema la empresa se estudia solo como unidad técnica, y los apartados anteriores describen los elementos de su problema: el conjunto de elección (los planes técnicamente posibles) y su ordenación (la función de producción y sus isocuantas). Sin embargo, para llegar a una decisión el análisis debe incorporar después dos tipos de consideraciones.

Por un lado, las consideraciones económicas se introducen con el coste de los factores (tema A12, apartado 1.4). Los precios de los factores y el presupuesto de la empresa definen entonces su restricción, que es la recta isocoste. Al combinar esa restricción con la tecnología se obtiene el equilibrio de la empresa, ya sea minimizando el coste de un nivel de producción dado, ya sea maximizando el *output* para un coste dado.

Por otro lado, las consideraciones de mercado se introducen con el precio del producto (tema A16, apartado 1.3). En este caso, decidir cuánto producir y a qué precio exige conocer, además, el mercado en el que la empresa vende su producto.

1.5. Conclusiones

Al prescindir de precios y costes, la teoría caracteriza la empresa por sus restricciones técnicas. Los axiomas del conjunto de posibilidades de producción delimitan los planes técnicamente posibles, cuya frontera reúne los eficientes. Los axiomas de escala determinan los rendimientos, constantes con aditividad y proporcionalidad, decrecientes si el conjunto es estrictamente convexo y crecientes con aditividad sin proporcionalidad, un caso que la teoría neoclásica excluye. La función de producción describe esa frontera como una relación cardinal y, a factor fijo, sus productividades marginal y media coinciden en el óptimo técnico. Sobre la isocuanta, la RMST mide la sustitución en el margen, y la elasticidad de sustitución, su facilidad sin depender de las unidades. La región económica descarta, por último, las combinaciones con alguna productividad marginal negativa.

Este instrumental no basta para decidir cuánto producir, porque faltan los precios de los factores y del producto. Permite, en cambio, ordenar la respuesta del *output* cuando varían un factor, todos o la tecnología, objeto de las leyes de producción de la sección 2.

2. Leyes de producción

La empresa puede aumentar su producción alterando la combinación factorial. Sin embargo, si dispone de poco tiempo o existen costes de ajuste, puede ser difícil modificar la mezcla. Por ello se distinguen cuatro marcos temporales:

1. *Muy corto plazo*: la producción ya está realizada y la cantidad ofrecida es fija (el periodo de mercado de la teoría de mercados, tema A16).

2. *Corto plazo*: al menos un factor es fijo y solo puede variarse el otro, lo que da lugar a la ley de las proporciones variables.

3. *Largo plazo*: todos los factores son variables y la cuestión relevante son los rendimientos a escala.

4. *Muy largo plazo*: también la tecnología cambia, y el análisis pasa a ser el del progreso técnico.

2.1. Corto plazo: ley de proporciones variables

En el corto plazo, solo un factor es variable y la tecnología es fija. De ahí que la única forma de aumentar la producción sea aplicar más factor variable. Dado que la proporción entre factores varía, la ley de proporciones variables establece que, llegado cierto punto, la contribución marginal al *output* del factor variable será decreciente y, llevada al extremo, negativa.

2.1.1. Elasticidad-producto

A corto plazo, con al menos un factor fijo, la respuesta del *output* solo puede medirse respecto al factor variable. La **elasticidad-producto** es esa medida y desempeña en el corto plazo el papel que la elasticidad de escala desempeña en el largo. Su valor indica en qué etapa de la producción se encuentra la empresa y, con el precio del factor dado, determina la forma de las curvas de costes a corto plazo (tema A12, apartado 2.1).

La relación entre productividad marginal y media se expresa mediante la elasticidad-producto:

$$\varepsilon_{xL} = \left.\frac{\Delta\%x}{\Delta\%L}\right|_{\bar{K}} = \frac{\partial x/x}{\partial L/L} = \frac{\partial x}{\partial L}\cdot\frac{L}{x} = \frac{\mathrm{Pmg}_L}{\mathrm{Pme}_L}$$

En la función Cobb-Douglas, la elasticidad-producto de cada factor es constante e igual a su exponente. Por la relación entre cualquier magnitud marginal y su media (apartado 1.2.2), la elasticidad-producto es mayor que uno mientras la productividad media crece, menor que uno cuando decrece e igual a uno en el óptimo técnico.

2.1.2. Etapas de la producción

Etapa I: llega hasta el margen extensivo ($\varepsilon_{xL} > 1$, $\forall\, L \in (0, L_{\text{OT}})$, donde L_{OT} es el óptimo técnico, máximo del producto medio). En ella sobra factor fijo respecto al variable, así que el capital no se aprovecha bien y, con rendimientos constantes a escala, su productividad marginal resulta incluso negativa en toda la etapa ($\text{Pmg}_K < 0$, fuera de la región económica). Por eso a la empresa le conviene seguir incorporando trabajadores. A lo largo de la etapa, la función de producción es primero creciente y convexa ($f'_L > 0$, $f''_{LL} > 0$), con rendimientos marginales crecientes que, como los rendimientos crecientes a escala, pueden deberse a indivisibilidades, y después creciente y cóncava ($f'_L > 0$, $f''_{LL} < 0$), con rendimientos marginales decrecientes a partir del punto de inflexión.

Ese paso a rendimientos marginales decrecientes es el objeto de la *ley de rendimientos marginales decrecientes* (ley de Turgot, 1767). Según la ley, si se aumenta la utilización de un factor variable manteniendo el resto constante, a partir de cierto punto el producto total crece ($f' > 0$) cada vez menos ($f'' < 0$). Este principio es esencial porque, observado en múltiples industrias, explica la forma de las curvas de costes ($\text{Cmg} = w/\text{Pmg}_L$, con w el salario), las curvas de demanda de factores y las curvas de oferta a corto plazo.

Etapa II: va del margen extensivo al margen intensivo, situado en el máximo técnico ($\varepsilon_{xL} \in [0, 1]$, $\forall\, L \in [L_{\text{OT}}, L_{\text{MT}}]$), y en ella se altera la intensidad de uso. Con rendimientos constantes a escala coincide con la región económica, de modo que ambas productividades marginales son positivas. La empresa debería producir en esta etapa, aunque el punto exacto dentro de ella depende de la estructura de costes. Como la teoría de la producción no puede determinarlo por sí sola, se hace necesario el estudio de la teoría de costes.

Etapa III: es la de sobreexplotación ($\varepsilon_{xL} < 0$ para todo $L > L_{\text{MT}}$, donde L_{MT} es el máximo técnico, con $\text{Pmg}_L = 0$). El factor variable es ya tan abundante frente al fijo que su productividad marginal pasa a ser negativa. Cada trabajador adicional reduce el producto total, así que ninguna empresa racional produce en esta etapa. La evidencia sobre las jornadas laborales ilustra la aproximación al máximo técnico. El producto crece en proporción a las horas hasta unas 49 horas semanales, a ritmo decreciente a partir de ahí y, por encima de unas 55 horas, prácticamente deja de aumentar (Pencavel, 2014).

A corto plazo, por tanto, la elasticidad-producto depende de la fase de aplicación del factor variable, cuya contribución marginal acaba siendo decreciente y, llevada al extremo, negativa. Este fenómeno parece independiente del tipo de rendimientos a escala. Sin embargo, si la función es homogénea de grado $h \leq 1$ y cuasicóncava, es cóncava y la productividad marginal es no creciente, mientras que con rendimientos crecientes puede ser creciente en algún tramo.

Gráficamente, con $\bar{K}$ fijo (figura A11.6), la función de producción a corto plazo, $x = f(\bar{K}, L)$ (panel superior), y las productividades media y marginal del trabajo (panel inferior) delimitan las tres etapas. La Pmg_L alcanza su máximo en el punto de inflexión y corta a la Pme_L en el máximo de esta, en L_{OT}, donde el radio-vector es tangente a la función de producción. La Pmg_L se anula en L_{MT}, donde el producto total es máximo.

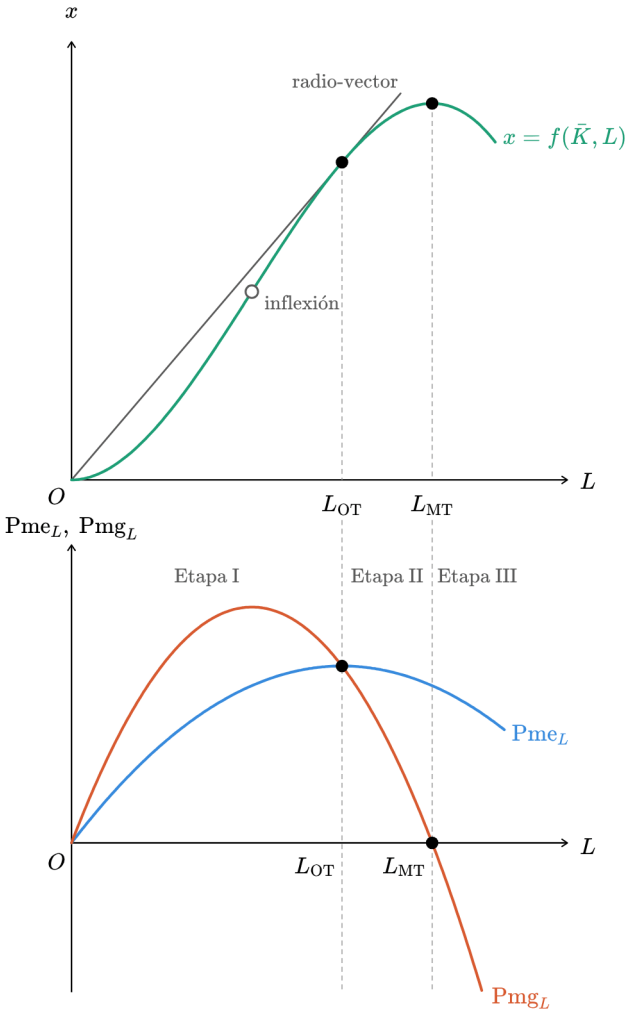


Figura A11.6: Etapas de la producción a corto plazo ($\bar{K}$ fijo). El óptimo técnico, L_{OT}, donde el radio-vector es tangente a $x = f(\bar{K}, L)$ y la Pmg_L corta a la Pme_L en su máximo, y el máximo técnico, L_{MT}, donde la Pmg_L se anula, separan las etapas I, II y III.

2.2. Largo plazo: leyes de rendimientos a escala

En el largo plazo, todos los factores son variables. Los rendimientos a escala describen la variación en el *output* cuando la escala de producción varía.

2.2.1. Elasticidad de escala

La elasticidad de escala mide la respuesta del *output* a un cambio de escala, con la proporción entre factores constante, y es la contrapartida a largo plazo de la elasticidad-producto.

Definición: variación porcentual en el *output* ante una variación porcentual de todos los factores:

$$\varepsilon_{x\lambda} = \frac{\Delta\%x}{\Delta\%\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{xz_i} \quad \xrightarrow{i=K,L} \quad \varepsilon_{x\lambda} = \varepsilon_{xK} + \varepsilon_{xL}$$

La elasticidad de escala es la suma de las elasticidades-producto de los factores. Los rendimientos se clasifican en:

1. *Rendimientos crecientes* ($\varepsilon_{x\lambda} > 1$): pueden deberse a las indivisibilidades en el proceso productivo (Wicksell, Edgeworth, Kaldor) y a la especialización y división del trabajo (Smith, 1776). Con la especialización, cada factor se dedica a una etapa concreta del proceso productivo, lo que aumenta la eficiencia global. Asimismo, cuestiones físicas pueden generar rendimientos crecientes. Así, duplicar el diámetro de un oleoducto cuadruplica el volumen, mientras que el material necesario solo se duplica.

2. *Rendimientos constantes* ($\varepsilon_{x\lambda} = 1$): se explican por la posibilidad de replicar los procesos productivos y de reducirlos a escala (aditividad y proporcionalidad, apartado 1.1.3).

3. *Rendimientos decrecientes* ($\varepsilon_{x\lambda} < 1$): se deben a restricciones de capacidad rígida y a problemas internos de organización (burocracia, fallos de coordinación, costes de transacción). Williamson (1967), por ejemplo, explica el límite al tamaño de la empresa por la pérdida de control que sufren la información y las órdenes al pasar por cada nivel de la jerarquía (tema A15, apartado 1.2.3).

Caso de funciones homogéneas: una función es homogénea de grado h si:

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^h f(K, L), \quad \lambda \geq 0$$

En una función homogénea de grado h la elasticidad de escala es constante e igual al grado, $\varepsilon_{x\lambda} = h$. En el caso Cobb-Douglas, el grado es la suma de los exponentes, $h = \alpha + \beta$. La homogeneidad implica además la homoteticidad, es decir, que la RMST depende solo de las proporciones en que se combinan los factores y no de la escala. Las isocuantas son, por tanto, expansiones radiales unas de otras y la senda de expansión es una recta por el origen.

Según el valor del grado, la función presenta rendimientos constantes si $h = 1$ (función linealmente homogénea), crecientes si $h > 1$ y decrecientes si $h < 1$. Los rendimientos constantes (globales) equivalen a homogeneidad de grado uno, y con ellos las productividades marginales y medias dependen solo de la proporción entre factores y no de la escala. Con rendimientos crecientes o decrecientes, en cambio, la función no tiene por qué ser homogénea, pues la elasticidad de escala puede variar con el nivel de producción.

2.2.2. Rendimientos locales y globales

Rendimientos locales: son los que presenta la tecnología *en un rango restringido de producción*, el entorno de una combinación concreta de factores, $\mathbf{z}$. Se miden con la elasticidad de escala, que se calcula en ese punto y solo informa de lo que ocurre cuando, a partir de él, todos los factores aumentan en la misma proporción en una cuantía infinitesimal:

$$\varepsilon_{x\lambda}(\mathbf{z}) = \frac{df(\lambda\mathbf{z})}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{f(\lambda\mathbf{z})}\bigg|_{\lambda=1}$$

donde λ es el factor de escala. Los rendimientos son localmente crecientes, constantes o decrecientes en $\mathbf{z}$ según $\varepsilon_{x\lambda}(\mathbf{z})$ sea mayor, igual o menor que uno. Intuitivamente, indican si, con

el tamaño actual de la empresa, un aumento del 1 % de todos los factores eleva el *output*, aproximadamente, en más, en igual o en menos del 1 %.

Además, los rendimientos locales tienen una implicación directa en términos de eficiencia económica. Si la empresa, además de producir sobre la frontera, elige la combinación de factores que minimiza el coste de cada nivel de producción, la elasticidad-producto del coste en esa combinación es la inversa de la elasticidad de escala, $\varepsilon_{Cx} = 1/\varepsilon_{x\lambda}$. Con precios de los factores dados, los rendimientos localmente crecientes equivalen, por tanto, a economías de escala ($\varepsilon_{Cx} < 1$), los constantes a su ausencia ($\varepsilon_{Cx} = 1$) y los decrecientes a deseconomías de escala ($\varepsilon_{Cx} > 1$). La relación y sus consecuencias para la forma de las curvas de coste a largo plazo se desarrollan en el tema A12, apartados 1.4.4 y 2.4.

Rendimientos globales: son los que presenta la tecnología *en todo el rango de producción*, es decir, para cualquier combinación de factores y cualquier cambio de escala. Son, por tanto, una propiedad de toda la tecnología, como los axiomas, y se comprueban comparando la producción de cualquier plan ampliado, $f(\lambda\mathbf{z})$, con la del plan inicial multiplicada por la escala, $\lambda f(\mathbf{z})$. Son crecientes si $f(\lambda\mathbf{z}) > \lambda f(\mathbf{z})$ para todo $\mathbf{z}$ con $f(\mathbf{z}) > 0$ y todo $\lambda > 1$, y constantes o decrecientes si se cumple la igualdad o la desigualdad contraria. Intuitivamente, multiplicar todos los factores por cualquier $\lambda > 1$ multiplica siempre el *output* por más de λ, por λ o por menos de λ.

Las dos nociones se enlazan a lo largo de cada radio-vector, donde la elasticidad de escala es la tasa a la que crece el logaritmo del *output* con el de la escala, $d\ln f(\lambda\mathbf{z})/d\ln\lambda = \varepsilon_{x\lambda}(\lambda\mathbf{z})$. Los rendimientos globales resultan, por tanto, de acumular los locales. Si la elasticidad de escala es mayor que uno en todos los puntos, al integrar se obtiene $f(\lambda\mathbf{z}) > \lambda f(\mathbf{z})$ para todo $\lambda > 1$, y lo mismo ocurre en los otros dos casos. En particular, en una función homogénea de grado h la elasticidad vale h en todos los puntos, de modo que los rendimientos locales y los globales coinciden.

En general, sin embargo, la elasticidad de escala cambia con el nivel de producción y la función puede no tener rendimientos globales de ningún tipo, como ocurre con los rendimientos mixtos. A lo largo de un radio-vector, en el plano (λ, x), la producción tiene forma de S, con rendimientos localmente crecientes a pequeña escala y decrecientes a gran escala. Esa tecnología subyace a la curva de coste medio a largo plazo en forma de U en el plano (x, C) (tema A12, apartado 2.2).

Ejemplo: rendimientos que cambian a lo largo de un radio-vector

Sea $x = f(K, L) = KL/(1+KL)$. Las elasticidades-producto de los factores son $\varepsilon_{xK} = f'_K \cdot K/x = 1/(1+KL)$ y, por simetría, $\varepsilon_{xL} = 1/(1+KL)$, de modo que la elasticidad de escala es

$$\varepsilon_{x\lambda} = \varepsilon_{xK} + \varepsilon_{xL} = \frac{2}{1+KL} = 2(1-x)$$

ya que $1+KL = 1/(1-x)$. Los rendimientos son localmente crecientes mientras $x < 1/2$, constantes sobre la isocuanta $x = 1/2$ y decrecientes para $x > 1/2$. A lo largo del radio-vector que pasa por (K_0, L_0), la producción $x(\lambda) = \lambda^2 K_0 L_0/(1+\lambda^2 K_0 L_0)$ es, en el plano (λ, x), convexa a pequeña escala y cóncava a gran escala, con una asíntota en $x = 1$.

La inflexión está en $x = 1/4$ ($\lambda^2 K_0 L_0 = 1/3$), pero los rendimientos cambian en $x = 1/2$ ($\lambda^2 K_0 L_0 = 1$), donde el radio-vector desde el origen es tangente a la curva y x/λ es máxima, como en el óptimo técnico del apartado 1.2.2. Entre ambos puntos la curva ya es cóncava, pero los rendimientos siguen siendo crecientes. La función no presenta rendimientos globales de ningún tipo, ya que duplicar los factores más que duplica el *output* cerca del origen y no llega a duplicarlo lejos de él.

2.2.3. Análisis gráfico de los rendimientos a escala

Gráficamente, en el plano (L, K) (figura A11.7), con una función homogénea (isoclinas rectas), los rendimientos a escala se leen en la separación, medida a lo largo de una isoclina, entre las isocuantas de un nivel de producción de referencia y de sus múltiplos (x_0, $2x_0$, $3x_0$…). Dependen así de dónde se sitúan las isocuantas, mientras que su forma la decide la elasticidad de sustitución entre factores. La figura representa los tres casos con una función homogénea de grado h, cuyas isocuantas x_0, $2x_0$ y $3x_0$ cortan el radio-vector en los puntos A, B y C:

- *Rendimientos crecientes* ($h > 1$, panel a): si se duplican los factores se obtiene más del doble del nivel de producción, de modo que la isocuanta $2x_0$ se alcanza antes de duplicar la distancia al origen. La distancia entre isocuantas sucesivas es cada vez menor ($\overline{OA} > \overline{AB} > \overline{BC}$).

- *Rendimientos constantes* ($h = 1$, panel b): si se duplican los factores se obtiene el doble del nivel de producción, y las isocuantas están igualmente espaciadas a lo largo del radio-vector ($\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC}$).

- *Rendimientos decrecientes* ($h < 1$, panel c): si se duplican los factores se obtiene menos del doble, de modo que para alcanzar la isocuanta $2x_0$ hace falta más del doble de la distancia al origen. La distancia entre isocuantas sucesivas es cada vez mayor ($\overline{OA} < \overline{AB} < \overline{BC}$).

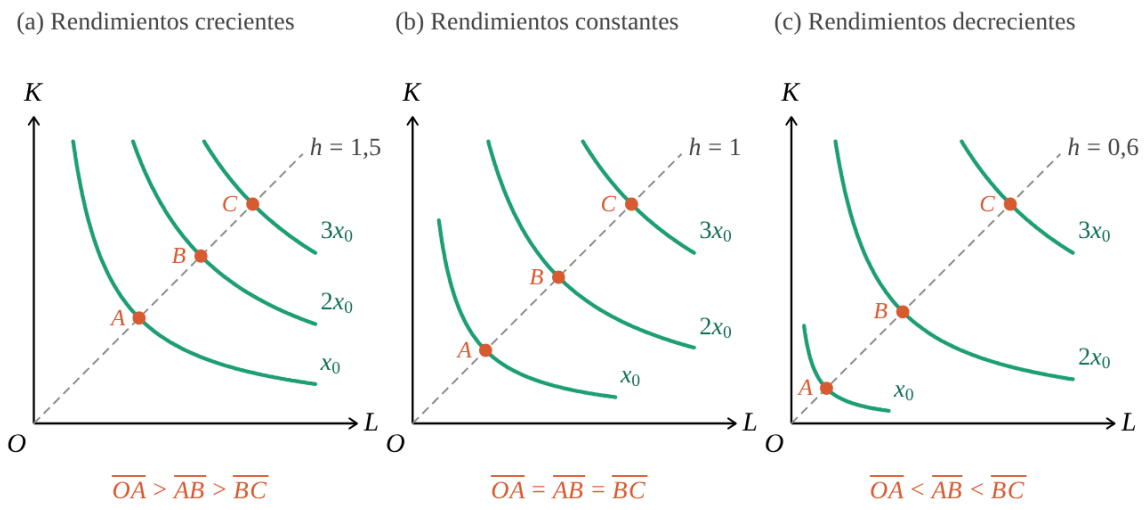


Figura A11.7: Rendimientos a escala con una función homogénea de grado h. Sobre el radio-vector, la distancia entre las isocuantas x_0, $2x_0$ y $3x_0$ se reduce con rendimientos crecientes ($h = 1{,}5$, panel a), se mantiene con rendimientos constantes ($h = 1$, panel b) y aumenta con rendimientos decrecientes ($h = 0{,}6$, panel c).

2.3. Muy largo plazo: progreso tecnológico

Cuando el horizonte es muy largo, la tecnología puede cambiar. La función de producción admite entonces un factor que refleja la mejora de los métodos productivos y desplaza la función con el tiempo.

2.3.1. Definición y efectos

La idea de que la tecnología se mueve en el tiempo da lugar al concepto de **progreso técnico** o progreso tecnológico, que ha sido un objeto de estudio importante en la literatura moderna y ha tenido amplias aplicaciones en la macroeconomía. El progreso técnico se manifiesta de varias formas. La innovación de producto crea variedades de bienes ya conocidos o bienes que antes no existían, la innovación de proceso permite producir más con los mismos *inputs*, o lo mismo con menos, y los productos existentes pueden ganar calidad.

Gráficamente, el progreso técnico se puede estudiar en tres planos (figura A11.8). En la figura, el progreso adopta la forma $x = A \cdot f(K, L)$, con un parámetro de eficiencia A que pasa de A_0 a $A_1 > A_0$ (progreso neutral en el sentido de Hicks), y las curvas finales son las discontinuas:

1. *Productividad marginal* (panel a), en el plano (L, Pmg_L): la curva se desplaza hacia afuera, de $\text{Pmg}_L(L; A_0)$ a $\text{Pmg}_L(L; A_1)$.

2. *Función de producción* (panel b), en el plano (L, x): pivota hacia arriba, de $A_0 f(\bar{K}, L)$ a $A_1 f(\bar{K}, L)$.

3. *Isocuanta* (panel c), en el plano (L, K): la isocuanta x_0 se desplaza hacia el origen, de $x_0\,(A_0)$ a $x_0\,(A_1)$.

Los tres paneles expresan la misma idea. Gracias al progreso técnico, un volumen de producto dado puede obtenerse con menos cantidad de factor y, si la cantidad de factor se mantiene, la producción que se obtiene con ella es mayor. El progreso técnico es *neutral* o *sesgado* según el criterio con el que se mida su efecto sobre los factores.

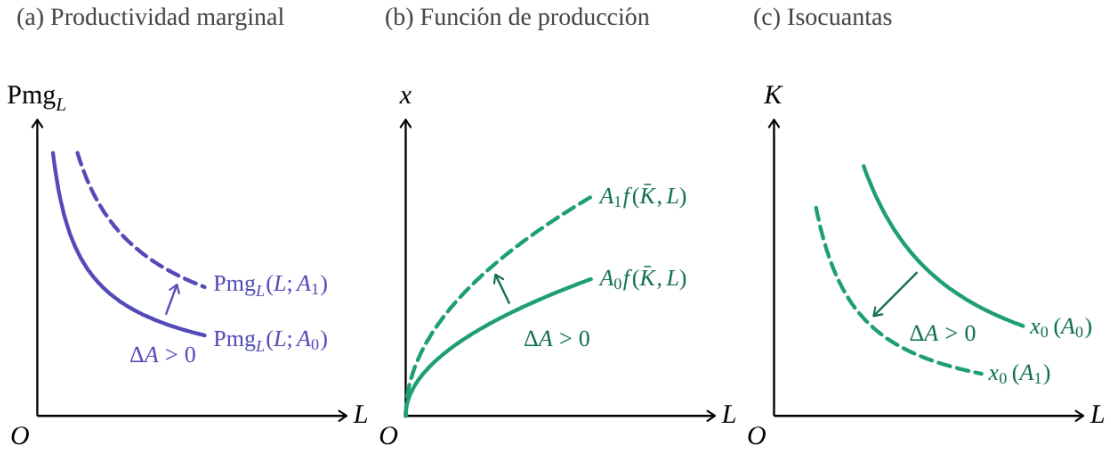


Figura A11.8: Progreso técnico en $x = A \cdot f(K, L)$, de A_0 a $A_1 > A_0$ (curvas finales discontinuas). La curva de productividad marginal del trabajo se desplaza hacia afuera (panel a), la función de producción a corto plazo pivota hacia arriba (panel b) y la isocuanta x_0 se desplaza hacia el origen (panel c).

2.3.2. Clasificación del progreso tecnológico

La historia del pensamiento económico ha prestado mucha atención a la clasificación del progreso técnico, porque sus efectos no se quedan en la producción y alcanzan al reparto de la renta.

Cuando el progreso técnico eleva la productividad marginal de un factor más que la del otro, con una ratio capital-trabajo dada ese factor gana remuneración relativa y peso en la renta. John Hicks (1932) y Roy Harrod (1937; 1948) propusieron los dos criterios que más se usan.

Hicks (1932): se apoya en la RMST ($= (\partial f/\partial L)/(\partial f/\partial K)$). En el plano (L, K) (figura A11.9), la RMST es la pendiente de la isocuanta x_0 sobre el radio-vector $(K/L)_0$, antes (RMST_0, en t_0) y después (RMST_1, en t_1) del progreso técnico:

1. *Neutral*: una innovación tecnológica es neutral respecto de ambos factores, capital y trabajo, cuando, dada una ratio capital-trabajo, el cociente entre sus productividades marginales no varía. La Pmg de ambos factores aumenta, así, en la misma proporción, la RMST sobre el radio-vector permanece constante (panel a) y la isocuanta se desplaza hacia el origen de forma radial, conservando su pendiente sobre cada radio-vector. La función es $x_t = A(t) \cdot f(K_t, L_t)$, donde $A(t)$ refleja todos aquellos factores que influyen en la determinación de x pero que no son ni K ni L (p. ej. saber empresarial, cualificación).

2. *Sesgado*: en el caso de que la productividad marginal de uno de los factores aumente en mayor proporción que la del otro, la RMST a lo largo del radio-vector cambia y la isocuanta se desplaza hacia el origen de forma sesgada:

- *Intensificador del capital* (o ahorrador de trabajo): el progreso técnico eleva la productividad marginal del capital más que la del trabajo. Por ello, para una misma proporción de factores, la RMST disminuye (la isocuanta se hace más plana sobre el radio-vector, panel b), y la empresa sustituye trabajo por capital.

- *Intensificador del trabajo* (o ahorrador de capital): el progreso eleva más la productividad marginal del trabajo, la RMST aumenta (la isocuanta se hace más inclinada sobre el radio-vector, panel c), y la empresa sustituye capital por trabajo.

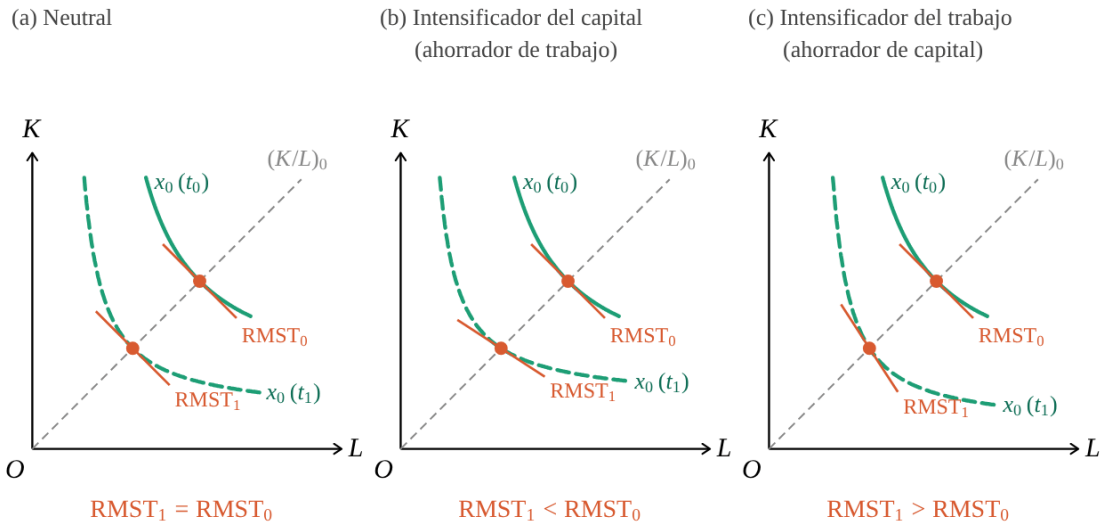


Figura A11.9: Clasificación de Hicks. Entre t_0 y t_1 la isocuanta x_0 se desplaza hacia el origen. Sobre el radio-vector $(K/L)_0$, la pendiente de la isocuanta (la RMST) se mantiene con progreso neutral (panel a), disminuye con progreso intensificador del capital o ahorrador de trabajo (panel b) y aumenta con progreso intensificador del trabajo o ahorrador de capital (panel c).

Harrod (1937; 1948): se basa en la participación relativa de los factores en la renta. Una innovación tecnológica es neutral si las participaciones relativas del capital y del trabajo en la renta nacional permanecen inalteradas para una determinada ratio capital-producto.

Según demostraron Robinson (1938) y Uzawa (1961), esta condición exige que el progreso técnico adopte la forma de un aumento de la productividad del trabajo, $x_t = f(K_t, A(t) \cdot L_t)$. En consecuencia, el progreso tecnológico hará que, conforme pasa el tiempo, con una misma cantidad de capital se precise una cantidad de trabajo cada vez menor para obtener la misma producción. Uzawa (1961) demostró, además, que la condición necesaria y suficiente para la existencia de un estado estacionario es que el progreso sea Harrod-neutral. Por esta razón, la neutralidad en el sentido de Harrod es la hipótesis estándar en los modelos de crecimiento de tipo Solow, ya que es la única forma de progreso técnico compatible con una senda de crecimiento equilibrado.

Solow (1960): una innovación es neutral si las participaciones relativas de los factores productivos en la renta nacional permanecen inalteradas para una ratio trabajo-producto. Implica que $x_t = f(A(t) \cdot K_t, L_t)$. Para funciones Cobb-Douglas, los tres tipos de progreso neutro son equivalentes.

2.3.3. Conclusiones

Aspectos positivos: el progreso técnico es uno de los determinantes fundamentales del crecimiento económico a largo plazo. Además, la clasificación de Hicks, Harrod y Solow permite distinguir los efectos distributivos del cambio tecnológico, con implicaciones relevantes de política económica. Por ejemplo, un progreso técnico ahorrador de trabajo puede generar desempleo tecnológico y exigir políticas de reconversión, mientras que un progreso neutral en el sentido de Harrod favorece un crecimiento equilibrado.

Limitaciones: para funciones de tipo Cobb-Douglas, los tres tipos de neutralidad son equivalentes, lo que simplifica el análisis pero limita la capacidad del modelo para capturar los efectos asimétricos del progreso técnico observados en la práctica.

2.4. Conclusiones

Cada horizonte tiene su medida de la respuesta del *output*. A corto plazo, la elasticidad-producto del factor variable sitúa a la empresa en una de las tres etapas. Solo la etapa II, entre el óptimo y el máximo técnicos, es compatible con una conducta racional, aunque el punto exacto dentro de ella dependa de los costes. A largo plazo, la elasticidad de escala, suma de las elasticidades-producto, clasifica los rendimientos. Los rendimientos globales resultan de acumular esa elasticidad, que es local, a lo largo de cada radio-vector y coinciden con los locales en las funciones homogéneas. A muy largo plazo, el progreso técnico desplaza la propia función, y su sesgo, según los criterios de Hicks, Harrod o Solow, altera el reparto de la renta entre los factores.

Las tres leyes suponen un único *output* y una empresa que produce sobre la frontera. La sección 3 relaja ambos supuestos con la producción de varios bienes y con la medición de la distancia de las empresas reales a la frontera.

3. Extensiones

El análisis anterior se extiende en dos direcciones. La primera considera la producción conjunta, la obtención de varios productos con unos recursos dados, paso previo al equilibrio general. La segunda contrasta la teoría con los datos y mide la distancia de las empresas reales a la frontera de producción.

3.1. Producción conjunta: el caso multiproducto

Hasta aquí se ha supuesto que la empresa obtiene un único producto. Con esa hipótesis, era técnicamente eficiente siempre que operase sobre el tramo decreciente de sus isocuantas, el que delimita la región económica de la producción. En cambio, si la empresa obtiene varios *outputs*, situarse en el tramo decreciente de una isocuanta deja de ser condición suficiente para la eficiencia técnica.

3.1.1. Planteamiento

Se producen dos bienes, x e y, con dos factores, K y L, mediante funciones de producción f_x y f_y. Equivale a situarse en una economía en la que existen dos productores, cada uno de los cuales produce un bien, aunque también podría interpretarse como un único productor que produce dos bienes. La producción conjunta está sujeta a una restricción de recursos, $L_0 = L_x + L_y$ y $K_0 = K_x + K_y$. Es decir, la cantidad de factor aplicado en la producción de cada bien está limitada por la dotación de factores productivos de los que dispone la economía.

Dados los supuestos, la empresa no solo tendrá que producir de forma técnicamente eficiente cada uno de los bienes, sino que deberá producir teniendo en cuenta la cantidad producida del otro bien y las dotaciones de los demás factores productivos. La eficiencia técnica exige que la RMST sea idéntica en ambas producciones:

$$\text{RMST}^x_{KL} = \text{RMST}^y_{KL} \rightarrow \frac{\text{Pmg}^x_L}{\text{Pmg}^x_K} = \frac{\text{Pmg}^y_L}{\text{Pmg}^y_K}$$

Con dos bienes, una asignación de factores es técnicamente eficiente cuando ningún cambio en el reparto de los factores permite producir más de uno de los bienes sin producir menos del otro, condición que define la curva de contratos. Nótese que esta es la misma condición de eficiencia en la producción que se estudia en la teoría del equilibrio general, la igualación de las RMST entre sectores productivos sin necesidad de precios. La diferencia es que, en equilibrio general, un vector de precios de factores común (w/r) actúa como mecanismo de coordinación que garantiza esta igualación de forma descentralizada.

> El estudio de la eficiencia en la producción en un contexto de equilibrio general se desarrolla en el tema A21, donde la condición $\text{RMST}^x = \text{RMST}^y$ aparece como componente de la eficiencia de Pareto y se conecta con los teoremas fundamentales del bienestar.

3.1.2. Caja de Edgeworth-Bowley y curva de contratos

En el diagrama de Edgeworth, las dimensiones de la caja son las dotaciones factoriales. Por eso, cualquier punto interior es una asignación de pleno empleo, aunque no se cumpla la eficiencia productiva. Las isocuantas de cada empresa muestran las combinaciones de factores para cada nivel de producción. Tienen mayor nivel cuanto más alejadas del origen, pendiente negativa en el plano (L, K) y son convexas si hay sustituibilidad imperfecta.

Superioridad de Pareto: si se parte de un punto como Z (figura A11.10, panel a), los puntos en el interior de la lente definida por las isocuantas que pasan por dicho punto contendrán asignaciones superiores en el sentido de Pareto. Las asignaciones de la frontera de la lente, salvo sus dos vértices (Z y el otro corte de ambas isocuantas), también son superiores en el sentido de Pareto a la asignación inicial. Maurice Allais denominó esta área encerrada "área del excedente distribuible" (1943).

Eficiencia de Pareto: si, además, estas asignaciones son tales que ninguna empresa puede aumentar su producción sin que la otra la disminuya, serán eficientes en el sentido de Pareto. El lugar geométrico de estas asignaciones nace de la tangencia de las isocuantas y se conoce como *curva de contratos*.

La curva de contratos no es necesariamente una isoclina. En todos los puntos se cumple la condición de tangencia entre las isocuantas de cada empresa, si bien no necesariamente todos tienen la misma pendiente. Asimismo, las asignaciones sobre la curva de contratos no son comparables entre sí en el sentido de Pareto, ya que pasar de una a otra aumenta la producción de un bien a costa de la del otro.

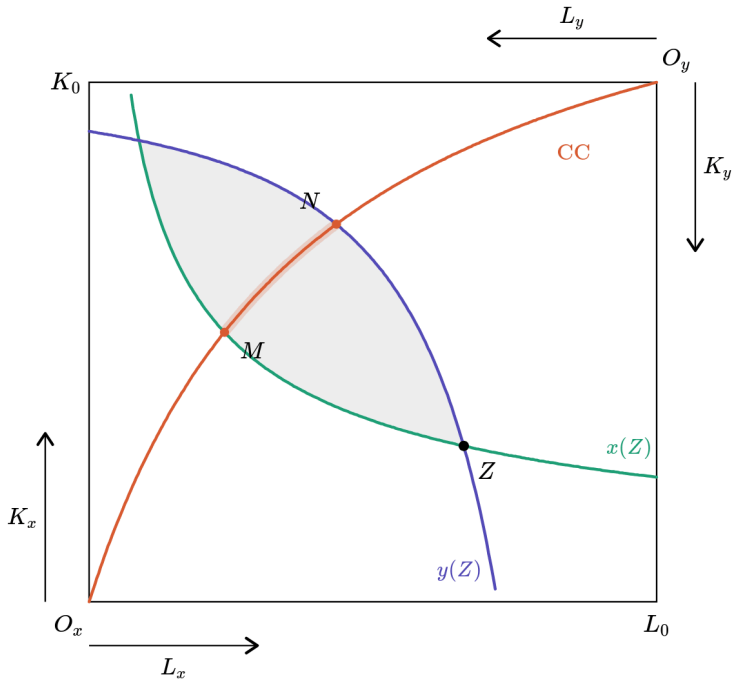
La curva de contratos incluye los vértices de la caja (en los que una empresa usa todos los factores y la otra nada). Su forma depende de la intensidad factorial. Así, es curvada por encima de la diagonal si x es más capital-intensiva, por debajo si es menos, y recta si la intensidad es idéntica[5].

3.1.3. Curva de posibilidades de producción o curva de transformación

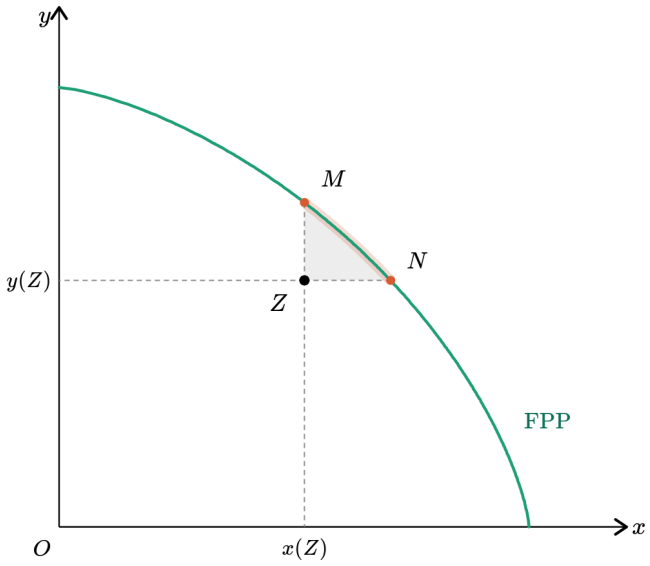
Proyectando los puntos de la curva de contratos en el plano de bienes (figura A11.10, panel b) se obtiene la **curva de transformación** (análoga a la FPP monoproducto). La curva de transformación refleja la máxima cantidad de x producible para una determinada cantidad de y, dada la tecnología y la dotación factorial. Recoge, por ello, las nociones de optimalidad paretiana y coste de oportunidad en la producción. Intuitivamente, expresa el hecho económico básico de que no hay suficientes recursos disponibles (tecnológicos y dotacionales) para producir todo lo que se desea de cada bien. La plena divisibilidad de los bienes considerados garantiza que la curva de transformación es continua.

Cada punto de la curva es la imagen, en el plano de bienes, de una asignación situada sobre la curva de contratos, así que todos son óptimos de Pareto, y hay infinitos que no pueden ordenarse entre sí. Los puntos exteriores a la curva no pueden producirse con los recursos y la tecnología actuales, aunque el progreso tecnológico podría ponerlos a su alcance. Los interiores sí pueden producirse, pero son ineficientes, bien porque quedan recursos sin emplear, bien porque se reparten mal entre las dos producciones. Desde ellos cabría mantener el *output* de un bien y aumentar el del otro.

[5] Siempre que L esté en abscisas y K en ordenadas. Si no, el razonamiento se invierte.



(a) Caja de Edgeworth de la producción



(b) Frontera de posibilidades de producción

Figura A11.10: Caja de Edgeworth-Bowley de la producción y curva de transformación. En la caja de dimensiones $L_0 \times K_0$ (a), las isocuantas $x(Z)$ e $y(Z)$ que pasan por la asignación ineficiente Z encierran la lente de asignaciones Pareto-superiores. La curva de contratos (CC), por encima de la diagonal porque x es más capital-intensiva, une las tangencias entre isocuantas, como M y N. Proyectada en el plano de bienes (b), la curva de contratos da la curva de transformación (FPP), con Z en su interior y la lente proyectada en la región sombreada.

Pendiente: su valor absoluto, con productividades marginales positivas de ambos factores en las dos producciones, es la relación marginal de transformación (RMT). Para dos bienes cualesquiera, i y j, $\text{RMT}_{ji} = -dx_j/dx_i$ (con las dotaciones de factores dadas) mide cuántas unidades de j hay

que dejar de producir para obtener una más de i. Con los dos bienes del modelo, x e y:

$$\mathrm{RMT}_{yx} = -\frac{dy}{dx}\bigg|_{K_0,L_0} = \frac{\mathrm{Pmg}_L^y}{\mathrm{Pmg}_L^x} = \frac{\mathrm{Pmg}_K^y}{\mathrm{Pmg}_K^x}$$

Siempre que no existan externalidades y las productividades marginales de los factores sean positivas, existe una disyuntiva (*trade-off*) en la producción. Al aumentar la cantidad producida de un bien necesariamente ha de disminuir la cantidad producida de otro bien, lo que refleja la existencia de un coste de oportunidad a la hora de producir cualquiera de los dos bienes.

Interpretación desde la teoría de costes: la RMT se puede expresar como el cociente de costes marginales, $\mathrm{RMT}_{yx} = \mathrm{Cmg}_x/\mathrm{Cmg}_y$. Cabe esperar, por tanto, que la RMT aumente con movimientos en el sentido de las agujas del reloj a lo largo de la curva de transformación. Al producir más de x y menos de y, el Cmg_x sube (rendimientos decrecientes) y el Cmg_y baja, de modo que la ratio aumenta.

Forma (cóncava respecto al origen). La concavidad puede deberse a:

- *Rendimientos decrecientes a escala.*

- *Especialización de factores*: sustituibilidad imperfecta, pues algún factor es más adecuado para la producción de un bien que para la de otro.

- *Distinta intensidad factorial con rendimientos constantes*: aunque los factores productivos sean homogéneos y las funciones de producción tengan rendimientos constantes a escala, la curva es cóncava si la fabricación de cada bien requiere distintas proporciones de factores.

Como la curva de transformación y las curvas de indiferencia se representan en el mismo espacio de bienes, pueden superponerse. Si la tecnología es convexa (curva de transformación cóncava) y las preferencias son estrictamente convexas (curvas de indiferencia convexas), existe un único punto de tangencia entre la curva de transformación y la curva de indiferencia más alta alcanzable, en el que $\mathrm{RMT}_{yx} = \mathrm{RMS}_{yx}$. Ese punto constituye el equilibrio general de producción y consumo de una economía con un solo agente (tipo Robinson Crusoe) o representada por una curva de indiferencia social.

3.1.4. Producción conjunta en sentido técnico: la empresa multiproducto

Idea: el análisis anterior trata los dos bienes como producciones separadas que solo compiten por los factores (tecnologías *separables*). En cambio, hay producción conjunta en sentido estricto cuando un mismo proceso da varios productos a la vez, como la lana y la carne del ganado ovino o la gasolina y el gasóleo de una refinería. La tecnología se describe entonces con la función de transformación del apartado 1.2.1, $F(x, y, \mathbf{z}) = 0$, que no puede separarse en una función de producción por bien.

Planteamiento: con unos factores dados, $\bar{\mathbf{z}}$, la empresa precio-aceptante elige la combinación de productos que maximiza sus ingresos sobre su curva de transformación:

$$\max_{x,y} \; p_x x + p_y y \qquad \text{s.a.: } F(x, y, \bar{\mathbf{z}}) = 0$$

CPO: con solución interior y la restricción agotada, eliminando el multiplicador entre las dos condiciones resulta

$$\text{RMT}_{yx} = \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{p_x}{p_y}$$

La empresa se desplaza a lo largo de su curva de transformación hasta que el número de unidades de y a las que renuncia por una más de x iguala el precio relativo.

CSO: si la curva de transformación es cóncava (conjunto de producción convexo), la condición es suficiente, porque el objetivo es lineal.

Extensiones: dos casos completan el análisis.

- *Proporciones fijas*: si los productos salen en una proporción técnica fija, $y = \kappa x$, la empresa no elige la mezcla, sino solo la escala. Los dos productos tienen un coste conjunto que no puede repartirse entre ellos (oferta conjunta de Marshall, 1890), y la empresa produce hasta que el ingreso marginal del proceso, $p_x + \kappa\, p_y$, iguala su coste marginal.

- *Economías de alcance*: si producir los dos bienes en una sola empresa cuesta menos que hacerlo en dos, la producción conjunta tiene además una ventaja de costes (tema A12, apartado 3.2.3).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la empresa multiproducto elige la mezcla de productos con la misma lógica marginal con la que la monoproducto elige la de factores, con la RMT frente al precio relativo de los productos en el papel de la RMST frente al de los factores.

- *Limitaciones*: con proporciones fijas, el coste conjunto impide atribuir un coste propio a cada producto, de modo que el precio de cada uno lo fija su demanda, dada la escala del proceso.

3.2. Análisis empírico: fronteras de eficiencia

La teoría supone que la empresa produce sobre la frontera (apartado 1.1.3), pero en la práctica empresas con acceso a la misma tecnología obtienen *outputs* distintos con los mismos *inputs*. De ahí que una de las principales líneas del análisis empírico de la producción sea la medición de la **eficiencia productiva**, que cuantifica la distancia de cada empresa a una frontera no observable, estimada a partir de la mejor práctica observada. Esa medición parte de la descomposición de Farrell (1957), y la frontera se estima después con el análisis envolvente de datos o con el análisis de fronteras estocásticas.

Los dos métodos de estimación se aplican a la evaluación de hospitales, centros educativos y bancos, y a la competencia por comparación (tema A20, apartado 2.3.2). Además, con datos de panel, el índice de productividad de Malmquist descompone la variación de la productividad en cambio de eficiencia (acercamiento a la frontera) y cambio técnico (desplazamiento de la frontera). Por su parte, la ineficiencia-X (tema A12, apartado 3.1.2) ofrece una explicación de la distancia a la frontera.

3.2.1. Medición de la eficiencia (Farrell, 1957)

Idea: Farrell (1957) mide la eficiencia de una empresa por su distancia a la frontera y distingue en ella dos componentes:

▪ *Eficiencia técnica* (ET): mide la máxima reducción radial de los *inputs* compatible con el *output* observado. Si la empresa produce x con $\mathbf{z}$, la ET es el menor $\theta \in (0, 1]$ tal que $\theta\mathbf{z} \in V(x)$, el conjunto de requerimientos de *inputs* del apartado 1.2.1. Vale uno sobre la isocuanta y no depende de las unidades de medida.

▪ *Eficiencia asignativa* (EA): mide si la mezcla de factores minimiza el coste a los precios vigentes y vale uno cuando la empresa emplea la proporción de factores del punto de tangencia entre la isocuanta y la recta isocoste (tema A12).

El producto de ambas es la *eficiencia económica* o en costes, cociente entre el coste mínimo y el coste observado, EE = ET · EA. La medida de la eficiencia técnica puede orientarse también al *output* (máxima expansión radial del *output* con los *inputs* dados), y ambas orientaciones coinciden con rendimientos constantes a escala.

Desarrollo gráfico: con rendimientos constantes a escala la tecnología se resume en la isocuanta unitaria SS' del plano de factores por unidad de producto, $(z_1/x, z_2/x)$ (figura A11.11). La empresa observada, P, queda por encima de ella, y el radio-vector OP corta la isocuanta en Q y la recta isocoste AA', tangente a la isocuanta en Q', en R. Así, ET = OQ/OP, EA = OR/OQ y EE = OR/OP.

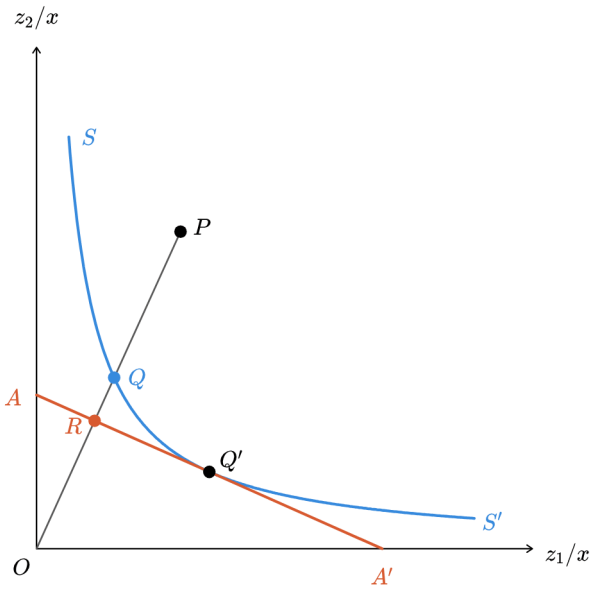


Figura A11.11: Medición de la eficiencia (Farrell, 1957). La empresa P produce por encima de la isocuanta unitaria SS', y el radio-vector OP corta la isocuanta en Q y en R la isocoste AA', tangente en Q', de modo que ET = OQ/OP, EA = OR/OQ y EE = OR/OP.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: resume la eficiencia de cada empresa en un índice entre cero y uno, que no depende de las unidades de medida, y separa la ineficiencia técnica de la asignativa.

▪ *Limitaciones*: mide la eficiencia respecto a la mejor práctica observada y no respecto a la frontera verdadera, que no es observable, de modo que el resultado depende de la muestra y del método con el que se estime la frontera.

3.2.2. Análisis envolvente de datos (Charnes, Cooper y Rhodes, 1978)

Origen: Charnes, Cooper y Rhodes (1978) propusieron el análisis envolvente de datos (DEA, *data envelopment analysis*) para calcular la medida de Farrell con programación lineal, sin especificar una función de producción.

Idea: es un método no paramétrico que toma como frontera la menor tecnología que contiene todas las observaciones y cumple libre disposición, convexidad y rendimientos constantes (apartados 1.1.2 y 1.1.3).

Razonamiento: la ET de cada empresa resulta de un programa lineal que busca la combinación de empresas observadas que obtiene al menos su *output* con la menor fracción θ de sus *inputs*.

Extensiones: si se exige además que los pesos de la combinación sumen uno, se admiten rendimientos variables (Banker, Charnes y Cooper, 1984), y el cociente entre ambas medidas aísla la eficiencia de escala.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: no exige forma funcional y admite varios *outputs*.

- *Limitaciones*: es determinista, de modo que atribuye a ineficiencia cualquier desviación, incluidos el error de medida y los *shocks* aleatorios, y es sensible a los valores atípicos.

3.2.3. Análisis de fronteras estocásticas (Aigner, Lovell y Schmidt, 1977)

Origen: Aigner, Lovell y Schmidt (1977) y Meeusen y van den Broeck (1977) propusieron de forma independiente el análisis de fronteras estocásticas (SFA, *stochastic frontier analysis*).

Idea: es un método paramétrico que especifica una función de producción (Cobb-Douglas o translog) con un error compuesto:

$$\ln x_i = \ln f(\mathbf{z}_i; \beta) + v_i - u_i$$

donde v_i es un ruido simétrico y $u_i \geq 0$ la ineficiencia técnica, con distribución asimétrica (seminormal o exponencial).

Razonamiento: el modelo se estima por máxima verosimilitud, y la eficiencia técnica de cada empresa, $\exp(-u_i)$, se infiere de la distribución de u_i condicionada al residuo compuesto.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: a diferencia del DEA, separa ruido e ineficiencia y permite la inferencia estadística.

- *Limitaciones*: impone una forma funcional y una distribución a la ineficiencia.

Conclusiones

La teoría de la producción estudia la empresa como unidad técnica, sujeta solo a la restricción tecnológica. La tecnología se resume en el conjunto de posibilidades de producción y en la función de producción que describe su frontera, de las que se derivan las productividades, la RMST y la elasticidad de sustitución. A partir de ellas, las leyes de producción ordenan la respuesta del *output* según el horizonte temporal. Así, a corto plazo rigen los rendimientos marginales decrecientes; a largo plazo, los rendimientos a escala, y a muy largo plazo, el progreso técnico, neutral o sesgado. Por su parte, la producción multiproducto traslada la eficiencia técnica a la asignación de factores entre bienes, y las fronteras de eficiencia miden la distancia de cada empresa a la mejor práctica. Sin embargo, al prescindir de precios, costes y organización interna, la teoría no basta para determinar cuánto produce la empresa, y sus resultados dependen de la forma funcional.

Los conceptos de la producción sostienen buena parte del libro. En primer lugar, los rendimientos a escala determinan la forma de las curvas de coste, de las que parte la oferta competitiva (temas A12 y A16), y, cuando son crecientes, dan lugar al monopolio natural y a la necesidad de regularlo (tema A20). En segundo lugar, en la teoría neoclásica, la productividad marginal fija la remuneración de los factores (tema A03), y producir sobre la curva de transformación es una de las condiciones de la eficiencia de Pareto en el equilibrio general (tema A21). Por último, la función agregada con progreso técnico es el núcleo del modelo de Solow-Swan (tema A43) y de la contabilidad del crecimiento, que separa la contribución de los factores de la de la tecnología (tema A45).

La productividad es muy heterogénea entre empresas, incluso dentro de industrias definidas de forma estrecha, donde las empresas con los mismos *inputs* medidos obtienen *outputs* muy distintos de forma persistente (Syverson, 2011). En la misma línea, Hsieh y Klenow (2009) mostraron que la dispersión entre plantas de las productividades marginales en valor, mayor en China y la India que en Estados Unidos, refleja una mala asignación de recursos que reduce la productividad agregada. Por otro lado, la automatización se estudia con modelos basados en tareas (Acemoglu y Restrepo, 2018), que describen la producción como un conjunto de tareas que pueden realizar el capital o el trabajo. En ellos, la automatización desplaza al trabajo y reduce su participación en la renta, mientras que la creación de nuevas tareas la restituye.

Anexo. Función de producción neoclásica de buen comportamiento

La función de producción se puede representar a través de muchas especificaciones, si bien en cualquier caso refleja la eficiencia de la tecnología, los rendimientos a escala, la intensidad factorial y la sustituibilidad de los factores. Se denomina función neoclásica de buen comportamiento a la que cumple una serie de criterios neoclásicos:

1. *Eficiencia técnica*: cumple con los axiomas del productor racional. Destaca el axioma de *no free lunch*, según el cual no se puede producir sin utilizar *inputs*, aunque se admite la inacción. Formalmente, $f(0,0) = 0$ y $f(K,L) > 0$ para $K, L > 0$.

2. *Homogénea de grado uno*: presenta rendimientos constantes a escala, $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K,L)$. Esta propiedad es condición necesaria y suficiente para que, con cualquier combinación de factores, remunerar cada factor según su productividad marginal agote la producción (teorema de Euler y su recíproco) y para expresar la función de producción en forma intensiva[6].

3. *Productividades marginales positivas*: $f'_K > 0$, $f'_L > 0$. Incrementos en la cantidad aplicada de factores productivos, manteniendo la cantidad aplicada del otro factor constante, tienen un efecto positivo sobre el *output*, dado que se cumple el criterio de eficiencia técnica. Es condición suficiente para que las isocuantas tengan pendiente negativa en el plano (L,K) (existe cierto grado de sustituibilidad o coste de oportunidad entre los factores).

4. *Productividades marginales decrecientes*: $f''_{KK} < 0$, $f''_{LL} < 0$. Es condición necesaria (pero no suficiente) para que la función sea estrictamente cóncava, propiedad útil en los programas de maximización del beneficio. La concavidad estricta exige además que $f''_{KK} f''_{LL} - (f''_{KL})^2 > 0$, es decir, que la derivada cruzada segunda no sea demasiado grande, y solo es compatible con rendimientos decrecientes a escala. La función homogénea de grado uno de la propiedad 2 no la cumple, porque en ella esa expresión es nula (es cóncava, pero no estrictamente). En cambio, las productividades marginales decrecientes no son necesarias para la estricta cuasiconcavidad (RMST decreciente en L a lo largo de cada isocuanta), que depende del signo de $2f'_K f'_L f''_{KL} - (f'_K)^2 f''_{LL} - (f'_L)^2 f''_{KK}$. Sí lo son para que exista un equilibrio en la contratación de factores productivos y, en un contexto dinámico, para que exista un estado estacionario. La conjunción de las propiedades 3 y 4 implica que a corto plazo existen rendimientos marginales decrecientes para cualquier nivel de producción (ley de Turgot).

5. *Derivadas cruzadas positivas*: $f''_{KL} > 0$. La productividad marginal de cada factor aumenta con la cantidad empleada del otro, de modo que se prefieren combinaciones equilibradas de factores. Junto con las propiedades 3 y 4, garantiza que la RMST es decreciente, es decir, que la función de producción es estrictamente cuasicóncava (lo cual es compatible con cualquier tipo de rendimientos)[7].

6. *Condiciones de Inada*: en productividad marginal, $\lim_{K\to 0} f'_K = \infty$ (cuando la cantidad de factor productivo es baja, su productividad marginal es muy elevada, lo que, junto con la condición siguiente, garantiza la existencia de un estado estacionario con capital positivo). En el otro extremo, $\lim_{K\to\infty} f'_K = 0$ (cuando la cantidad de factor productivo es alta, su productividad marginal es muy reducida, lo que elimina la posibilidad de crecimiento endógeno). En la función,

[6] Función de producción intensiva: $f(\lambda K, \lambda AL) = \lambda f(K, AL) \to f(K/AL, 1) = f(k) \to y = f(k)$. El producto por unidad de trabajo efectivo solo depende del capital por unidad de trabajo efectivo.

[7] Que $f''_{KL} > 0$ no implica complementariedad en sentido estricto, porque, con producción dada, un cambio de precios relativos altera la mezcla factorial (sustitución), aunque al variar la escala ambos factores pueden moverse en el mismo sentido.

$\lim_{K\to 0} f(K,L) = 0$ (cuando la cantidad de factor productivo tiende a cero, la producción se anula, es decir, el factor es esencial) y $\lim_{K\to\infty} f(K,L) = \infty$ (cuando la cantidad de factor productivo crece sin límite, también lo hace la producción). Análogamente para L.

Ejemplo: la función Cobb-Douglas de rendimientos constantes

La participación de los capitalistas y de los trabajadores en la renta nacional permanecía más o menos constante, hecho observado por Paul Douglas cuando todavía era profesor de economía, antes de ser senador de Illinois (1949-1967). Le preguntó a su colega Charles Cobb si había una función de producción que cumpliese esta propiedad, y Cobb demostró que esta función existía y tomaba la forma $x = K^\alpha L^\beta$ con $\alpha, \beta > 0$ y $\alpha + \beta = 1$. Se puede verificar que cumple con todas las propiedades: eficiencia técnica ($f(0,0) = 0$), rendimientos constantes ($f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta} f(K,L) = \lambda f(K,L)$), productividades marginales positivas ($f'_K = \alpha K^{\alpha-1} L^\beta > 0$) y decrecientes ($f''_{KK} = \alpha(\alpha-1) K^{\alpha-2} L^\beta < 0$), derivada cruzada positiva ($f''_{KL} = \alpha\beta K^{\alpha-1} L^{\beta-1} > 0$) y, con ello, estricta cuasiconcavidad (preferencia por mezclas factoriales equilibradas), y condiciones de Inada ($\lim_{K\to 0} f'_K = \infty$, $\lim_{K\to\infty} f'_K = 0$).

A12. Teoría de costes

Teoría de los costes. Análisis de dualidad en el ámbito de la empresa. Aplicaciones empíricas.

Introducción

> **Introducción común.** Los temas A11 y A12 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A11**. Presenta la empresa como unidad que transforma factores en bienes, más allá de una economía de intercambio puro, y la teoría de la producción y de los costes que la estudia.

La teoría de costes traduce a términos monetarios la tecnología de la empresa (tema A11). Para cada nivel de producción y cada conjunto de precios de los factores, la **función de costes** da el gasto mínimo necesario para producirlo. De ella se obtienen las **demandas condicionadas de factores** y las curvas de coste con las que se analiza la oferta de la empresa en cada estructura de mercado (temas A16 a A19).

El coste relevante es el **coste de oportunidad**, el valor de la mejor alternativa a la que se renuncia, y no el gasto contable. A corto plazo, con algún factor fijo, la ley de proporciones variables da forma de U a las curvas de coste medio y marginal. A largo plazo, en cambio, todos los factores son variables, y la forma del coste medio depende de los rendimientos a escala, que determinan la **dimensión óptima de planta** y, con ella, cuántas empresas caben en un mercado. El progreso técnico desplaza, por último, todas esas curvas hacia abajo. La distinción entre costes fijos, variables y **hundidos**, los que no se recuperan al abandonar la actividad, decide además cuándo conviene entrar en un mercado o salir de él y es la base de la teoría de los mercados impugnables (tema A15).

La curva en U ha recibido críticas desde dentro de la propia teoría. Stigler (1939) sostuvo que la empresa mantiene una reserva de capacidad que hace horizontal el coste en un amplio intervalo de producción, y Leibenstein (1966) mostró, con la ineficiencia X, que la empresa no siempre minimiza el coste. Otras aportaciones relacionan el coste con la organización de la empresa, con la estructura del mercado y con el aprendizaje acumulado en el tiempo. Los estudios aplicados estiman hoy funciones de costes flexibles, como la translog, para medir las economías de escala y de alcance de sectores como la banca, la energía o las telecomunicaciones.

El tema se organiza en tres partes:

- *Dualidad*: el tema plantea el problema primal y el dual del productor, de los que se obtienen las demandas de factores y la función de costes.

- *Costes a corto, largo y muy largo plazo*: la teoría neoclásica los analiza con su estática comparativa y sus extensiones.

- *Críticas y aplicaciones*: el tema termina con las críticas a esa teoría, las aportaciones que relacionan el coste con la empresa, el mercado y el tiempo, y la evidencia empírica.

1. Fundamentos de la teoría de costes

La **teoría de costes** es la parte de la teoría de la empresa que estudia cómo se traduce la tecnología en términos monetarios. Dados un nivel de producción y unos precios de los factores, analiza qué combinación de factores elige una empresa racional y cuánto le cuesta producir.

> Los apartados 1.1 a 1.3 presentan, con una finalidad conceptual, los elementos del problema de la empresa: el concepto de coste y los supuestos, el gasto en factores y la restricción tecnológica. En la exposición oral del tema puede partirse directamente del apartado 1.4, que plantea ese problema y obtiene de él la función de costes.

1.1. El conjunto de elección y las premisas de la teoría de costes

La teoría de costes necesita precisar qué entiende por coste y entre qué combinaciones de factores elige la empresa, con qué supuestos.

1.1.1. El concepto de coste

La economía entiende el coste de forma más amplia que la contabilidad:

- *Coste contable*: corresponde a los costes explícitos (gastos desembolsados, costes históricos, depreciación).

- *Coste implícito*: se refiere al coste de oportunidad de los recursos propios de la empresa, es decir, al valor de la mejor alternativa a la que se renuncia.

- *Coste económico*: suma ambos y valora cada factor por la remuneración que obtendría en su mejor uso alternativo[1].

1.1.2. El conjunto de elección y los supuestos

Definición: el conjunto de elección de la teoría de costes es el mismo que el de la teoría de la producción. En el tema A11 la empresa elige planes de producción $\mathbf{y}$ dentro del conjunto de posibilidades de producción (CPP), delimitado por los axiomas de la tecnología. En el caso monoproducto, un plan se escribe $\mathbf{y} = (x, -\mathbf{z})$, con x el *output* y $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_+$ las cantidades de factores.

Como la teoría de costes fija el nivel de producción, la elección se restringe a la sección del CPP correspondiente a ese *output*, el *conjunto de requerimientos de inputs*, $V(x)$,

$$V(x) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_+ \mid (x, -\mathbf{z}) \in \text{CPP}\} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_+ \mid f(\mathbf{z}) \geq x\}$$

es decir, las combinaciones de factores con las que puede obtenerse al menos x, cuya frontera es la isocuanta.

Supuestos: la teoría de costes descansa en supuestos que se pueden resumir en cuatro premisas:

[1] Los costes laborales son explícitos, mientras que el coste del capital propio es implícito (su precio sombra, no el histórico). El coste económico incluye los servicios empresariales (coste de oportunidad de los propietarios). Por eso se llama "normal" a un beneficio económico nulo.

- *Entorno*: la empresa obtiene un único producto y decide en un marco estático y con certidumbre sobre el nivel de producción.

- *Agentes*: la empresa minimiza el coste de cada nivel de producción, lo que es condición necesaria para maximizar el beneficio sea cual sea la estructura del mercado del producto.

- *Tecnología*: la función de producción cumple las propiedades del tema A11 (continuidad, doble diferenciabilidad, cuasiconcavidad estricta, rendimientos regulares), lo que garantiza isocuantas estrictamente convexas y, si los factores son esenciales, soluciones interiores.

- *Mercado de factores*: la empresa es precio-aceptante, con el vector de precios $\mathbf{p}^z = (p_1^z, \dots, p_m^z)$ dado.

1.2. La función objetivo: el gasto en factores y las rectas isocoste

Delimitado el conjunto de elección, falta el criterio con el que la empresa ordena sus alternativas, el gasto en factores, cuyas curvas de nivel son las rectas isocoste.

1.2.1. La función de gasto en factores y sus propiedades

Definición: la función objetivo de la empresa es el *gasto en factores*, que asigna a cada combinación de factores su coste a los precios vigentes:

$$C(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m} p_i^z z_i = \mathbf{p}^z \cdot \mathbf{z}, \qquad C : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$$

Propiedades:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua y diferenciable en las cantidades de factores y en sus precios, por ser lineal.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado uno en las cantidades de factores, $C(\lambda\mathbf{z}) = \lambda C(\mathbf{z})$, y en sus precios, $C(\lambda\mathbf{p}^z, \mathbf{z}) = \lambda C(\mathbf{p}^z, \mathbf{z})$. Es una función cardinal, medida en unidades monetarias.

3. *Inclinación*: estrictamente creciente en la cantidad de cada factor, $\partial C/\partial z_i = p_i^z > 0$, y no decreciente en el precio de cada factor, $\partial C/\partial p_i^z = z_i \geq 0$.

4. *Forma*: lineal en las cantidades de factores (y, por separado, en sus precios), luego a la vez cóncava y convexa en ellas.

5. *Otras propiedades*:

- *Observabilidad*: es observable, pues lo son los precios y las cantidades de los factores.

1.2.2. Rectas isocoste

Definición: las curvas de nivel de la función de gasto son las *rectas isocoste*, lugar geométrico de las combinaciones de factores que suponen un mismo gasto, $\sum_i p_i^z z_i = C_0$.

Propiedades:

▪ *Pendiente*: en el caso de dos factores, la recta $p_1^z z_1 + p_2^z z_2 = C_0$ tiene ordenada en el origen C_0/p_2^z y abscisa C_0/p_1^z, y su pendiente es

$$\left.\frac{dz_2}{dz_1}\right|_{C_0} = -\frac{p_1^z}{p_2^z}$$

el precio relativo de los factores, es decir, la tasa externa u objetiva a la que el mercado permite sustituir un factor por otro sin alterar el gasto.

▪ *Forma y desplazamientos*: al ser lineal la función objetivo, la pendiente es constante a lo largo de la recta, y la sustituibilidad que ofrece el mercado no depende de las cantidades. Un aumento del gasto C_0 desplaza la recta paralelamente hacia fuera (figura A12.1), y un cambio en el precio relativo la gira en torno a la intersección con el eje del factor cuyo precio no varía.

1.3. La restricción: la tecnología y la eficiencia técnica

Definición: la restricción de la empresa es la tecnología, ya que para producir x debe elegir una combinación de factores del conjunto de requerimientos de *inputs*, $f(\mathbf{z}) \geq x$.

Propiedades:

▪ *Eficiencia técnica*: no puede obtenerse más *output* con los mismos *inputs* ni el mismo *output* con menos *inputs*. Las isocuantas reúnen las combinaciones técnicamente eficientes que producen un mismo *output*.

▪ *Región económica*: la empresa se sitúa en el tramo decreciente de las isocuantas, delimitado por las líneas de contorno (*ridge lines*)[2], en el que la productividad marginal de ambos factores es positiva.

▪ *Eficiencia en costes*: la eficiencia técnica, por sí sola, deja abiertas dos elecciones. La teoría de costes determina, según lo que cuestan los factores, el punto concreto de la isocuanta, y la teoría de los mercados decide sobre qué isocuanta se sitúa la empresa. Aunque todos los puntos de la isocuanta son técnicamente eficientes, al productor le interesan los que usan más del factor relativamente barato (aquel cuyo precio relativo es menor que su productividad marginal relativa). La teoría de costes añade así la eficiencia en costes, que pide una asignación técnicamente eficiente y, además, de coste mínimo[3].

[2] Isoclinas en las que la productividad marginal de uno de los factores es nula.

[3] Tanto en el problema primal como en el dual (apartado 1.4), el objetivo último es maximizar el beneficio, sea con coste dado (maximizar producción) o con producción dada (minimizar coste).

1.4. La decisión de la empresa: dualidad y función de costes

La decisión de la empresa puede plantearse como un problema primal (máxima producción con un gasto dado) o como su dual (mínimo coste de un nivel de producción dado). Sus soluciones, relacionadas por dualidad, dan las demandas de factores y la función de costes, cuya estática comparativa se estudia en el apartado 2. La dualidad en el ámbito de la empresa se completa con la función de máximo beneficio, $\Pi(p, \mathbf{p}^z)$, que da el mayor beneficio alcanzable para cada precio del producto y de los factores. Esta función es homogénea de grado uno y convexa en todos los precios, no decreciente en el del producto y no creciente en los de los factores. Por el lema de Hotelling, sus derivadas dan la oferta, $x^s = \partial\Pi/\partial p$, y las demandas incondicionadas de factores, $z_i^d = -\partial\Pi/\partial p_i^z$, que, a diferencia de las condicionadas, recogen también el ajuste de la producción. Su desarrollo y su aplicación a la oferta competitiva están en el tema A16, apartado 1.3.4.

1.4.1. Problema primal: maximización de la producción

Planteamiento: la empresa maximiza la producción con un gasto dado en factores:

$$\max_{\mathbf{z}} \; x = f(\mathbf{z}) \quad \text{s.a.:} \quad \sum p_i^z z_i = C_0$$

donde $\mathbf{z}$ es el vector de cantidades de factores, $f(\mathbf{z})$ la función de producción, x el *output*, p_i^z el precio del factor i y C_0 el gasto dado en factores. El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = f(\mathbf{z}) + \lambda \left(C_0 - \sum p_i^z z_i \right)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange de la restricción de gasto. Por el teorema de la envolvente, $\lambda = \partial\mathcal{L}/\partial C_0 = df^*/dC = f'_C$ es el **producto marginal del coste**, la producción adicional que se obtiene al gastar un euro más en factores combinados de forma óptima. Cuando el problema dual fija como objetivo la producción máxima del primal ($x_0 = x^*$), ambos tienen la misma solución y $\lambda = 1/\text{Cmg}$, porque una unidad adicional de producto exige gastar Cmg euros.

CPO: con solución interior y la restricción agotada, derivando el lagrangiano respecto a cada factor, $\partial\mathcal{L}/\partial z_i = \partial f/\partial z_i - \lambda p_i^z = 0$, y dividiendo las condiciones de dos factores cualesquiera, i y j:

$$\text{RMST}_{ji} = \frac{\partial f/\partial z_i}{\partial f/\partial z_j} = \frac{p_i^z}{p_j^z} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f/\partial z_i}{p_i^z} = \lambda \quad \forall i \tag{2}$$

La ecuación (1) iguala en el óptimo el precio relativo de los factores en el mercado, la tasa externa, y la tasa interna a la que la tecnología permite a la empresa intercambiarlos. La ecuación (2) se obtiene reordenando la (1) e iguala en todos los factores la productividad marginal por euro gastado al multiplicador λ[4].

CSO: la CPO es suficiente si las isocuantas son estrictamente convexas (función de producción estrictamente cuasicóncava), pues la restricción de coste es lineal.

[4]Supone que el coste marginal de oportunidad del factor equivale a su precio de mercado. Esto puede no ser válido con costes de transacción, ofertas no perfectamente elásticas, etc.

Solución (demandas marshallianas de factores): cantidad óptima demandada de cada factor como función de los precios de los factores y del coste:

$$z_i^m \equiv z_i^* = d_i(\mathbf{p}^z, C)$$

Sus propiedades son las siguientes:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: son continuas en los precios de los factores y en el coste, y diferenciables si la función de producción es dos veces diferenciable y estrictamente cuasicóncava.

2. *Transformaciones*: son homogéneas de grado cero en los precios de los factores y el coste (ausencia de ilusión monetaria).

3. *Inclinación*: en el precio del propio factor, pendiente indeterminada, pues recogen el efecto producción y el efecto sustitución. En el coste, son crecientes para los factores normales y decrecientes para los inferiores, porque un coste mayor eleva la producción máxima (apartado 2.2.2).

4. *Forma*: la teoría no restringe su curvatura respecto a los precios. La restricción de segundo orden recae sobre la función indirecta de producción, cuasiconvexa en los precios de los factores.

5. *Otras propiedades*:

- *Agotamiento del presupuesto*: cumplen la ley de Walras aplicada a la producción, $\sum_i p_i^z z_i^m = C$.

- *Envolvente* (*identidad análoga a la de Roy*): se obtienen de la función indirecta de producción, como cociente, cambiado de signo, de sus derivadas respecto al precio del factor y al coste.

- *Dualidad*: coinciden con las condicionadas evaluadas en la producción máxima, $d_i(\mathbf{p}^z, C) = d_i^c(\mathbf{p}^z, \phi(\mathbf{p}^z, C))$.

- *Observabilidad*: son directamente observables.

Función de valor óptimo (función indirecta de producción): recoge el máximo *output* alcanzable para cada nivel de precios de factores y coste:

$$x^* = \phi(\mathbf{p}^z, C)$$

Sus propiedades son análogas a las de la función indirecta de utilidad del consumidor:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en los precios de los factores y en el coste, y diferenciable cuando lo son las demandas de factores.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado cero en los precios de los factores y el coste. A diferencia de la función indirecta de utilidad, es cardinal, pues mide unidades físicas de producto.

3. *Inclinación*: estrictamente creciente en el coste ($\partial\phi/\partial C = \lambda > 0$) y no creciente en los precios de los factores ($\partial\phi/\partial p_i^z \leq 0$).

4. *Forma*: cuasiconvexa en los precios de los factores.

5. *Otras propiedades*:

- *Envolvente* (*identidad análoga a la de Roy*): sus derivadas respecto a los precios y al coste dan las demandas marshallianas de factores:

$$z_i^m \equiv z_i^* = -\frac{\partial\phi(\mathbf{p}^z, C)/\partial p_i^z}{\partial\phi(\mathbf{p}^z, C)/\partial C}$$

- *Dualidad*: evaluada en el coste mínimo, devuelve la producción fijada, $\phi(\mathbf{p}^z, c(\mathbf{p}^z, x_0)) = x_0$.

- *Observabilidad*: es observable, porque su valor es una cantidad física de producto.

1.4.2. Problema dual: minimización del coste

Planteamiento: la empresa minimiza el coste de obtener un nivel de producción dado:

$$\min_{\mathbf{z}} \; C = \sum p_i^z z_i \quad \text{s.a.:} \quad f(\mathbf{z}) = x_0$$

donde C es el coste o gasto en factores y x_0 el nivel de *output* objetivo. El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \sum p_i^z z_i + \mu\left[x_0 - f(\mathbf{z})\right]$$

El multiplicador $\mu = 1/\lambda$ es el **coste marginal de producción**, $\mu = dC^*/dx = c'_x$[5], pues por el teorema de la envolvente $\partial c(\mathbf{p}^z, x_0)/\partial x_0 = \partial\mathcal{L}/\partial x_0 = \mu$.

CPO: con solución interior y la restricción agotada, las condiciones de primer orden son, para cada factor i y cada par de factores i, j:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu} &= x_0 - f(\mathbf{z}^*) = 0 \quad \Rightarrow \; f(\mathbf{z}^*) = x_0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z_i} &= p_i^z - \mu\frac{\partial f}{\partial z_i} = 0 \quad \Rightarrow \; \text{RMST}_{ji} = \frac{\partial f/\partial z_i}{\partial f/\partial z_j} = \frac{p_i^z}{p_j^z}
\end{aligned}$$

En el óptimo, la relación marginal de sustitución técnica (RMST) iguala al precio relativo de los factores y la isocuanta x_0 es tangente a la recta isocoste más baja. Por tanto, cualquier otra combinación técnicamente eficiente sería más cara.

CSO: la misma convexidad de las isocuantas garantiza que la tangencia es un mínimo de coste, porque el conjunto de combinaciones de factores que alcanzan x_0 es convexo y la función objetivo es lineal.

Solución (demandas condicionadas de factores): cantidad óptima demandada de cada factor como función de los precios y del *output* objetivo[6]:

$$z_i^c \equiv z_i^* = d_i^c(\mathbf{p}^z, x_0)$$

Sus propiedades son las siguientes:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: son continuas en los precios de los factores y en el nivel de producción, y diferenciables en las mismas condiciones que las marshallianas.

[5] Contexto de LP al considerar ambos factores variables.
[6] La demanda de factores es derivada, es decir, depende de la demanda de producto.

2. *Transformaciones*: son homogéneas de grado cero en los precios de los factores, es decir, una subida equiproporcional de todos ellos no altera la combinación de mínimo coste.

3. *Inclinación*: efecto sustitución propio no positivo ($\partial z_i^c/\partial p_i^z \leq 0$, por la concavidad de la función de costes en precios y el lema de Shephard, y estrictamente negativo si los factores son sustituibles) y efecto precio cruzado indeterminado. Al ser condicionadas, no recogen el efecto producción. En el nivel de producción, son crecientes para los factores normales y decrecientes para los inferiores, aunque no todos pueden ser inferiores (apartado 2.2.2).

4. *Forma*: la teoría tampoco restringe su curvatura respecto a los precios. La restricción de segundo orden recae sobre la función de costes, cóncava en los precios de los factores. Como las pendientes de las demandas condicionadas son las segundas derivadas de esa función, forman una matriz de sustitución simétrica que la concavidad hace semidefinida negativa.

5. *Otras propiedades*:

- *No exceso de producción*: se alcanza exactamente el nivel de producción fijado, $f(\mathbf{z}^c) = x_0$.
- *Envolvente* (*lema de Shephard*): son el gradiente de la función de costes, $z_i^c = \partial c(\mathbf{p}^z, x_0)/\partial p_i^z$.
- *Dualidad*: coinciden con las marshallianas de factores evaluadas en el coste mínimo, $d_i^c(\mathbf{p}^z, x_0) = d_i(\mathbf{p}^z, c(\mathbf{p}^z, x_0))$.
- *Integrabilidad*: la función de costes se recupera integrándolas cuando la matriz de sustitución es simétrica y semidefinida negativa.
- *Observabilidad*: son observables en principio, porque el nivel de producción que las condiciona es medible, a diferencia de la utilidad en las demandas hicksianas.

Desarrollo gráfico: la minimización del coste se representa en el plano (z_1, z_2) (figura A12.1):

1. *Isocuanta objetivo* (x_0): es la restricción y permanece fija.

2. *Rectas isocoste*: de pendiente $-p_1^z/p_2^z$, con un coste menor cuanto más cerca están del origen.

3. *Equilibrio*: la isocuanta x_0 es tangente a la isocoste más baja compatible con ella, C^*, en el punto 0, que es la combinación (z_1^*, z_2^*). La isocoste C_1 no alcanza x_0, y la C_2 la alcanza con un coste mayor.

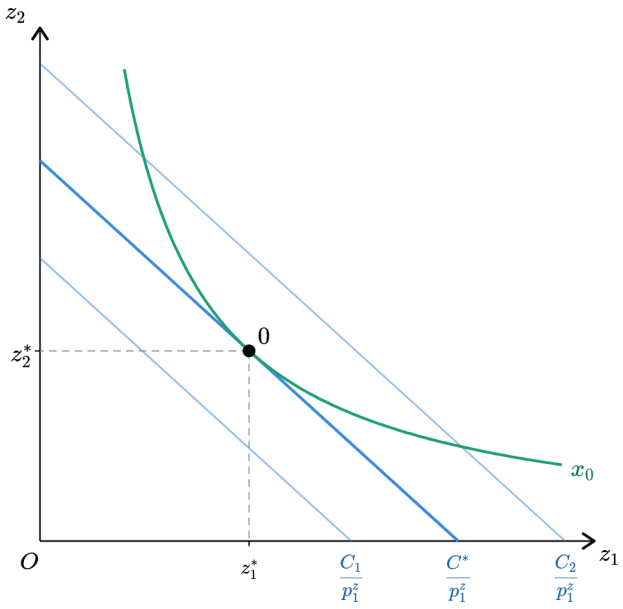


Figura A12.1: Equilibrio de la empresa. El coste de producir x_0 se minimiza en la tangencia entre la isocuanta y la recta isocoste.

Función de valor óptimo: se obtiene la función de costes, $c(\mathbf{p}^z, x_0)$.

1.4.3. Relaciones de dualidad

Dualidad entre soluciones: los planes óptimos de ambos problemas son idénticos, con el debido intercambio de información ($C_0 = C^*$ o $x_0 = x^*$).

Dualidad entre funciones de demanda:

$$d_i(\mathbf{p}^z, C) = d_i^c(\mathbf{p}^z, \phi(\mathbf{p}^z, C)) \qquad d_i^c(\mathbf{p}^z, x_0) = d_i(\mathbf{p}^z, c(\mathbf{p}^z, x_0))$$

Dualidad entre funciones de valor óptimo:

$$\phi(\mathbf{p}^z, C) = c^{-1}(\mathbf{p}^z, C) \qquad c(\mathbf{p}^z, x_0) = \phi^{-1}(\mathbf{p}^z, x_0)$$

1.4.4. La función de valor: la función de costes y sus curvas

Definición: el valor óptimo del problema dual es la *función de costes*, $c(\mathbf{p}^z, x)$, que da el coste mínimo de producir x dados los precios de los factores. Análoga a la función de gasto del consumidor, es la fuente de las curvas de coste y resume toda la información relevante de la tecnología que minimiza el coste (ejemplo resuelto con una Cobb-Douglas en el Anexo, apartado A.1):

$$C^* = c(\mathbf{p}^z, x_0) = \sum_{i=1}^{m} p_i^z \cdot d_i^c(\mathbf{p}^z, x_0)$$

Propiedades:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en los precios de los factores y en el nivel de producción, y diferenciable en los precios.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado uno en los precios de los factores[7], $c(\lambda \mathbf{p}^z, x) = \lambda \cdot c(\mathbf{p}^z, x)$. Las funciones de Cmg y Cme son también homogéneas de grado uno en precios. Es una función cardinal, medida en unidades monetarias.

3. *Inclinación*: estrictamente creciente en el nivel de producción ($\partial c/\partial x > 0$) y no decreciente en los precios de los factores ($\partial c/\partial p_i^z \geq 0$).

4. *Forma*: cóncava en los precios de los factores ($\partial^2 c/\partial (p_i^z)^2 \leq 0$). Si el precio de un factor sube, el coste aumenta menos que con las cantidades de factores constantes, por la posibilidad de sustitución[8]. La concavidad implica que la matriz de sustitución (análoga a la de Slutsky) es semidefinida negativa (demandas condicionadas no crecientes en su precio) y simétrica (por el teorema de Schwarz).

5. *Otras propiedades*:

- *Envolvente* (*lema de Shephard*): sus derivadas respecto a los precios son las demandas condicionadas, $z_i^c \equiv z_i^* = \frac{\partial c(\mathbf{p}^z, x)}{\partial p_i^z}$.

- *Dualidad*: evaluada en la producción máxima que permite un coste, devuelve ese coste, $c(\mathbf{p}^z, \phi(\mathbf{p}^z, C)) = C$.

- *Integrabilidad*: recíprocamente, toda función continua, homogénea de grado uno, no decreciente y cóncava en los precios de los factores es la función de costes de alguna tecnología. La función de costes permite recuperar esa tecnología si sus conjuntos de requerimientos son convexos y monótonos (en otro caso, su envolvente convexa).

- *Observabilidad*: se miden sus argumentos (los precios de los factores y el nivel de producción) y su valor, el coste, a diferencia de la función de gasto del consumidor, que depende de un nivel de utilidad no observable.

Coste marginal y coste medio: de la función de costes se derivan sus dos medidas unitarias:

- *Coste marginal*: $\text{Cmg}(x) = \partial \text{CT}(x)/\partial x$ es el coste de la última unidad producida, la pendiente de la función de coste total.

- *Coste medio*: $\text{Cme}(x) = \text{CT}(x)/x$ es el coste por unidad, la pendiente del rayo desde el origen. La forma de ambas curvas depende de la tecnología, y el marginal corta al medio en su mínimo, como toda magnitud marginal a su media[9].

Elasticidad-producto del coste:

$$\varepsilon_{Cx} = \frac{\Delta\%\text{CT}}{\Delta\%x} = \frac{\partial \text{CT}/\text{CT}}{\partial x/x} = \frac{\text{Cmg}}{\text{Cme}}$$

[7] Se cumple para cualquier tecnología, con independencia de los rendimientos a escala, que determinan, en cambio, cómo varía el coste con el *output* (apartado 2.4).
[8] El coste sube más cuanto más difícil es sustituir el factor. Con EST alta, es más cóncavo.
[9] Si $\text{CT}(0) = 0$ (sin costes fijos), por la regla de L'Hôpital el Cmg y el Cme coinciden en el origen.

Economías de escala: el Cme disminuye cuando aumenta la escala de producción[10][11]. Se clasifican (Marshall) en internas (Cme cae con el tamaño de la empresa) y externas (Cme cae con el tamaño de la industria). Las internas dan forma a la Cme_{LP} de la empresa, y las externas la desplazan.

Las economías de escala pueden ser, además, estáticas, si dependen del volumen producido en cada periodo, o dinámicas, si dependen de la producción acumulada (el aprendizaje del apartado 3.3). Se distingue también entre economías reales, que reducen la cantidad física de factores por unidad de producto, y pecuniarias, que provienen de mejores precios de los factores.

Relación entre elasticidad del coste y economías de escala internas: el valor de la elasticidad respecto a la unidad indica el tramo de la curva de coste medio en que se encuentra la empresa:

- $\varepsilon_{Cx} < 1$: el marginal está por debajo del medio, este decrece y existen economías de escala.
- $\varepsilon_{Cx} = 1$: ambos coinciden en el mínimo del coste medio y no hay economías ni deseconomías.
- $\varepsilon_{Cx} > 1$: el marginal supera al medio, este crece y existen deseconomías de escala.

Relación con los rendimientos a escala: en la combinación que minimiza costes, $\varepsilon_{Cx} = 1/\varepsilon_{x\lambda}$, la inversa de la elasticidad de escala. Por tanto, con precios de los factores dados, los rendimientos crecientes equivalen localmente a economías de escala, los constantes a su ausencia y los decrecientes a deseconomías.

Si la función no es homotética, sin embargo, la correspondencia deja de ser biunívoca cuando los rendimientos se miden sobre un radio-vector distinto de la senda de expansión. Puede haber economías de escala sin rendimientos crecientes en ese radio-vector, porque la empresa cambia la combinación de factores al crecer.

Elasticidad-precio del coste:

$$\varepsilon_{Cp_i} = \frac{\partial c}{\partial p_i^z} \cdot \frac{p_i^z}{c} = \frac{p_i^z z_i^c}{c}$$

La elasticidad equivale a la participación del factor i en el coste total[12], de la que depende, junto con la posibilidad de sustitución, el desplazamiento de las curvas de coste[13].

Elasticidad de sustitución técnica parcial (ESTP, Allen, 1938):

$$\sigma_{ij}^P = \frac{c \cdot c_{ij}}{c_i \cdot c_j} = \frac{\varepsilon_{z_i p_j}}{s_j}, \qquad c_i \equiv \frac{\partial c(\mathbf{p}^z, x)}{\partial p_i^z} = z_i^c, \quad c_{ij} \equiv \frac{\partial^2 c(\mathbf{p}^z, x)}{\partial p_i^z \, \partial p_j^z}$$

donde $\varepsilon_{z_i p_j}$ es la elasticidad de la demanda condicionada del factor i respecto al precio del factor j y $s_j = p_j^z z_j^c / c$ la participación de j en el coste. La ESTP de Allen (o de Allen-Uzawa) mide la respuesta de la demanda de un factor al precio de otro, con la producción y los demás precios constantes, relativa al peso de este en el coste. A diferencia de la elasticidad de sustitución técnica (EST) de Hicks, permite que varíe el empleo de los demás factores. Es simétrica ($\sigma_{ij}^P = \sigma_{ji}^P$) y

[10] Pueden ser intraplanta o interplanta.

[11] Las funciones de costes lineales con coste fijo, $\text{CT}(x) = a + bx$ con $a > 0$, presentan economías de escala internas, porque $\text{Cme}(x) = a/x + b$ es decreciente.

[12] También la elasticidad-precio del Cme es igual a esa participación.

[13] *Ejemplo*: una subida del precio del cobre apenas desplaza las curvas de coste de una eléctrica que pueda sustituirlo por aluminio en sus cables.

su signo clasifica a los factores en sustitutivos ($\sigma_{ij}^P > 0$) y complementarios ($\sigma_{ij}^P < 0$), caso este último solo posible con más de dos factores.

En el caso de dos factores en equilibrio competitivo (RMST $= w/r$), la ESTP coincide con la EST de Hicks y es necesariamente no negativa:

$$\sigma_{KL}^P = \left.\frac{\Delta\%(K/L)}{\Delta\%(w/r)}\right|_{x_0} \geq 0$$

1.5. Conclusiones

Los precios de los factores convierten la tecnología en costes y permiten elegir, dentro de cada isocuanta, la combinación más barata. La empresa precio-aceptante iguala la RMST al precio relativo de los factores, tanto si maximiza la producción con un gasto dado como si minimiza el coste de un *output* dado. Los dos problemas son duales y llevan a la misma combinación óptima. La función de costes, valor del problema dual, reúne la información de la tecnología que importa a la empresa. Sus derivadas respecto a los precios son las demandas condicionadas de factores, y su elasticidad respecto al *output*, inversa de la elasticidad de escala, mide las economías de escala. La sección 2 aplica este instrumental a los horizontes temporales, que difieren en los factores que la empresa puede ajustar.

2. Teoría neoclásica de los costes

La función de costes del apartado 1.4.4 supone que la empresa puede ajustar todos los factores. El horizonte temporal determina, sin embargo, qué factores pueden alterarse a corto plazo (algún factor fijo), a largo plazo (todos variables) y a muy largo plazo (también la tecnología). En los dos primeros horizontes, la estática comparativa separa los cambios en el objetivo de producción, que trazan la senda de expansión, de los cambios en los precios de los factores.

2.1. Corto plazo: ley de proporciones variables aplicada al coste

En el corto plazo, al menos un factor es fijo, lo que genera **costes fijos**[14] (independientes del volumen de producción y, si además son irrecuperables, hundidos) y **costes variables** (dependen del volumen).

2.1.1. Análisis gráfico

Gráficamente, en el plano (x, C) (figura A12.2), con costes cúbicos (rendimientos mixtos), las curvas de costes a corto plazo son:

Gráfico superior (costes totales):

1. CF_{CP}: línea horizontal, porque no dependen del nivel de producción.

2. CV_{CP}: con costes cúbicos tiene forma de S tumbada e invertida. Crece primero a un ritmo decreciente (rendimientos marginales crecientes) y, a partir del punto de inflexión, en el que la productividad marginal es máxima, a un ritmo creciente (rendimientos marginales decrecientes).

3. CT_{CP}: suma vertical de las dos anteriores, es la curva de costes variables desplazada hacia arriba en el importe de los costes fijos.

Gráfico inferior (costes unitarios):

1. $CFme_{CP}$: representa el coste fijo unitario. Es decreciente y tiene una asíntota horizontal, porque los costes fijos se diluyen conforme aumenta la producción.

2. Cmg_{CP}: es inversamente proporcional a la productividad marginal del factor variable ($\text{Cmg} = w/\text{Pmg}_L$) y tiene forma de U, con dos tramos:

- *Tramo decreciente*: mientras los rendimientos marginales del factor variable sean crecientes.

- *Tramo creciente*: una vez que los rendimientos marginales se vuelven decrecientes. En él, el Cmg_{CP} pasa por los mínimos del coste medio variable y del coste medio total, donde el rayo desde el origen es tangente a la curva de coste correspondiente del gráfico superior.

3. $CVme_{CP}$: representa el coste variable unitario. En el origen coincide con el coste marginal. Decrece hasta su mínimo, llamado *mínimo de explotación* o *de funcionamiento*, en el que se alcanza el óptimo técnico (la productividad media máxima), y a partir de él crece por debajo del coste marginal. En cambio, el óptimo de explotación es el mínimo del Cme_{CP}, que, por la dilución del coste fijo, sigue decreciendo cuando el CVme_{CP} ya crece.

[14] Que haya factor fijo no implica necesariamente coste fijo (depende del contrato).

4. Cme_{CP}: representa el coste total unitario. Suma vertical del CVme_{CP} y del CFme_{CP}, converge hacia el primero a medida que el coste fijo se diluye y tiene forma de U por el supuesto de rendimientos mixtos.

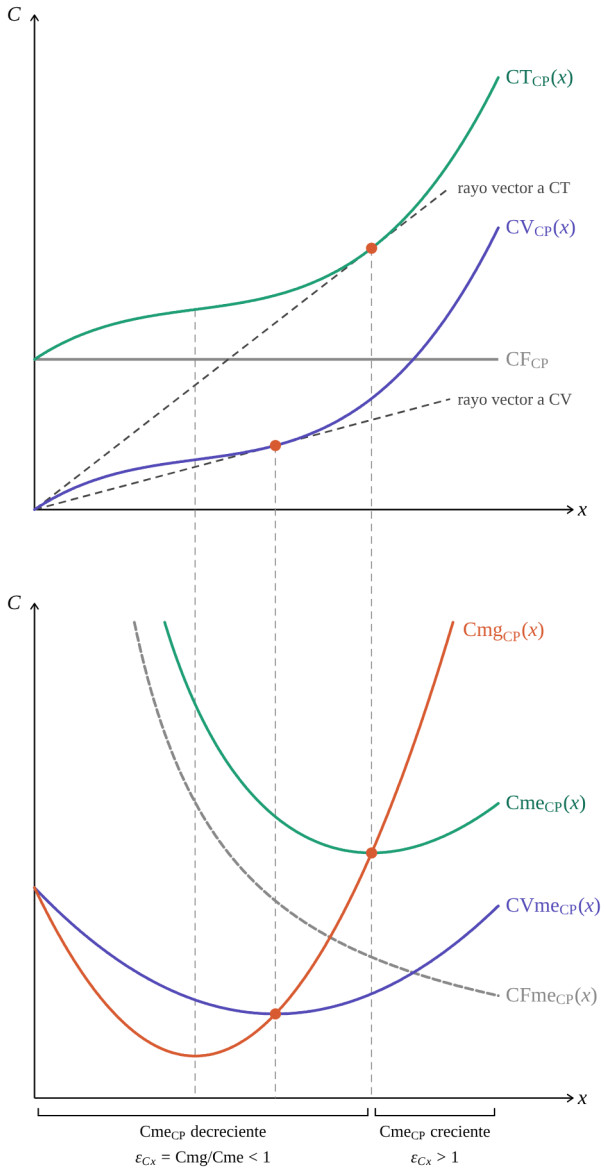


Figura A12.2: Costes a corto plazo. El gráfico relaciona el coste total, el coste medio y el coste marginal bajo la ley de proporciones variables.

2.1.2. Limitaciones a la optimalidad a corto plazo

La restricción de capacidad (factor fijo) impide cumplir $\text{RMST}_{KL} = w/r$ salvo en el nivel de producción para el que la planta es óptima. Por ello, la empresa debe utilizar combinaciones subóptimas (exceso o insuficiencia de capital, representadas en el Anexo, apartado A.3), con efectos que dependen del formato de contrato:

▪ *Contrato de arrendamiento*: la empresa paga solo por las unidades que usa si el factor fijo es divisible. La planta fija entonces solo un máximo, $K \leq \bar{K}$, y la empresa minimiza $wL + rK$ sujeta a él, de modo que, mientras no agote la capacidad, elige la mezcla de factores como a largo plazo. Con arrendamiento solo cabe, por tanto, la insuficiencia de capital, cuando la producción exige más del disponible, mientras que el exceso de capital, la senda $K = \bar{K}$ y el sobrecoste corresponden al contrato de propiedad.

▪ *Contrato de propiedad*: la empresa ha adquirido un compromiso de pago independientemente de la cantidad utilizada, de modo que $r\bar{K}$ es un coste fijo y solo el trabajo varía con la producción.

2.1.3. Estática comparativa a corto plazo

> Los efectos de los cambios de costes sobre el equilibrio de la empresa y de la industria se desarrollan en el tema A16, apartados 2.2.2 (corto plazo) y 2.3.2 (largo plazo). Aquí se recogen, sin economías de escala externas, sus efectos sobre las curvas de coste y la demanda de factores.

Cambios en el objetivo de producción: con el capital fijo en $\bar{K}$, la empresa solo puede ajustar el trabajo, cuya demanda, $L(x;\bar{K})$, es la que exige la isocuanta de cada nivel de producción. La *senda de expansión a corto plazo* es, por tanto, la recta horizontal $K = \bar{K}$ del plano (L, K) (figura A12.10), y el coste a corto plazo es $\mathrm{CT}_{\mathrm{CP}}(x) = wL(x;\bar{K}) + r\bar{K}$. Esa recta solo corta a la senda de largo plazo en el nivel de producción para el que $\bar{K}$ es la planta óptima. En los demás, la combinación elegida no cumple la tangencia y está sobre una isocoste más alta, por lo que el coste a corto plazo supera al de largo.

En ambos horizontes, un cambio en el objetivo de producción es un movimiento a lo largo de las curvas de coste, no un desplazamiento de ellas.

Cambios en los precios de los factores: el efecto depende de que varíen todos los precios, el del factor fijo o el del variable:

▪ *Cambio en todos los precios* (inflación pura): las curvas de coste se desplazan proporcionalmente (por la homogeneidad de grado uno) y la mezcla factorial no cambia (demandas condicionadas homogéneas de grado cero).

▪ *Cambio en coste fijo* (p. ej. aumento del alquiler de oficinas o impuesto de suma fija): desplaza $\mathrm{CFme}_{\mathrm{CP}}$ y $\mathrm{Cme}_{\mathrm{CP}}$ hacia arriba, mientras que $\mathrm{CVme}_{\mathrm{CP}}$ y $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{CP}}$, que determinan la cantidad producida y el umbral de cierre, no cambian. Por ello, un aumento del coste fijo no evitable no afecta a la oferta a corto plazo y solo reduce el beneficio[15].

▪ *Cambio en coste variable* (p. ej. aumento del salario, impuesto específico o *ad valorem* de la misma cuantía): desplaza $\mathrm{CVme}_{\mathrm{CP}}$ y $\mathrm{Cme}_{\mathrm{CP}}$ hacia arriba y, salvo que el factor encarecido sea inferior (caso solo posible con contrato de arrendamiento), también el $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{CP}}$, de modo que la empresa produce menos. La magnitud del efecto y la respuesta de la demanda de factores dependen del tipo de contrato sobre el factor fijo:

- *Contrato de arrendamiento*: si la capacidad no se agota, la empresa sustituye trabajo por capital como a largo plazo, de modo que las curvas de coste suben menos que en proporción a la subida del salario y la mezcla factorial cambia tanto más cuanto más fácil es la sustitución (curvatura de la isocuanta).

[15] Un impuesto sobre los beneficios tampoco altera la oferta a corto plazo, y solo si el coste fijo pudiera evitarse cerrando, su aumento podría adelantar el cierre.

- *Contrato de propiedad*: como $\mathrm{CV}_{\mathrm{CP}} = wL(x;\bar{K})$, una subida del salario de w_0 a w_1 multiplica $\mathrm{CVme}_{\mathrm{CP}}$ y $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{CP}}$ por w_1/w_0 en cada nivel de producción, y la mezcla factorial no cambia, porque el trabajo que exige cada nivel lo fija la isocuanta.

2.2. Largo plazo: dimensión óptima de planta

Cuando el horizonte permite ajustar cualquier factor, la empresa decide la dimensión de la planta y escoge la de menor coste. Mientras no ha invertido, puede optar por cualquier planta que la tecnología haga posible, y los costes a largo plazo (LP) tienen carácter de planificación, *ex ante*. Sin costes fijos, solo hay costes totales y sus versiones unitarias, cuya estática comparativa es la de las demandas condicionadas y la función de costes del apartado 1.4.

2.2.1. Análisis gráfico

Gráficamente, en el plano (x, C) (figura A12.3), en totales (gráfico superior) y en unitarios (gráfico inferior), los costes a largo plazo se representan con tres curvas y la dimensión óptima de planta:

1. CT_{LP}: asigna a cada nivel de *output* el menor coste total posible con todos los factores ajustables. Como los costes totales a corto plazo nunca son inferiores a los de largo plazo, es la envolvente de las $\mathrm{CT}_{\mathrm{CP}}$.

2. Cme_{LP}: da el coste unitario mínimo de cada volumen de *output* sin ningún factor fijo. Es también la envolvente de las $\mathrm{Cme}_{\mathrm{CP}}$, pero en general no pasa por sus mínimos, porque solo toca a cada una en un punto de tangencia. Su forma de U (rendimientos a escala primero crecientes y luego decrecientes) reparte esas tangencias en tres zonas:

   - *A la izquierda del mínimo de* Cme_{LP}: cada $\mathrm{Cme}_{\mathrm{CP}}$ la toca cuando todavía decrece.
   - *En el mínimo de* Cme_{LP}: la tangencia cae justo en el mínimo de una $\mathrm{Cme}_{\mathrm{CP}}$.
   - *A la derecha del mínimo de* Cme_{LP}: la $\mathrm{Cme}_{\mathrm{CP}}$ ya crece en el punto de tangencia.

3. Cmg_{LP}: pendiente de la $\mathrm{CT}_{\mathrm{LP}}$, tiene forma de U y no es envolvente, porque el $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{CP}}$ puede ser mayor o menor que él. Se obtiene proyectando en vertical los puntos de tangencia entre cada $\mathrm{Cme}_{\mathrm{CP}}$ y la $\mathrm{Cme}_{\mathrm{LP}}$.

4. *Dimensión óptima de planta*: se alcanza en x^*, donde $\mathrm{Cme}_{\mathrm{CP}} = \mathrm{Cmg}_{\mathrm{CP}} = \mathrm{Cmg}_{\mathrm{LP}} = \mathrm{Cme}_{\mathrm{LP}}$. La dimensión óptima es el tamaño cuya dotación de factores lleva el coste medio a largo plazo a su mínimo, sin economías de escala por aprovechar ($\varepsilon_{Cx} = 1$). A su izquierda, las plantas menores tienen capacidad ociosa y economías de escala pendientes, mientras que a su derecha las mayores trabajan sobrecargadas (horas extra, velocidad antieconómica, averías) y presentan deseconomías de escala.

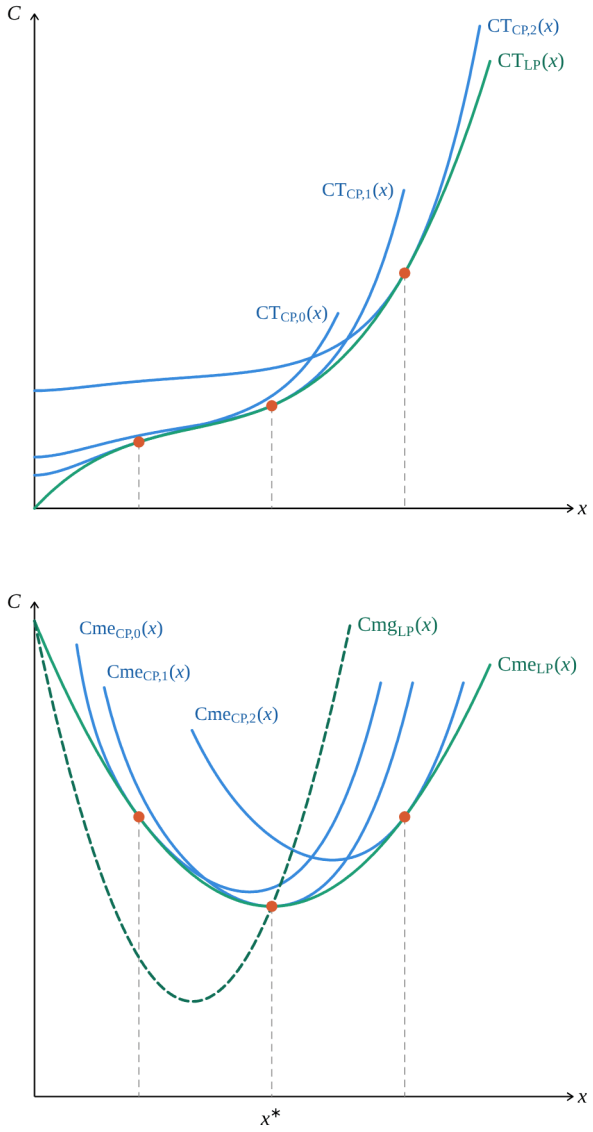


Figura A12.3: Costes a largo plazo. La curva de coste medio a largo plazo es la envolvente de las curvas de coste medio a corto plazo, y el gráfico señala la dimensión óptima de planta.

2.2.2. Estática comparativa a largo plazo

Cambios en el objetivo de producción: la *senda de expansión del coste* es el lugar geométrico de los planes de producción que minimizan el coste de cada nivel de producción a precios relativos constantes. Recoge los puntos de tangencia entre isocuantas e isocostes (soluciones del primal y del dual).

Gráficamente, con dos factores, en el plano (z_1, z_2) (figura A12.4), al aumentar la producción de x_0 a x_1 y x_2, la tangencia con las isocostes C_0, C_1 y C_2 pasa del punto 0 al 1 y al 2, y la senda (SEC) une esos puntos. Su pendiente es positiva cuando la expansión de la producción aumenta el empleo de ambos factores, y negativa si alguno de ellos es regresivo (su empleo cae al crecer la producción). Si la función de producción es homotética, la senda es una recta por

el origen, porque la RMST depende solo de las proporciones de factores, mientras que en otro caso la senda es una curva.

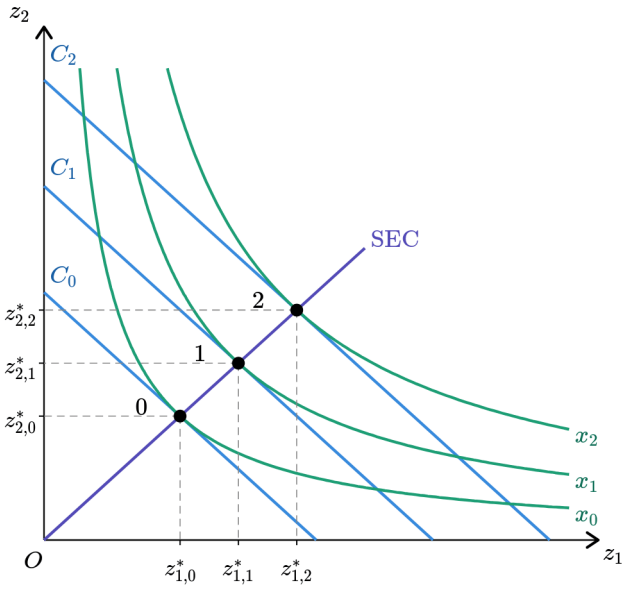


Figura A12.4: Senda de expansión del coste. La senda une las combinaciones de factores de coste mínimo para cada nivel de producción.

Recorrer la senda equivale a recorrer la función de costes a largo plazo, $\mathrm{CT}_{\mathrm{LP}}(x) = c(\mathbf{p}^z, x)$. La respuesta de cada factor a lo largo de la senda se mide con la *elasticidad-producto de su demanda condicionada*, $\varepsilon_{z_i x} = (\partial z_i^c/\partial x) \cdot (x/z_i^c)$. El factor es *normal* si $\varepsilon_{z_i x} > 0$ e *inferior* o regresivo si $\varepsilon_{z_i x} < 0$. Sin embargo, no todos los factores pueden ser inferiores, porque el coste mínimo es estrictamente creciente en la producción, $\sum_i p_i^z \, \partial z_i^c/\partial x = \mathrm{Cmg} > 0$. Con tecnología homotética, todas estas elasticidades son iguales entre sí y a la elasticidad-producto del coste, ε_{Cx} (apartado 1.4.4), porque la proporción entre factores no cambia con la escala.

Cambios en los precios de los factores: con el objetivo de producción dado, la combinación de mínimo coste cambia y las curvas de coste se desplazan.

- *Cambio en todos los precios*: como a corto plazo, las curvas se desplazan proporcionalmente y las demandas condicionadas no cambian.

- *Efecto sustitución*: si sube el precio del factor i, la recta isocoste gira y la tangencia se desplaza a lo largo de la isocuanta hacia combinaciones con menos factor i, ahora relativamente más caro. Su demanda condicionada no aumenta ni recoge efecto producción (apartado 1.4.2), y el coste mínimo sube con una elasticidad igual a la participación del factor en el coste. Estos efectos son los mismos que a corto plazo con contrato de arrendamiento y capacidad sin agotar.

- *Efectos cruzados*: son simétricos, $\partial z_i^c/\partial p_j^z = \partial z_j^c/\partial p_i^z$. Con dos factores, la homogeneidad de grado cero de las demandas condicionadas y el efecto propio no positivo hacen que el efecto cruzado sea no negativo (los factores son sustitutivos). Con más de dos, en cambio, puede haber factores complementarios, que la elasticidad de sustitución de Allen identifica.

- *Efectos sobre las curvas de coste* (los de la industria, en el tema A16, apartado 2.3.2): dependen de que el factor encarecido genere un coste fijo o variable.

- *Coste fijo* (en rigor, cuasifijo, es decir, independiente del volumen producido, como el alquiler de la planta): un aumento permanente desplaza hacia arriba la Cme_{LP}, más cuanto menor es la producción, y traslada su mínimo a la derecha.
- *Coste variable*: un aumento desplaza hacia arriba la Cme_{LP}, con un efecto indeterminado sobre la posición de su mínimo y, por ello, sobre la producción de cada empresa y el número de empresas.

Teorema de Le Châtelier-Samuelson (1947): en el plano (x, C) y en la producción para la que la planta es óptima, el coste marginal de corto plazo tiene más pendiente que el de largo. Por eso, en ese punto, la oferta a LP es más elástica que a corto plazo (CP), porque sin factores fijos la empresa se adapta mejor. La oferta es tanto más rígida cuantos más factores se mantengan fijos.

2.3. Muy largo plazo: progreso técnico y coste

Las mejoras tecnológicas desplazan las curvas de costes hacia abajo. Por ejemplo, sea una tecnología con rendimientos constantes a escala y progreso técnico neutral en el sentido de Hicks, $x = A(t)\, f(K, L)$. El coste total a largo plazo es:

$$\text{CT}_{\text{LP}}(x, t) = \frac{c(w, r)}{A(t)}\, x \qquad \text{Cme}_{\text{LP}}(t) = \text{Cmg}_{\text{LP}}(t) = \frac{c(w, r)}{A(t)}$$

donde $c(w, r)$ es el coste mínimo de obtener una unidad de $f(K, L)$ a los precios w y r (con rendimientos constantes no depende de la escala) y $A(t)$ el índice de progreso técnico. Como cada unidad de producto exige $1/A(t)$ unidades de $f(K, L)$, el coste medio cae con w y r dados al ritmo del progreso técnico, $g_{\text{Cme}} = -g_A$.

2.4. Extensiones neoclásicas

Frente a los rendimientos mixtos de los apartados anteriores, los casos polares de rendimientos a escala, con tecnología homogénea de grado h, para la que $c(\mathbf{p}^z, x) = x^{1/h} c(\mathbf{p}^z, 1)$, cambian el perfil del coste a largo plazo, y las economías externas lo trasladan.

> Las consecuencias de cada caso para el equilibrio competitivo a largo plazo (número de empresas y oferta de la industria) se desarrollan en el tema A16, apartados 3.1 y 3.2.

2.4.1. Rendimientos constantes

Con rendimientos constantes a escala en todo el rango (tema A11), la función de coste total a largo plazo es una recta por el origen, sin economías ni deseconomías de escala ($\varepsilon_{Cx} = 1$). Gráficamente, en el plano (x, C) (figura A12.5, panel a), el coste medio y el coste marginal son una misma recta horizontal, $\text{Cmg}(x) = \text{Cme}(x)$.

2.4.2. Rendimientos decrecientes

Con rendimientos decrecientes a escala en todo el rango, el coste total es convexo y creciente, y el coste medio y el marginal son crecientes, con el marginal siempre por encima del medio y deseconomías de escala ($\varepsilon_{Cx} > 1$).

2.4.3. Rendimientos crecientes

Con rendimientos crecientes a escala en todo el rango, el caso que Sraffa (1926) opuso a la forma de U de las curvas de coste, el coste total es cóncavo y el coste medio y el marginal son decrecientes. El medio queda siempre por encima del marginal, y existen economías de escala ($\varepsilon_{Cx} < 1$). Por ello, la regla $p = \text{Cmg}$ genera pérdidas y no cumple la condición de segundo orden del problema competitivo[16]. Los rendimientos crecientes son así incompatibles con la competencia perfecta y conducen al monopolio natural (tema A20).

La figura A12.5 compara los tres casos.

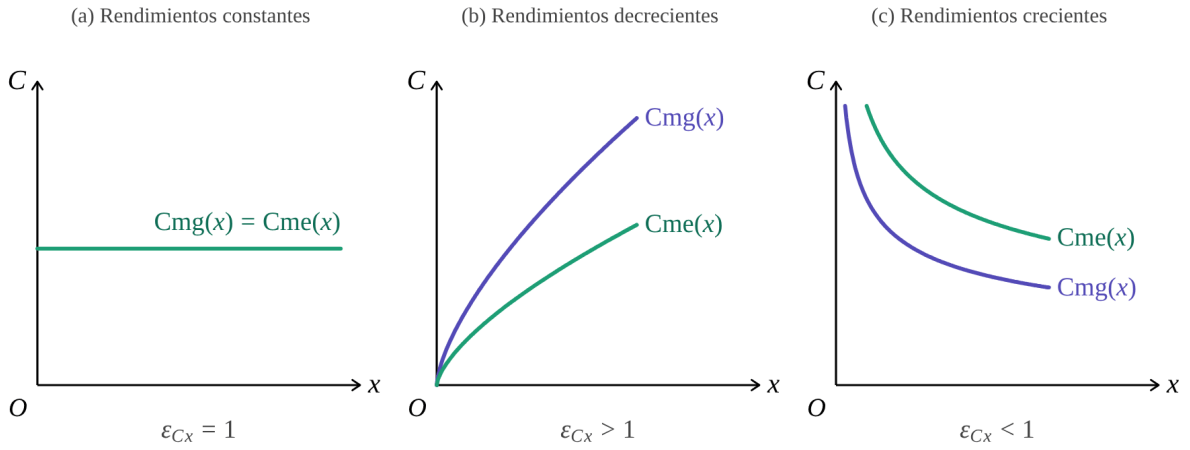


Figura A12.5: Curvas de costes a largo plazo con rendimientos constantes (panel a), decrecientes (panel b) y crecientes (panel c). El coste marginal es igual al medio, mayor o menor, respectivamente.

2.4.4. Economías y deseconomías de escala externas

Origen: Alfred Marshall (1890) introduce las economías externas a la empresa e internas a la industria (apartado 1.4.4), y Viner (1931) separa las pecuniarias de las tecnológicas[17].

Idea: el coste de cada empresa depende también de la producción de la industria, que la empresa toma como dada. Las economías internas se recorren a lo largo de la Cme_{LP} de la empresa, y las externas desplazan todas sus curvas, a corto y a largo plazo, sin quitarles la forma de U.

Razonamiento: al crecer la industria, las curvas de cada empresa se desplazan por dos vías:

- *Efecto pecuniario*: los precios de los factores suben si alguno es escaso (tierra, trabajo cualificado) o los proveedores ganan poder de negociación (deseconomías), y los precios bajan si los proveedores especializados explotan sus economías internas (economías). Si varían todos en igual proporción, el coste total, el medio y el marginal se desplazan en esa proporción y la dimensión óptima no cambia. Si varía uno solo, en cambio, el Cmg_{CP} se mueve únicamente cuando el factor es variable, y la posición del mínimo de la Cme_{LP} puede desplazarse en cualquier sentido.

[16] En el caso no competitivo sí puede cumplirse, porque la CSO solo exige que la pendiente del Cmg sea superior a la del Img (el Cmg corta al Img desde abajo), lo que es compatible con un Cmg decreciente.

[17] Solo las tecnológicas son externalidades en sentido estricto. Las pecuniarias se transmiten por los precios y, en competencia, redistribuyen renta entre empresas y propietarios de los factores sin causar ineficiencia.

▪ *Efecto tecnológico*: a precios de los factores dados, la congestión o la contaminación de un recurso común (deseconomías) exigen más factores por unidad de producto y elevan todas las curvas, y la difusión de conocimientos entre empresas próximas (economías) las rebaja, como un progreso técnico inducido por la escala de la industria.

Al entrar empresas, el mínimo de la Cme_{LP}, que fija el precio a largo plazo, sube con las deseconomías (industria de costes crecientes, con oferta a largo plazo creciente) y baja con las economías (costes y oferta decrecientes), como desarrolla el tema A16, apartado 3.2.

Extensiones: las economías externas fundamentan la protección de la industria naciente (tema B07) y la promoción de clústeres.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: la distinción de Marshall hace depender los costes de cada empresa del tamaño de la industria sin renunciar a curvas en U.

▪ *Limitaciones*: las economías externas son difíciles de medir y de separar de las internas, y Sraffa (1926) las consideró poco frecuentes.

2.5. Conclusiones

Con rendimientos mixtos, las curvas unitarias tienen forma de U, los costes a CP nunca son inferiores a los de LP y existe una dimensión óptima de planta en el mínimo de Cme_{LP}. Sin embargo, Sraffa (1926) señaló la incoherencia lógica del esquema con el equilibrio parcial en competencia perfecta, porque los rendimientos decrecientes suelen deberse a factores escasos que afectan también a otras industrias. Por su parte, las economías de escala internas, que no necesariamente se agotan, solo son compatibles con la competencia imperfecta, en la que la demanda, y no el coste, limita el tamaño de la empresa. La respuesta vino de Chamberlin (1933) y Robinson (1933), con la competencia monopolística e imperfecta y el teorema del exceso de capacidad.

3. Desarrollos posteriores

Los desarrollos posteriores a la teoría neoclásica se agrupan en cuatro bloques: las críticas a la forma de U y al supuesto de minimización, la relación del coste con la empresa y la estructura del mercado, la dimensión temporal del coste y las aplicaciones empíricas.

3.1. Críticas a la curva de costes neoclásica

Las dos críticas siguientes se dirigen a la forma de U de las curvas de coste a largo plazo (Stigler) y al supuesto de que la empresa minimiza el coste (Leibenstein).

3.1.1. Stigler (1939): reserva de capacidad y dimensión óptima como horquilla

Origen: George Stigler (1939) cuestiona la existencia de una dimensión óptima de planta única y postula que la empresa mantiene un margen de flexibilidad ante eventualidades, la *reserva de capacidad*, por dos motivos:

1. *Razones económicas*: responder a imprevistos, como las oscilaciones cíclicas y estacionales de la demanda.

2. *Razones técnicas*: desde las indivisibilidades del proceso productivo hasta el margen que conviene dejar para ampliar edificios y plantas.

Idea: la reserva de capacidad altera las curvas de costes a corto y a largo plazo.

Razonamiento: en el análisis de corto plazo, la CVme_{CP} tiene forma de U ampliada o "bañera" con tres tramos, que, al estar dada la planta, reflejan la productividad del factor variable y no economías o deseconomías de escala:

1. *Productividad media creciente del factor variable y exceso de capacidad* (elasticidad-producto del coste variable, $\varepsilon_{\text{CV}x} = \text{Cmg}_{\text{CP}}/\text{CVme}_{\text{CP}} < 1$): un primer tramo en el que el CVme_{CP}, mayor que el Cmg_{CP}, tiene pendiente negativa en el plano (x, C)[18]. En él aún no se ha alcanzado la reserva de capacidad.

2. *Productividad media constante y reserva de capacidad* ($\varepsilon_{\text{CV}x} = 1$): un segundo tramo en el que el CVme_{CP} y el Cmg_{CP} coinciden y son horizontales (las productividades media y marginal del factor variable son iguales y constantes). Este tramo es la zona de uso normal de la planta, y su extensión se fija mediante el *factor de carga de planta* o *coeficiente de aprovechamiento*, cociente entre la producción efectiva y la que se lograría a plena capacidad.

3. *Productividad media decreciente y sobrecarga*: un tercer tramo en el que el CVme_{CP} es menor que el Cmg_{CP} ($\varepsilon_{\text{CV}x} > 1$) y ya no queda capacidad ociosa, porque el factor fijo está plenamente utilizado.

La Cme_{CP}, suma del CVme_{CP} y del coste fijo medio, tiene forma de U ampliada y, por la dilución del coste fijo, sigue decreciendo a lo largo del tramo horizontal del CVme_{CP}.

Gráficamente, en el plano (x, C_{CP}) (figura A12.6), la $\text{CVme}_{\text{CP}}(x)$ tiene forma de bañera, y el coste marginal queda por debajo del variable medio mientras este decrece y por encima cuando crece. Las dos curvas solo coinciden en el tramo horizontal, de ratio K/L constante.

[18] Un CVme_{CP} decreciente refleja una productividad media del factor variable creciente ($\text{CVme} = w/\text{Pme}_L$).

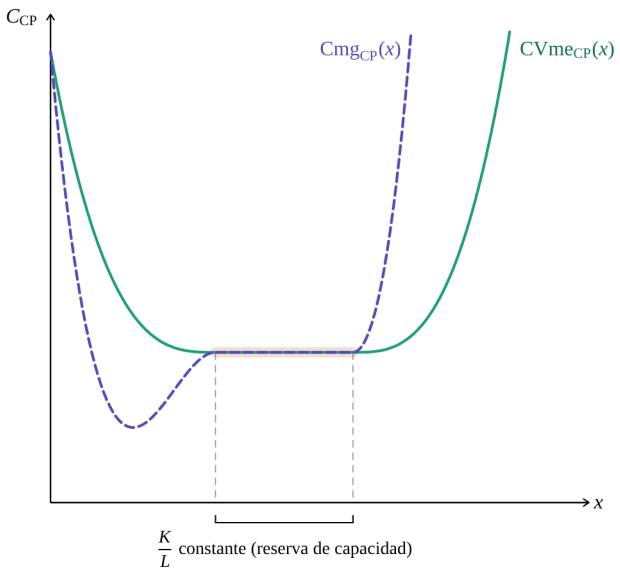


Figura A12.6: Costes a corto plazo con reserva de capacidad (Stigler, 1939). El CVme tiene forma de bañera y coincide con el Cmg en un tramo horizontal (K/L constante).

Las mismas razones pesan sobre los costes a largo plazo, por lo que el Cme_{LP} deja de ser la envolvente de las Cme_{CP} y pierde su mínimo único. La teoría moderna de costes distingue en el coste medio dos componentes:

- *Costes de producción*: caen de forma continua con el *output*.

- *Costes administrativos*: se reducen hasta que la planta alcanza cierta dimensión y, en las muy grandes, pueden repuntar, aunque con mucha lentitud, porque la gestión dispone de técnicas adaptadas a cada nivel de producción.

La Cme_{LP} une los costes unitarios de las distintas plantas cuando operan al grado de utilización habitual que fija el coeficiente de aprovechamiento. Caben dos perfiles de esa curva. En primer lugar, si las economías de escala nunca se agotan, la curva no deja de bajar al crecer la escala. En segundo lugar, si se agotan, como sostiene Joe Bain, la curva baja hasta la *escala mínima eficiente* (EME, o dimensión óptima mínima) y a partir de ahí se mantiene plana, con infinitos puntos de coste mínimo. Gráficamente, en el plano (x, C_{LP}) (figura A12.7), el primer perfil da una $\text{Cme}_{\text{LP}}(x)$ en forma de L, y la $\text{Cmg}_{\text{LP}}(x)$, inferior al coste medio mientras este decrece, converge a ella desde abajo.

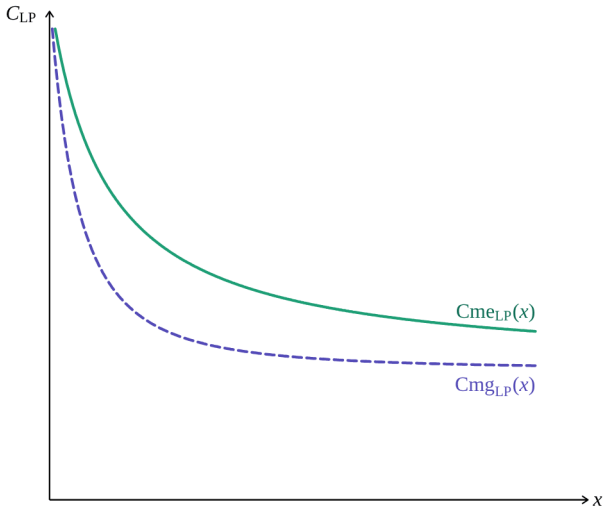


Figura A12.7: Costes a largo plazo (Stigler, 1939). Si las economías de escala no se agotan, el Cme tiene forma de L y el Cmg converge a él desde abajo, sin un mínimo único.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: las curvas de costes observadas se parecen más a estas formas que a la U de la teoría tradicional, y la reserva de capacidad es una decisión optimizadora de la empresa (eficiencia dinámica), no una ineficiencia del mercado.

▪ *Limitaciones*: sin un mínimo único, la dimensión de la empresa queda indeterminada dentro del tramo horizontal, y con ella el número de empresas que caben en el mercado.

3.1.2. Leibenstein (1966): ineficiencia-X

> La hipótesis de la ineficiencia-X se recoge también en el tema A15, apartado 1.1.2, como parte del enfoque gerencial de la empresa.

Origen: Harvey Leibenstein (1966) cuestiona que la empresa produzca al mínimo coste.

Idea: si los agentes no están plenamente informados, los contratos no lo prevén todo, el trabajo resulta penoso y la competencia es imperfecta, unos mismos *inputs* pueden dar lugar a *outputs* distintos.

Razonamiento: cuando ni la competencia ni la supervisión los presionan, los trabajadores se esfuerzan menos de lo que podrían y se pierden recursos. Esa pérdida, la *ineficiencia-X*, aumenta cuanto más débil es la competencia.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: explica por qué empresas con la misma tecnología y los mismos precios de los factores pueden operar con costes distintos. Además, a la pérdida de eficiencia asignativa del monopolio añade una pérdida en costes, lo que refuerza el argumento a favor de la competencia (tema A17).

- *Limitaciones*: se ha objetado que, si el control se lleva hasta que su coste marginal iguala su beneficio marginal, esa ineficiencia-X no existiría.

3.2. Coste, empresa y estructura de mercado

Las aportaciones siguientes relacionan la función de costes con la naturaleza de la empresa (qué transacciones se organizan dentro de ella) y con la estructura del mercado (cuántas empresas puede sostener y si la competencia potencial puede disciplinarlas).

3.2.1. Coase (1937) y Williamson (1975): costes de transacción

> La empresa como estructura de contratos y los costes de transacción se desarrollan, con su representación gráfica, en el tema A15, apartado 1.2.3.

Origen: Ronald Coase (1937) concibe la empresa como estructura de contratos y explica su existencia porque recurrir al mercado tiene *costes de transacción*, que Oliver Williamson (1975) vincula a la racionalidad limitada y al oportunismo y, en trabajos posteriores, a la especificidad de los activos.

Idea: la empresa compara costes de organización interna, crecientes con la dimensión por las deseconomías gerenciales, con los de acudir al mercado, decrecientes con ella.

Razonamiento: la dimensión óptima minimiza la suma de ambos costes y se alcanza cuando el coste marginal de organizar internamente una transacción adicional iguala el de realizarla en el mercado.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica los límites de la empresa y fundamenta el análisis de la integración vertical y de las estructuras de gobierno.

- *Limitaciones*: el concepto de coste de transacción es amplio y poco preciso, lo que dificulta su medición y expone la teoría a explicar *a posteriori* cualquier frontera de la empresa.

3.2.2. Subaditividad de costes (Baumol, Panzar y Willig, 1982)

Origen: la teoría neoclásica identificaba el monopolio natural con las economías de escala. Sin embargo, William Baumol, John Panzar y Robert Willig mostraron que, en el caso monoproducto, las economías de escala son suficientes pero no necesarias y, en el multiproducto, ni siquiera suficientes, y propusieron como condición exacta la subaditividad.

Idea: una función de costes es *subaditiva* en un nivel de producción x cuando ningún reparto de x entre varias empresas de igual tecnología resulta más barato que dejar toda la producción a una sola:

$$\mathrm{CT}(x) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{CT}(x_i) \quad \text{para todo } k \geq 2 \text{ y todo } (x_1, \ldots, x_k) \text{ con } \sum_i x_i = x$$

La subaditividad es estricta si la desigualdad es estricta para todo reparto no trivial, en cuyo caso la empresa única es la única estructura eficiente, y débil si algún reparto puede igualar el

coste de la empresa única. Un mercado es un *monopolio natural* en x si su función de costes es estrictamente subaditiva en x.

En el caso multiproducto la definición es la misma con vectores de *outputs*, $\mathrm{CT}(\mathbf{x}) < \sum_i \mathrm{CT}(\mathbf{x}_i)$ con $\sum_i \mathbf{x}_i = \mathbf{x}$, y la subaditividad recoge entonces tanto las economías de escala como las economías de alcance.

Razonamiento: la relación entre subaditividad y economías de escala es de implicación en un solo sentido:

1. *Economías de escala implican subaditividad.* Si el coste medio es decreciente hasta x ($\mathrm{Cme}(x') < \mathrm{Cme}(x'')$ para $x'' < x' \leq x$), entonces $\mathrm{CT}(x) = x \cdot \mathrm{Cme}(x) < \sum_i x_i \cdot \mathrm{Cme}(x_i) = \sum_i \mathrm{CT}(x_i)$, porque cada $x_i < x$ tiene un coste medio mayor.

2. *Subaditividad no implica economías de escala.* La función de costes puede ser subaditiva en x aunque el coste medio ya sea creciente en x, si la escala mínima eficiente es grande respecto al mercado. Repartir x entre dos empresas las situaría muy por debajo de su escala eficiente, con un coste medio mayor que el de la empresa única, aunque esta esté ya en el tramo de deseconomías. La subaditividad es una propiedad global (depende de toda la función de costes hasta x y del tamaño del mercado), mientras que las economías de escala son una propiedad local (la pendiente de $\mathrm{Cme}(x)$ en un punto).

3. *Condición general: no convexidad.* Lo que la subaditividad estricta exige como condición necesaria es alguna no convexidad de la función de costes en el rango relevante (costes fijos o hundidos, indivisibilidades o economías de alcance). Sin ninguna de ellas, con una función de costes convexa y $\mathrm{CT}(0) = 0$, la función es superaditiva ($\mathrm{CT}(x) \geq \sum_i \mathrm{CT}(x_i)$) y la producción se reparte eficientemente entre muchas empresas.

Gráficamente, en el plano (x, Cme) (figura A12.8), el segundo caso se representa con dos curvas y su punto de corte:

1. *Coste medio de una sola empresa*, $\mathrm{Cme}_1(x)$: tiene forma de U con mínimo en x_{EME}, y a su izquierda hay economías de escala.

2. *Coste medio de dos empresas que se reparten x a partes iguales*, $\mathrm{Cme}_{1+2}(x)$: queda por encima de $\mathrm{Cme}_1(x)$ hasta $\bar{x}$, porque cada empresa produce $x/2$, por debajo de su escala eficiente.

3. *Punto de corte*: se sitúa en $\bar{x}$, y hasta él la función de costes es subaditiva, aunque entre x_{EME} y $\bar{x}$ la empresa única esté ya en el tramo de deseconomías.

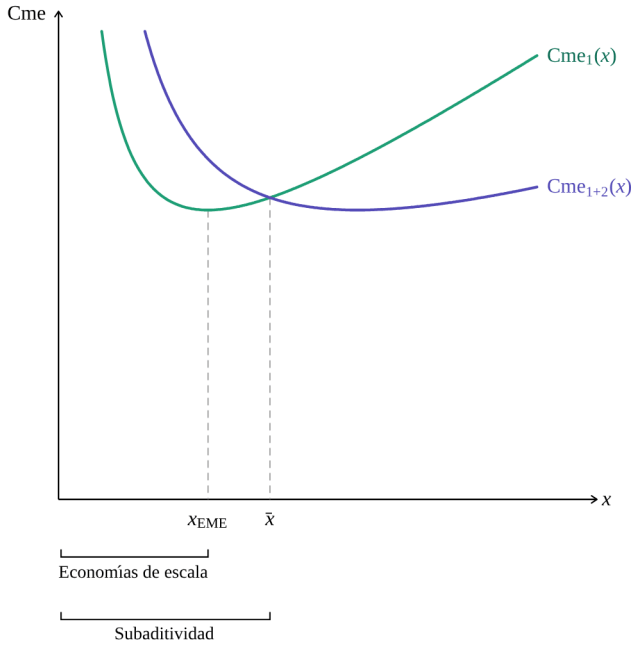


Figura A12.8: Subaditividad de costes (Baumol-Panzar-Willig). Una única empresa produce la cantidad total a menor coste que dos o más, incluso con tramos de costes medios crecientes.

Extensiones: las dos consecuencias de la subaditividad organizan la política de competencia y la regulación:

- *Importancia del tamaño eficiente*: la prueba relevante no es la pendiente de Cme(x), sino el tamaño de la escala eficiente respecto al mercado[19].

- *Regulación óptima*: con subaditividad estricta, la competencia en el mercado es ineficiente en costes, y la cuestión pasa a ser cómo regular al monopolista o hacer el mercado impugnable (temas A15, A17 y A20).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: define el monopolio natural con una condición exacta, válida también para la empresa multiproducto, y da a la teoría de la regulación un criterio riguroso.

- *Limitaciones*: al ser una propiedad global, comprobarla exige conocer el coste de repartos de la producción que no se observan, lo que la hace difícil de contrastar empíricamente.

3.2.3. Economías de alcance (Panzar y Willig, 1977; 1981)

Origen: la teoría neoclásica de costes, monoproducto, no explica por qué las empresas fabrican varios productos. John Panzar y Robert Willig extendieron el análisis a la empresa multiproducto.

[19] Explica por qué antes había más monopolios naturales, ya que conforme crece la demanda (comercio internacional), la EME se hace menor en relación con el mercado.

Idea: existen *economías de alcance* (de gama o de variedad, *economies of scope*) cuando producir conjuntamente dos o más bienes en una misma empresa cuesta menos que producirlos por separado en empresas especializadas, y la eficiencia proviene de la variedad, no del volumen.

Razonamiento: estas economías nacen, entre otros motivos, de que unos productos dependan técnicamente de otros (docencia e investigación, lana y carne) y de factores que solo pueden comprarse en unidades indivisibles. Nacen también de *inputs* públicos internos (una marca, una red, una base de datos), que una vez disponibles atienden a todos los productos sin coste añadido, y de compartir la organización, la red comercial o la logística.

La condición y el grado de las economías de alcance se formalizan como sigue:

- *Condición*: para dos productos, existen economías de alcance en el vector (x_1, x_2) si

$$\mathrm{CT}(x_1, x_2) < \mathrm{CT}(x_1, 0) + \mathrm{CT}(0, x_2)$$

es decir, si la función de costes es subaditiva respecto de la separación por productos en empresas especializadas (la desigualdad de la subaditividad aplicada a *outputs* distintos). Con n productos, la condición se exige para cualquier partición del vector de *outputs* en subconjuntos producidos por empresas distintas.

- *Grado*: su magnitud se mide con el *grado de economías de alcance*,

$$S_C = \frac{\mathrm{CT}(x_1, 0) + \mathrm{CT}(0, x_2) - \mathrm{CT}(x_1, x_2)}{\mathrm{CT}(x_1, x_2)}$$

que es el ahorro de coste de la producción conjunta expresado como proporción del coste conjunto. Así, $S_C = 0{,}25$ significa que producir por separado costaría un 25 % más. Su signo equivale a la condición ($S_C < 0$ indica deseconomías de alcance, cuando la producción conjunta genera congestión o costes de coordinación).

- *Relación con las economías de escala*: ninguna de las dos implica la otra. Producir juntos varios bienes puede no aportar nada a una empresa con economías de escala en cada uno, y puede abaratar la producción de otra cuyos costes medios crecen en todos ellos.

- *Relación con la subaditividad*: las economías de alcance son condición necesaria de subaditividad en el caso multiproducto (si separar productos abaratase, la empresa única no sería la estructura de menor coste), pero no suficiente. El resultado de Baumol, Panzar y Willig (1982) es que economías de alcance junto con costes incrementales medios decrecientes en cada producto implican subaditividad. Una condición más fácil de comprobar parte de la *complementariedad de costes*,

$$\frac{\partial^2 \mathrm{CT}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \, \partial x_2} < 0$$

es decir, que aumentar la producción de un bien reduzca el coste marginal del otro. Si se cumple para todos los niveles de *output*, implica economías de alcance y, si además hay costes fijos comunes y el coste marginal de cada bien no crece con su propia producción, subaditividad global.

Extensiones: junto con la subaditividad, las economías de alcance son el criterio con el que se juzga la estructura de una industria regulada. Así, si S_C es alto, separar actividades (una red y sus servicios, la generación y la distribución) destruye eficiencia, y si es bajo o negativo, la separación es la vía para introducir competencia (tema A20).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: extiende la teoría de costes a la empresa multiproducto, explica la diversificación por la variedad y no solo por el volumen, y ofrece en S_C una medida con la que juzgar la estructura de las industrias reguladas.

- *Limitaciones*: medir las economías de alcance exige estimar el coste de empresas especializadas que a menudo no existen en la muestra. Además, por sí solas no explican la empresa multiproducto, pues el factor común podría compartirse mediante contratos entre empresas especializadas. Que se haga dentro de una misma empresa remite a los costes de transacción (tema A15).

3.2.4. Costes hundidos (Baumol, Panzar y Willig, 1982)

Origen: Baumol, Panzar y Willig (1982) sistematizaron la distinción entre costes fijos y costes hundidos en la teoría de los mercados impugnables, para la que resulta decisiva, porque la teoría tradicional trataba ambos como "costes fijos", pero solo los hundidos condicionan la entrada.

Idea: un coste es *hundido* (*sunk cost*) cuando, una vez incurrido, no puede recuperarse si la empresa abandona la actividad, como ocurre con las inversiones específicas sin uso ni valor de reventa alternativos (una vía férrea, una campaña publicitaria, la I+D). Se distingue del coste fijo recuperable, que no varía con la producción pero sí se recupera al salir (un local que puede revenderse o subarrendarse). En la función de costes, $\mathrm{CT}_t = S + \mathrm{CF}_t + \mathrm{CV}(x_t)$, donde S es el coste hundido, CF_t el fijo recuperable y $\mathrm{CV}(x_t)$ el variable. A efectos de decisión, S es irrelevante una vez incurrido (*bygones are bygones*), pero es determinante antes de incurrir en él.

Razonamiento: la irreversibilidad tiene efectos distintos según el momento. Antes de entrar, el coste hundido, riesgo que asume el entrante, actúa como *barrera a la entrada*. Después de entrar, actúa como *barrera de salida*, porque la instalada sigue produciendo mientras cubra el coste evitable (tema A15, apartado 2.2.1). Además, el coste hundido convierte en creíble el compromiso de permanecer y de luchar, que es la lógica de la inversión en capacidad como disuasión de la entrada (tema A14).

Por ello, los costes hundidos son el concepto que separa el monopolio natural de la impugnabilidad. Un mercado con subaditividad de costes pero sin costes hundidos puede disciplinarse mediante la competencia potencial (entrada y salida sin coste). Con costes hundidos, en cambio, la amenaza de entrada pierde fuerza y la regulación recupera su papel (temas A15 y A20).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: precisa qué costes condicionan de verdad la entrada y la salida, y reúne en un concepto la barrera a la entrada, el compromiso creíble y la frontera entre monopolio natural e impugnabilidad.

- *Limitaciones*: la parte hundida de un coste depende del horizonte temporal y de la existencia de mercados de segunda mano, por lo que la distinción es de grado y difícil de medir.

3.3. Coste y tiempo

Las dos aportaciones siguientes estudian cómo evolucionan los costes con la producción acumulada y con la velocidad a la que la empresa altera sus factores.

3.3.1. Economías de aprendizaje (Wright, 1936; Henderson, 1968)

Origen: Theodore P. Wright (1936) observó en la industria aeronáutica que el número de horas de trabajo por avión caía de forma regular a medida que se acumulaba la producción. Bruce Henderson y el Boston Consulting Group (1968) generalizaron la observación a cualquier industria bajo el nombre de *curva de experiencia*, y la convirtieron en un instrumento de estrategia empresarial[20].

Idea: las *economías de aprendizaje*, también llamadas *economías de escala dinámicas*, son caídas del coste medio ligadas a la producción acumulada, no al volumen de cada periodo[21].

Razonamiento: con la práctica, los trabajadores ganan velocidad, la dirección acierta más y los procesos se depuran. Formalmente, $\text{Cme}_t = a \cdot (x_t^{\text{ac}})^{-b}$, donde x_t^{ac} es la producción acumulada y $b > 0$ la elasticidad de aprendizaje. Cada vez que se duplica la producción acumulada, el coste medio cae en la proporción $1 - 2^{-b}$ (la tasa de aprendizaje).

Producir hoy tiene así un valor adicional al beneficio presente, porque reduce los costes futuros. Por eso la empresa produce por encima del nivel que igualaría ingreso marginal y coste marginal actuales. El primero en entrar obtiene, además, una ventaja acumulativa, porque con más producción acumulada tiene menores costes, puede fijar precios más bajos, vende más y aprende más deprisa.

Extensiones: el concepto tiene tres aplicaciones principales:

- *Organización industrial*: explica los precios de penetración y las barreras a la entrada basadas en la experiencia (tema A15).

- *Crecimiento endógeno*: el aprendizaje por la práctica de Arrow (1962) es una de las primeras fuentes de rendimientos crecientes del crecimiento endógeno (tema A44).

- *Comercio internacional*: fundamenta el argumento de la industria naciente (tema B07).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: incorpora a la teoría de costes una regularidad empírica bien documentada y explica conductas que el análisis estático no recoge.

- *Limitaciones*: es una relación empírica más que una teoría, pues no explica de qué depende la tasa de aprendizaje, y en los datos cuesta separar el aprendizaje de las economías de escala estáticas y del progreso técnico.

3.3.2. Costes de ajuste (Eisner y Strotz, 1963; Lucas, 1967)

Origen: Robert Eisner y Robert Strotz (1963) introdujeron los *costes de ajuste internos*, que Lucas (1967) formalizó, y la literatura posterior añadió los *costes de ajuste externos*.

Idea: los costes de ajuste son los que soporta la empresa al alterar la velocidad a la que incorpora los factores al proceso productivo, $\psi(\Delta L_t, I_t)$, y suelen ser (aunque no siempre) tanto mayores cuanto mayor es esa velocidad[22].

Razonamiento: los costes de ajuste pueden ser de dos tipos:

[20] Ley de Henderson.

[21] Requerimiento de trabajo por unidad de producto en función de la producción acumulada: $L_t = a_0 + a_1 \cdot (x_t^{\text{ac}})^{-b}$, donde $b > 0$ mide la capacidad de aprendizaje.

[22] Internos: el ritmo acelera las mermas. Externos: la empresa paga precios crecientes a suministradores.

1. *Internos*: pérdidas temporales de eficiencia dentro de la propia empresa mientras incorpora los nuevos factores. Son difíciles de medir y, generalmente, implícitos en términos contables, como las mermas de producción derivadas del reemplazo de máquinas antiguas por nuevas y el menor rendimiento de los trabajadores en formación[23].

2. *Externos*: asociados a la interacción entre la empresa y agentes externos a ella. Son más fáciles de medir y suelen ser explícitos en términos contables[24], como los honorarios de consultores para instalar las máquinas o los costes de rotación, indemnizaciones por despido y costes de selección de personal.

En ambos casos se modelan con una *función de costes de ajuste*, $\psi(\Delta z)$, donde Δz es la variación del factor. Esta función puede adoptar distintas formas:

- *Convexa y simétrica*: $\psi(\Delta z) = \frac{\gamma}{2}(\Delta z)^2$, con ajuste gradual.

- *Convexa y asimétrica*: $\gamma_h \neq \gamma_f$ (coeficientes de contratación y de despido), p. ej. despido más caro que contratación.

- *Lineal*: $\psi(\Delta z) = \gamma \cdot |\Delta z|$, y el ajuste puede ser inmediato.

- *Fija*: $\psi = \bar{\psi}$ si $\Delta z \neq 0$, p. ej. el coste de un expediente de regulación de empleo (ERE) independiente del número de trabajadores.

En general, la función de costes de ajuste se considera no lineal, no negativa (la desinversión también tiene costes de ajuste), creciente en la magnitud del ajuste ($\psi'(\Delta z) \cdot \Delta z > 0$ para $\Delta z \neq 0$) y convexa ($\psi'' > 0$), con $\psi(0) = 0$. De esta especificación se siguen dos corolarios:

- *Costes fijos y variables*: los factores variables y fijos de la teoría tradicional corresponden a los casos polares de los costes de ajuste, nulos (factor variable) o infinitos (factor fijo).

- *Estabilización*: el ajuste del empleo o del capital se reparte entre varios periodos en lugar de hacerse de una vez. Sus variaciones son menores que sin costes de ajuste, y más pequeñas cuanto mayores son esos costes, aunque se pierda eficiencia.

Desarrollo gráfico: en el plano $(\Delta z, \psi)$ (figura A12.9), el eje horizontal mide la variación del factor, positiva si la empresa lo aumenta y negativa si lo reduce, y el eje vertical, el coste de ajuste. Cada panel representa una de las cuatro formas de la función:

1. *Convexa y simétrica* (panel a): la función es una parábola con el mínimo en el origen. Como el coste de cada unidad adicional de ajuste crece con el tamaño del ajuste, a la empresa le conviene repartirlo en el tiempo.

2. *Convexa y asimétrica* (panel b): en el caso representado, la rama izquierda es más inclinada que la derecha, porque reducir el factor cuesta más que aumentarlo en la misma cuantía. Por ello, la empresa ajusta más despacio a la baja que al alza.

3. *Lineal* (panel c): la función tiene forma de V, con el vértice en el origen. Como cada unidad de ajuste cuesta lo mismo, repartir el ajuste no ahorra nada. La empresa no ajusta si la perturbación es pequeña y, si es grande, ajusta de inmediato, pero solo hasta que la ganancia de la última unidad ajustada iguala su coste, γ.

[23] Coste implícito de la formación (producción perdida durante el aprendizaje), no el explícito (cursos pagados).
[24] Se producen cuando la oferta del factor es creciente o cuando algo hace que el precio se ajuste.

4. *Fija* (panel d): la función salta de cero a $\bar{\psi}$ en cuanto hay ajuste y es horizontal a partir de ahí. La empresa no ajusta ante perturbaciones pequeñas y, cuando lo hace, ajusta de una vez y por completo, porque el coste no depende de la cuantía.

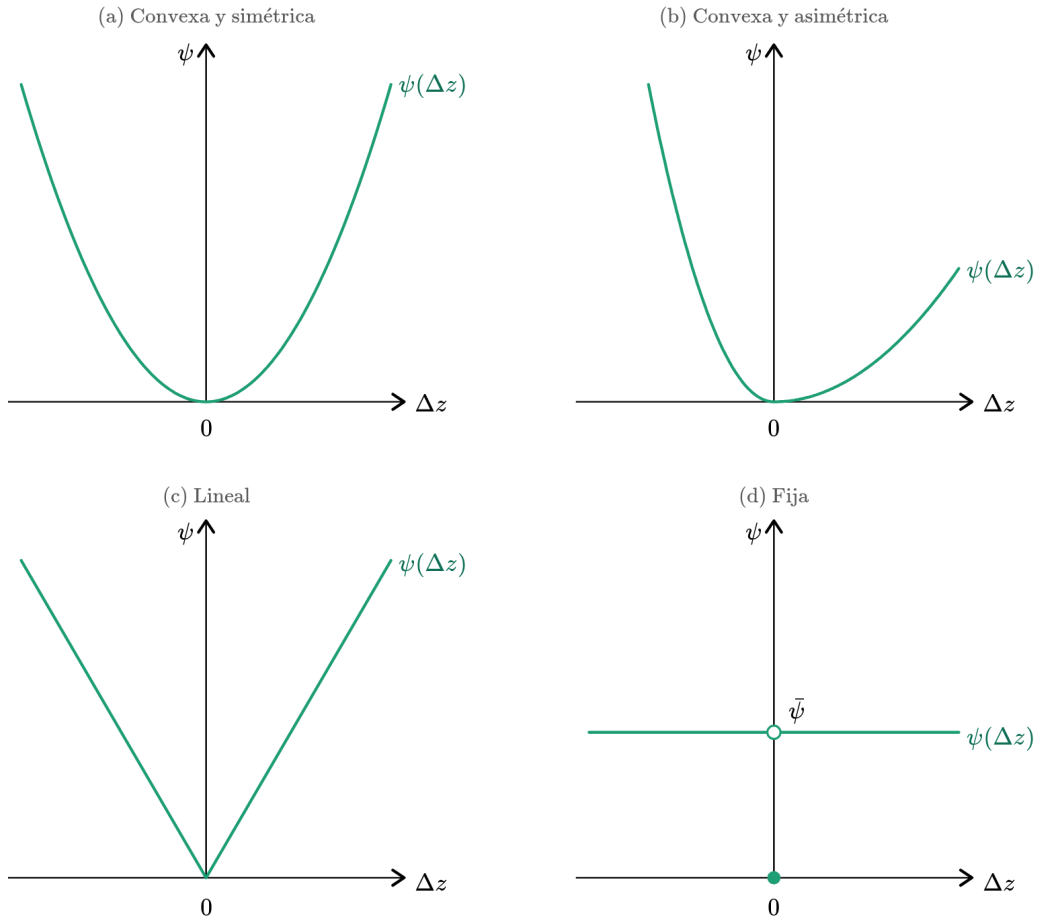


Figura A12.9: Formas de la función de costes de ajuste. En el plano $(\Delta z, \psi)$, la función es convexa y simétrica (panel a), convexa y asimétrica, con un coste mayor al reducir el factor que al aumentarlo (panel b), lineal (panel c) y fija, con un coste $\bar{\psi}$ para cualquier ajuste no nulo (panel d).

Extensiones: los costes de ajuste son la base de los modelos de inversión, con la teoría q (tema A34, apartados 2.2 y 2.3), y de los de demanda de trabajo con ajuste dinámico (tema A26).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica el ajuste gradual del empleo y del capital, generaliza la distinción tradicional entre factores fijos y variables y da fundamento microeconómico a la teoría q de la inversión.

- *Limitaciones*: la forma convexa y simétrica suele elegirse por tratabilidad, y la evidencia de ajustes a saltos, con periodos de inactividad, apunta más bien a costes fijos o lineales y a irreversibilidades.

3.4. Aplicaciones empíricas

La forma de las curvas de coste es, en último término, una cuestión empírica, y de ella dependen el número de empresas que caben en un mercado, la existencia de monopolios naturales y el diseño de la regulación. La dualidad del apartado 1.4 permite estimarla a partir de la función de costes, y los métodos de frontera miden, además, cuánto se aleja cada empresa del coste mínimo.

> La medición de la eficiencia (Farrell, 1957) y los dos métodos que estiman una frontera, el análisis envolvente de datos (DEA) y el análisis de fronteras estocásticas (SFA), se desarrollan en el tema A11, apartado 3.2. Allí la frontera es la función de producción, y aquí, la función de costes.

3.4.1. La función de costes estimada (Nerlove, 1963)

Origen: Marc Nerlove (1963) fue pionero en estimar una función de costes deducida por dualidad, con los precios de los factores como variables explicativas, para medir los rendimientos a escala de una industria sin estimar su función de producción. Usó datos de 145 empresas eléctricas de EE. UU. en 1955. Christensen, Jorgenson y Lau (1973) propusieron después la forma translogarítmica (translog), que Christensen y Greene (1976) aplicaron a la misma industria.

Idea: si la empresa minimiza costes, la función de costes resume toda la información relevante de la tecnología (apartado 1.4.4). Además, en una industria regulada como la eléctrica, obligada a atender la demanda a las tarifas fijadas, la producción y los precios de los factores son exógenos para la empresa, y la variable que se explica es el coste. Con una tecnología Cobb-Douglas homogénea de grado h, el coeficiente de $\ln x$ en la función de costes, $1/h$, es la inversa del grado de rendimientos a escala.

Razonamiento: con toda la muestra, Nerlove obtuvo rendimientos crecientes, pero por grupos de tamaño los rendimientos caían con la escala, de modo que la Cobb-Douglas, que impone el mismo grado a cualquier escala, era demasiado rígida. En cambio, la translog deja libres los rendimientos y las elasticidades de sustitución (especificación en el Anexo, apartado A.2). Con ella, Christensen y Greene (1976) hallaron que en 1970 el grueso de la electricidad lo generaban empresas situadas en el tramo prácticamente horizontal de la curva de coste medio.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la dualidad permite estimar la tecnología a partir de la función de costes, con variables explicativas exógenas en las industrias reguladas, y la translog no impone los rendimientos a escala ni las elasticidades de sustitución.

- *Limitaciones*: el método supone que todas las empresas minimizan el coste, de modo que atribuye al azar cualquier desviación respecto a la función estimada, y descansa en la exogeneidad del *output* y de los precios, discutible fuera de las industrias reguladas. Además, la translog es una aproximación local, que lejos del punto de aproximación puede incumplir la concavidad en precios.

3.4.2. Fronteras de costes: SFA y DEA

Idea: las fronteras de costes abandonan el supuesto de que todas las empresas minimizan el coste. La función de costes pasa a ser una frontera, el coste mínimo de cada nivel de producción,

y cada empresa puede quedar por encima de ella. La distancia a la frontera es la eficiencia económica de Farrell, es decir, el cociente entre el coste mínimo y el observado, que reúne la eficiencia técnica y la asignativa y mide la ineficiencia-X.

Razonamiento: se distinguen dos métodos para obtener la frontera:

- *Frontera estocástica de costes* (Schmidt y Lovell, 1979): añade a la función de costes estimada, Cobb-Douglas o translog, el error compuesto del SFA:

$$\ln C_i = \ln c(\mathbf{p}_i^z, x_i; \beta) + v_i + u_i$$

donde C_i es el coste observado de la empresa i, v_i un ruido simétrico y $u_i \geq 0$ la ineficiencia, que ahora suma porque encarece. La eficiencia en costes de cada empresa es $\exp(-u_i)$.

- *DEA de costes*: calcula con un programa lineal, para cada empresa, el coste mínimo de obtener su producción a los precios que paga por los factores, con la tecnología que envuelve a las empresas observadas. El cociente entre ese coste mínimo y el observado es su eficiencia en costes, que, dividida por la eficiencia técnica, da la asignativa.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: miden cuánto coste podría ahorrar cada empresa, distinguen la que es cara por su escala de la que lo es por su gestión y sirven de base a la regulación por comparación (tema A20, apartado 2.3.2).

- *Limitaciones*: heredan las de cada método, es decir, la forma funcional y la distribución de la ineficiencia en el SFA y el carácter determinista del DEA. Además, exigen precios de los factores comparables entre empresas, y los dos métodos no siempre ordenan igual a las mismas empresas (Berger y Humphrey, 1997).

3.4.3. Evidencia y problemas de medición

Estos métodos apuntan a una misma regularidad. En la mayoría de las industrias, el coste medio a largo plazo cae con fuerza en las escalas pequeñas y se vuelve prácticamente horizontal a partir de cierto tamaño, sin un tramo creciente claro. Tiene, en el plano (x, C), forma de L más que de U, como en el análisis de largo plazo de Stigler (figura A12.7). La escala mínima eficiente suele ser pequeña respecto al mercado, de modo que caben en él muchas empresas eficientes. Las excepciones son las industrias de red y de grandes costes fijos, en las que la escala mínima eficiente es grande respecto a la demanda y puede haber monopolio natural.

A la misma forma apuntaban ya los métodos anteriores a la estimación econométrica, que eran el cálculo, con datos de ingeniería, del coste de plantas hipotéticas (Bain, 1956) y la técnica del superviviente (Stigler, 1958b), que observa qué tamaños de empresa ganan cuota con el tiempo.

Las estimaciones exigen, con todo, cautela:

- *Falacia de la regresión* (Friedman, 1955): en un corte transversal las empresas se clasifican por su producción observada, que incluye desviaciones transitorias respecto a la planeada. Las que producen por encima de lo normal muestran costes medios bajos, y las que producen por debajo, altos, de modo que la curva estimada parece decreciente aunque no haya economías de escala.

- *Corto y largo plazo*: cada observación es un punto de la curva a corto plazo de la planta existente, y ese punto solo pertenece a la envolvente a largo plazo (apartado 2.2) si la planta está ajustada a esa producción.

- *Datos y heterogeneidad*: los costes contables omiten el coste de oportunidad del capital propio (apartado 1.1.1), y las diferencias de calidad, de tecnología o de gama de productos se confunden con la escala si no se controlan.

Conclusiones

La teoría de costes completa la de producción, porque identifica, entre las combinaciones técnicamente eficientes, las que además minimizan el coste. Por dualidad, la función de costes resume la tecnología. Su estática comparativa distingue dos cambios. Por un lado, un aumento del objetivo de producción mueve a la empresa a lo largo de la senda de expansión, atada a corto plazo al factor fijo, por lo que el coste a corto plazo nunca es inferior al de largo. Por otro lado, un cambio en los precios de los factores desplaza la elección a lo largo de la isocuanta hacia el factor más barato. Frente a la U neoclásica, la reserva de capacidad de Stigler y la evidencia empírica apuntan a costes medios a largo plazo con forma de L, y la función de costes (subaditividad, alcance, costes hundidos) preconfigura la estructura del mercado.

La teoría de costes descansa en la tecnología (tema A11) y reproduce la dualidad del consumidor, con la función de costes como análoga de la de gasto (tema A09). No basta, sin embargo, para caracterizar la oferta, porque es la estructura del mercado la que determina qué punto de la senda de expansión elige la empresa. En competencia perfecta, la oferta a corto plazo es el tramo del coste marginal por encima del mínimo de explotación (tema A16). La subaditividad, en cambio, convierte el monopolio en la estructura de menor coste y justifica su regulación (temas A17 y A20), y los costes hundidos y de transacción explican las barreras a la entrada y los límites de la empresa (tema A15). Por último, los costes de ajuste del capital fundamentan la teoría q de la inversión (tema A34).

La condición de mínimo coste sirve hoy para medir el poder de mercado. Según ella, el margen, cociente entre el precio y el coste marginal, es la elasticidad del *output* respecto a un factor variable dividida por la participación del gasto en ese factor en los ingresos. De Loecker, Eeckhout y Unger (2020) documentan así un aumento de los márgenes en EE. UU. desde 1980, cuya medición sigue en debate. La curva de aprendizaje de Wright (apartado 3.3.1) se aplica también a la transición energética. Way et al. (2022) proyectan con ella el coste de la energía solar, la eólica y las baterías, y concluyen que una transición rápida sería probablemente más barata que mantener los combustibles fósiles.

Anexo. Ejemplos resueltos, función translog y factor fijo

Los ejemplos resueltos ilustran la función de costes del apartado 1.4.4, la especificación formal de la translog completa la estimación del apartado 3.4.1, donde se exponen sus lecturas, y el gráfico representa la limitación del corto plazo del apartado 2.1.2.

A.1. Ejemplos resueltos

El primer ejemplo obtiene la función de costes de una tecnología Cobb-Douglas resolviendo el problema dual del apartado 1.4.2 y comprueba las propiedades del apartado 1.4.4. El segundo obtiene las demandas condicionadas y los costes con rendimientos constantes.

Ejemplo: función de costes de una Cobb-Douglas

Sea $x = L^{1/4}K^{1/4}$ (rendimientos decrecientes a escala, grado 1/2) con $\mathbf{p}^z = (w, r)$. En el dual, min $wL + rK$ s.a.: $L^{1/4}K^{1/4} = x_0$, la tangencia $\text{RMST}_{KL} = (\partial f/\partial L)/(\partial f/\partial K) = K/L = w/r$ da $K = (w/r)L$. Sustituyendo en la restricción, $L^{1/2}(w/r)^{1/4} = x_0$, se obtienen las demandas condicionadas:

$$L^c = x_0^2 \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2} \qquad K^c = x_0^2 \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}$$

Llevándolas a $wL^c + rK^c$ y siendo x_0 arbitrario, la función de costes y sus curvas unitarias son:

$$c(w, r, x) = 2\, w^{1/2} r^{1/2} x^2 \qquad \text{Cmg} = 4\, w^{1/2} r^{1/2} x \qquad \text{Cme} = 2\, w^{1/2} r^{1/2} x$$

Es homogénea de grado uno, creciente y cóncava en (w, r), y el lema de Shephard devuelve las demandas ($\partial c/\partial w = x^2 r^{1/2} w^{-1/2} = L^c$). El Cmg, que coincide con el multiplicador μ, es el doble del Cme, que es creciente. Los rendimientos decrecientes a escala se traducen así en un coste convexo en x.

Ejemplo: demandas condicionadas y costes con rendimientos constantes

Sea $x = L^{1/2}K^{1/2}$, con rendimientos constantes a escala. La tangencia del dual, $\text{RMST}_{KL} = K/L = w/r$, y la isocuanta dan las demandas condicionadas y, llevándolas a $wL + rK$, la función de costes:

$$L^c = x \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2} \qquad K^c = x \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2} \qquad c(w, r, x) = 2\, w^{1/2} r^{1/2} x$$

Con $w = 4$, $r = 1$ y $x = 10$, la empresa emplea $L^c = 5$ y $K^c = 20$ con un coste de 40, y el trabajo absorbe la mitad del coste, la participación constante de la Cobb-Douglas. Si el salario sube a $w = 16$, la empresa sustituye trabajo por capital ($L^c = 2{,}5$, $K^c = 40$), y el coste solo se duplica, hasta 80, aunque el salario se haya cuadruplicado. Con una tecnología de proporciones fijas, $x = \min\{L, K\}$, las demandas condicionadas no dependen de los precios ($L^c = K^c = x = 10$), y el coste, $c = (w + r)\, x$, pasa de 50 a 170. La sustitución entre factores amortigua así la subida del coste. En ambos casos el Cmg y el Cme son constantes e iguales, como corresponde a los rendimientos constantes a escala.

A.2. La función de costes translog

La función de costes translog es

$$\ln c(\mathbf{p}^z, x) = \alpha_0 + \alpha_x \ln x + \tfrac{1}{2}\gamma_{xx}(\ln x)^2 + \sum_i \alpha_i \ln p_i^z + \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln p_i^z \ln p_j^z + \sum_i \gamma_{ix} \ln p_i^z \ln x$$

donde x es el *output*, p_i^z el precio del factor i (con $i, j = 1, \dots, m$ factores) y α_0, α_x, α_i, γ_{xx}, γ_{ij} y γ_{ix} los parámetros que se estiman. La homogeneidad de grado uno en precios exige $\sum_i \alpha_i = 1$, $\sum_i \gamma_{ij} = 0$ para cada j y $\sum_i \gamma_{ix} = 0$, y la simetría de las derivadas cruzadas, $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$. Por el lema de Shephard, la derivada logarítmica respecto a cada precio es la participación del factor en el coste:

$$s_i = \frac{\partial \ln c(\mathbf{p}^z, x)}{\partial \ln p_i^z} = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j^z + \gamma_{ix} \ln x$$

donde $s_i = p_i^z z_i^c / c(\mathbf{p}^z, x)$ es la participación del factor i en el coste, con z_i^c su demanda condicionada. Estas ecuaciones de participación (salvo una, porque las participaciones suman uno) se estiman conjuntamente con la función de costes, lo que añade información sin añadir parámetros.

La Cobb-Douglas es el caso particular $\gamma_{xx} = \gamma_{ij} = \gamma_{ix} = 0$, con $\alpha_x = 1/h$. En la translog, en cambio, la elasticidad-producto del coste, $\varepsilon_{Cx} = \partial \ln c / \partial \ln x = \alpha_x + \gamma_{xx} \ln x + \sum_i \gamma_{ix} \ln p_i^z$, varía con la escala, y la elasticidad de sustitución de Allen del apartado 1.4.4 se obtiene de los parámetros, $\sigma_{ij}^P = 1 + \gamma_{ij}/(s_i s_j)$ para $i \neq j$.

A.3. Factor fijo y condición de tangencia

En el plano (L, K) (figura A12.10), el gráfico representa la limitación del apartado 2.1.2 con el capital fijo en $\bar{K}$ y el trabajo como único factor variable:

1. *Isocuantas* x_0, x_1 y x_2: tres niveles de producción crecientes.

2. *Rectas isocoste a largo plazo* C_0, C_1 y C_2 (trazo continuo): las más bajas que alcanzan cada isocuanta, tangentes a ella, con pendiente $-w/r$.

3. *Senda de expansión a largo plazo*, SEC_{LP}: une los puntos de tangencia 0, 1 y 2, en los que $\text{RMST}_{KL} = w/r$.

4. *Senda de expansión a corto plazo*, SEC_{CP} (trazo discontinuo): la recta horizontal $K = \bar{K}$, porque solo puede variar el trabajo.

5. *Equilibrio*: a corto plazo, cada nivel de producción se obtiene en el corte de su isocuanta con SEC_{CP}.

- *En* x_1: el corte coincide con la tangencia (punto 1), porque $\bar{K}$ es la planta óptima para ese nivel, y el coste a corto plazo iguala al de largo.

▪ *En* x_0: la empresa produce en el punto $0'$, con más capital y menos trabajo que en el 0 (exceso de capital). Allí la isocuanta es más inclinada que la isocoste ($\text{RMST}_{KL} > w/r$), y la isocoste que pasa por $0'$, $C_{0'}$ (discontinua), queda por encima de C_0.

▪ *En* x_2: produce en el punto $2'$, con menos capital y más trabajo que en el 2 (insuficiencia de capital), con $\text{RMST}_{KL} < w/r$ y una isocoste $C_{2'}$ por encima de C_2.

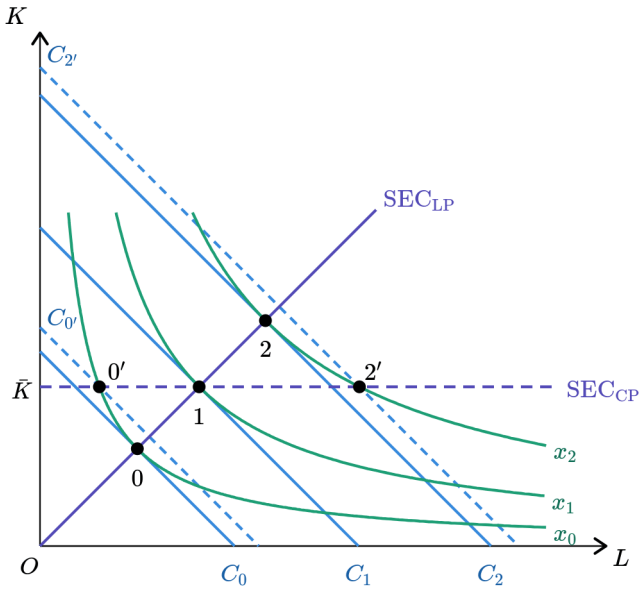


Figura A12.10: Factor fijo y condición de tangencia. Con el capital fijo en $\bar{K}$, la empresa solo cumple la tangencia en x_1 (punto 1). Para x_0 y x_2 produce en $0'$ y $2'$, sobre isocostes más altas que las de largo plazo.

La distancia entre cada isocoste discontinua y la continua de la misma isocuanta es el sobrecoste de no poder ajustar el capital, nulo solo en x_1 (apartados 2.1.3 y 2.2).

A13. Economía de la información

Economía de la información y teoría de la agencia: selección adversa y riesgo moral.

Introducción

Introducción común. Los temas A10 y A13 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A10**. Explica cómo la elección con información imperfecta extiende la teoría del consumidor y de la empresa, desde la utilidad esperada hasta la economía de la información, con la selección adversa y el riesgo moral.

En un mercado de coches de segunda mano en el que solo el vendedor conoce la calidad del vehículo, los compradores ofrecen un precio que refleja la calidad media, los propietarios de los buenos coches se retiran y el mercado puede llegar a desaparecer. Con ese ejemplo, Akerlof (1970) mostró que la información asimétrica puede impedir el funcionamiento de mercados enteros, un fallo de mercado que la teoría de la elección con información perfecta no contemplaba. Pocos años antes, Arrow (1963) había analizado en el mercado de seguros el otro gran problema de la información asimétrica, el del asegurado que, una vez cubierto, tiene menos incentivos para evitar el siniestro.

La **economía de la información** estudia las situaciones en las que la información está repartida de forma asimétrica entre las partes de una relación económica, de modo que una de ellas conoce algo relevante que la otra no puede observar. De ella se ocupa este tema, que se organiza en tres partes:

- *Teoría de la agencia*: el problema del principal-agente es el marco general del diseño de contratos cuando el principal delega una tarea en un agente.

- *Riesgo moral* (Arrow, 1963; Pauly, 1968): la asimetría surge después de firmar el contrato, porque la acción del agente no es observable.

- *Selección adversa* (Akerlof, 1970): la asimetría existe antes del contrato, porque el tipo o la calidad no son observables. Se estudian también sus soluciones mediante señales y autoselección.

Ante una asimetría, la iniciativa puede tomarla cualquiera de las dos partes. La parte informada puede emitir una **señal** costosa que revele su tipo (Spence, 1973), y la no informada puede diseñar contratos que hagan que cada tipo se revele al elegir, lo que se llama **autoselección** o *screening* (Rothschild y Stiglitz, 1976).

Estas ideas explican instituciones tan dispares como las franquicias y los copagos de los seguros, las garantías de los productos, los títulos académicos como señal de productividad, la retribución variable de los directivos o la regulación prudencial de la banca. Su importancia la reflejan los premios Nobel de Akerlof, Spence y Stiglitz (2001), Tirole (2014) y Hart y Holmström (2016).

El tema se apoya en la teoría de la utilidad esperada (tema A10) y en la teoría de juegos (tema A14), y sus resultados reaparecen en el mercado de trabajo (tema A27), en la regulación (tema A15) y en los mercados financieros (tema B23).

1. Teoría de la agencia: el problema del principal-agente (Ross, 1973; Jensen y Meckling, 1976)

La **teoría de la agencia** estudia las relaciones en las que una parte (el principal) encarga a otra (el agente) que actúe en su nombre, cuando sus intereses no coinciden. Su objeto es el diseño del **contrato óptimo**, es decir, el que mejor alinea ambos intereses. La teoría nace de la mano de varios autores (p. ej. Stephen Ross, 1973, o Michael Jensen y William Meckling, 1976) y presenta una serie de elementos comunes.

1.1. Concepto: elementos del problema principal-agente

Los elementos comunes de la relación de agencia son los siguientes:

Agentes: en general, existen dos partes y una de ellas, denominada *principal*, busca contratar a la otra, denominada *agente*. Ambos pueden ser individuos, instituciones o centros de decisión (p. ej. Estado-ciudadanía, accionista-directivo, empleador-empleado o paciente-médico). No obstante, pueden considerarse situaciones en las que existen múltiples agentes.

Negociación: se desarrolla con un determinado reparto del poder negociador entre las partes. Generalmente, la negociación es de la forma "lo tomas o lo dejas" (una de las partes tiene todo el poder negociador y no caben contraofertas) o de regateo (ambas partes tienen poder negociador y pueden hacer contraofertas).

Contrato: lo que se negocia es un contrato o un conjunto de contratos. Se trata de un compromiso que persigue que el agente actúe en nombre del principal. Para ello, determina, en cada estado de la naturaleza, qué corresponde hacer a cada parte y qué retribución recibe el agente del principal a cambio de su esfuerzo.

El contrato solo se basa en variables verificables, que pueden ser revisadas por un árbitro independiente. De no ser verificables, no habría incentivos a firmar el contrato en sí mismo, ya que ambas partes sabrían que un árbitro independiente no podría comprobar su cumplimiento y, al anticipar la situación, no participarían en el contrato.

Aceptación o rechazo: el agente acepta el contrato si la utilidad de participar en él no es inferior a la de no firmarlo, es decir, a su *utilidad de reserva*. La utilidad de reserva puede definirse como la utilidad de oportunidades alternativas en el mercado. Si el agente no acepta las condiciones del contrato, no aparece ningún tipo de relación, pero si lo hace, nace una relación bilateral.

Conflicto de interés: los objetivos del agente se oponen a los del principal, dado que ambos se mueven por el interés propio. Así, el coste de uno es el ingreso del otro y viceversa (p. ej. salario). El conflicto de interés da lugar a una serie de *costes de agencia*, es decir, destrucción de valor en la relación contractual a falta de una alineación entre los intereses de las partes.

1.2. Modelo base: información imperfecta y simétrica

Origen: con base en lo anterior, puede desarrollarse un modelo canónico para estudiar el problema del principal y el agente (Ross, 1973; Holmström, 1979).

Idea: el pago del agente depende del reparto óptimo del riesgo y este aspecto se condensa en el contrato. Esta idea permite entender uno de los principales objetivos de la economía de la información, que es caracterizar el contrato óptimo.

1.2.1. Supuestos

Entorno: la información es imperfecta, pero simétrica. Ninguna de las partes conoce de antemano el estado de la naturaleza, pero ambas observan lo mismo. El resultado de la relación es una variable aleatoria verificable, $x_i = f(e, s_i)$, que depende del esfuerzo del agente, e (también verificable), y del estado de la naturaleza, s_i, que ocurre con probabilidad p_i.

De forma equivalente, y esta es la formulación que se utiliza en adelante, puede tomarse como dado el conjunto de resultados posibles, $\{x_1, \dots, x_n\}$, y hacer que el esfuerzo actúe sobre sus probabilidades, $P(X = x_i \mid e) = p_i(e)$, con $\sum_i p_i(e) = 1$ y $p_i(e) > 0$. El esfuerzo mejora el resultado ($f'_e > 0$ en la primera formulación), de modo que un mayor esfuerzo desplaza la distribución hacia los resultados altos.

Agentes: un principal y un agente entran en contacto para establecer una relación bilateral:

- *Principal*: es el encargado del diseño del contrato (completo) y busca maximizar la utilidad esperada de su beneficio. El contrato abarca el salario ofrecido para cada resultado, $w(x_i)$, y el esfuerzo demandado del agente, e.

Las preferencias del principal se expresan en una función de utilidad esperada de tipo von Neumann-Morgenstern (VNM), $\pi^e(e) = \sum_i p_i(e) \cdot \pi[x_i - w(x_i)]$, con $\pi' > 0$ y $\pi'' \leq 0$. El caso $\pi'' = 0$ es el del principal neutral al riesgo, que servirá de referencia.

- *Agente*: observa el contrato y decide si participar o no. Si participa, aporta el esfuerzo que fija el contrato y obtiene una utilidad esperada VNM[1], $u^e = \sum_i p_i(e) \cdot u[w(x_i)] - v(e)$, donde v es la desutilidad del esfuerzo, creciente y convexa ($v' > 0$, $v'' \geq 0$), y la utilidad del salario es creciente y cóncava ($u' > 0$, $u'' \leq 0$).

- *Conflicto de interés*: para el principal, el resultado es su ganancia y el salario es su coste, pero el esfuerzo no supone un coste en sí mismo. Para el agente, el salario es su ganancia y el esfuerzo es su coste, pero el resultado no supone ni coste ni ganancia en sí mismo. En todo caso, el esfuerzo mejora la probabilidad de un buen resultado. En estas circunstancias, el contrato se constituye como el medio que permite hacer compatibles los distintos intereses de las partes.

1.2.2. Modelo

Planteamiento: el principal buscará maximizar la utilidad esperada de su beneficio mediante el diseño de un contrato que especifique el esfuerzo demandado y el salario ofrecido, restringido por la aceptación del contrato por parte del agente (la *condición de participación*). El problema puede resolverse mediante el método de Kuhn-Tucker[2]:

$$\max_{e,\{w(x_i)\}} \sum_{i=1}^{n} p_i(e) \cdot \pi[x_i - w(x_i)] \quad \text{s.a.:} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(e) \cdot u[w(x_i)] - v(e) \geq \underline{u}$$

donde e es el esfuerzo exigido al agente, $w(x_i)$ el salario ofrecido cuando el resultado es x_i, $p_i(e)$ la probabilidad de ese resultado dado el esfuerzo, π y u las funciones de utilidad VNM del principal y del agente, $v(e)$ la desutilidad del esfuerzo, $\underline{u}$ la utilidad de reserva del agente y λ el

[1] Función aditivamente separable, de modo que la aversión al riesgo no varía con el esfuerzo.

[2] Equivale a resolverlo en dos etapas, buscando primero, para cada esfuerzo, el contrato aceptable que da al principal mayor utilidad esperada (el más barato, si es neutral al riesgo) y, después, el esfuerzo que maximiza esa utilidad.

multiplicador de la restricción de participación. El lagrangiano es $\mathcal{L} = \sum_i p_i(e)\,\pi[x_i - w(x_i)] + \lambda\left[\sum_i p_i(e)\,u[w(x_i)] - v(e) - \underline{u}\right]$.

CPO: con la restricción de participación activa, se deriva el lagrangiano respecto al salario de cada estado, al esfuerzo y al multiplicador, y se obtienen tres condiciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w(x_i)} = -p_i(e)\,\frac{d\pi}{d(x_i - w_i)} + \lambda\, p_i(e)\,\frac{du}{dw_i} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\pi/d(x_i - w_i)}{du/dw_i} = \lambda \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e} = \sum_i \frac{dp_i}{de}\cdot \pi[x_i - w(x_i)] + \lambda\left[\sum_i \frac{dp_i}{de}\cdot u[w(x_i)] - \frac{dv}{de}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_i p_i(e)\cdot u[w(x_i)] - v(e) - \underline{u} = 0$$

Cada una de las tres condiciones tiene su lectura:

1. *Reparto del riesgo*: la condición (1), que resulta de derivar respecto al salario, se cumple en todos los estados de la naturaleza, de modo que, para dos estados cualesquiera i y j:

$$\frac{d\pi/d(x_i - w_i)}{du/dw_i} = \frac{d\pi/d(x_j - w_j)}{du/dw_j} = \lambda \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{\frac{d\pi/d(x_i - w_i)}{d\pi/d(x_j - w_j)}}_{\mathrm{RMS}^{P}_{j,i}} = \underbrace{\frac{du/dw_i}{du/dw_j}}_{\mathrm{RMS}^{A}_{j,i}} \tag{2}$$

El contrato óptimo será tal que el cociente entre la utilidad marginal del principal y la del agente sea constante en todos los estados de la naturaleza e igual a λ, el multiplicador asociado a la restricción de participación. Dividiendo esta condición para dos estados cualesquiera i y j, λ se cancela y se obtiene que la relación marginal de sustitución entre resultados en esos dos estados para el principal coincide con la del agente.

Estrictamente, la relación marginal de sustitución (RMS) entre rentas contingentes incluye las probabilidades, $p_i\,(d\pi/d(x_i - w_i))/[p_j\,(d\pi/d(x_j - w_j))]$, pero estas se cancelan al suponer que ambos comparten las mismas creencias.

Esta condición se conoce como *condición de Borch* de reparto óptimo del riesgo y caracteriza las asignaciones Pareto-eficientes bajo incertidumbre. Gráficamente, en una caja de Edgeworth cuyos ejes son las rentas en los estados i y j, corresponde a los puntos de tangencia entre las curvas de indiferencia de ambos (la curva de contratos).

2. *Esfuerzo*: la segunda condición, que resulta de derivar respecto al esfuerzo, determina el nivel que el contrato exige. El principal demanda esfuerzo hasta que su ganancia marginal en utilidad esperada iguala, a través de λ, la compensación adicional que el agente exige por la desutilidad marginal del esfuerzo. Como el esfuerzo es verificable, el principal puede exigirlo directamente en el contrato, sin necesidad de incentivarlo.

3. *Participación*: la tercera condición es la propia restricción, que se cumple con igualdad. En el óptimo, el agente recibe una "utilidad neta" exactamente equivalente a su utilidad de reserva. De lo contrario, el principal estaría pagando demasiado, ya que podría reducir los pagos y obtener mayor beneficio, y el agente todavía aceptaría el nuevo contrato.

CSO: se supone que el problema es de buen comportamiento (funciones de beneficio y utilidad cóncavas, con concavidad estricta en al menos una de ellas), de modo que el cumplimiento de las CPO garantiza una solución única e interior.

Solución: el contrato óptimo, $\{e^*, w^*(x_i)\}$, es un vector que recoge el nivel de esfuerzo exigido y el esquema de pagos asociado a cada resultado. Equivale, en el problema de agencia, a la función de demanda del consumidor, pues recoge cómo responde la decisión (aquí, el reparto de rentas entre estados) a los parámetros del problema.

En este caso, el parámetro decisivo son las actitudes ante el riesgo de las partes. Cada caso de actitud frente al riesgo se caracteriza por tres elementos: la *condición* que impone (2) sobre las utilidades marginales, el *reparto del riesgo* que resulta y el *esquema de pagos* concreto.

- *Caso 1: principal neutral, agente averso*:

  - *Condición*: si el principal es neutral al riesgo, π' es constante, y si el agente es averso, u' es decreciente. Como el contrato óptimo exige $\pi'/u' = \lambda$ constante y π' lo es, u' ha de ser constante en todos los estados, lo que solo ocurre si el salario es el mismo con independencia del resultado, es decir, $w(x_i) = w(x_j)$ para todo i, j.

  - *Reparto del riesgo*: el principal asume todo el riesgo de la transacción y el agente queda totalmente asegurado.

  - *Esquema de pagos*: salario fijo, $w^* = u^{-1}[\underline{u} + v(e^*)]$, que compensa exactamente la utilidad de reserva y la desutilidad del esfuerzo exigido.

- *Caso 2: principal averso, agente neutral*:

  - *Condición*: es el caso opuesto. Como u' es constante (agente neutral), π' ha de ser constante para satisfacer la condición. Al ser π' decreciente, ello solo ocurre si el beneficio del principal es el mismo en todos los estados ($x_i - w(x_i) = k$ para todo i).

  - *Reparto del riesgo*: el agente asume todo el riesgo de la transacción y el principal queda totalmente asegurado.

  - *Esquema de pagos*: contrato de franquicia, $w^* = x_i - k$, con $k > 0$ el canon. El principal recibe una cantidad fija con independencia del resultado y el agente se queda con el resultado neto. Intuitivamente, el principal cede su saber hacer, su imagen de marca y la comercialización de sus productos a un agente-franquiciado neutral al riesgo, a cambio de que este asuma los riesgos y pague un canon.

- *Caso 3: ambos aversos*:

  - *Condición*: con π' y u' decrecientes, ninguno de los dos puede ser constante y la condición (2) se cumple con pagos que varían con el resultado, en una proporción que depende de los grados de aversión:

$$\frac{dw^*}{dx_i} = \frac{\text{CAA}_P}{\text{CAA}_P + \text{CAA}_A}$$

    donde CAA_P y CAA_A son los coeficientes de aversión absoluta al riesgo de cada parte, evaluados en el reparto óptimo, de modo que la regla vale localmente. El contrato es lineal (pendiente constante) cuando ambos coeficientes son constantes, es decir, con utilidades de aversión absoluta al riesgo constante (CARA, *constant absolute risk aversion*). Los dos casos anteriores son los casos particulares en que uno de los coeficientes es nulo (pendiente 0 en el salario fijo y 1 en la franquicia).

- *Reparto del riesgo*: las dos partes soportan riesgo y ninguna queda del todo cubierta. La más aversa, que absorbe menos variación del resultado, es la mejor cubierta.

- *Esquema de pagos*: salario variable con el resultado, $w^* = a + b \cdot x_i$ con $0 < b < 1$, asimilable a una *joint venture* o a una remuneración con parte fija y parte variable.

▪ *Corolario*: de los tres casos se deduce que la condición de tangencia se produce sobre la línea de certeza del individuo averso cuando el aseguramiento es completo (casos 1 y 2) y entre ambas líneas de certeza cuando es parcial (caso 3).

Desarrollo gráfico: la solución se ilustra en una caja de Edgeworth de estados de la naturaleza (figura A13.1), cuyos lados son los dos posibles resultados, x_1 (horizontal) y x_2 (vertical). El agente mide sus salarios, w_1 y w_2, desde O_A, y el principal sus rentas netas, $x_1 - w_1$ y $x_2 - w_2$, desde O_P:

1. *Líneas de certeza* (L.C.$_A$ y L.C.$_P$): los dos segmentos desde cada origen representan las combinaciones de rentas contingentes iguales en ambos estados, para el agente (desde O_A) y para el principal (desde O_P).

2. *Curvas de indiferencia*: las del principal (π_0^e) se dibujan desde O_P hacia O_A y las del agente desde O_A hacia O_P. Su curvatura refleja la aversión al riesgo de cada parte (rectas si es neutral, convexas si es averso).

3. *Condición de participación*: los únicos contratos aceptables para el agente son los situados sobre o por encima de la curva de indiferencia correspondiente a su utilidad de reserva, $\underline{u}$.

4. *Equilibrio*: entre los contratos que el agente acepta, el principal elige el que le permite llegar a su curva de indiferencia más lejana de O_P. En ese punto, dicha curva es tangente a la de reserva del agente (condición de Borch). En el caso 1, que recoge la figura, el óptimo es el punto 0, con $w_1^* = w_2^* = w^*$.

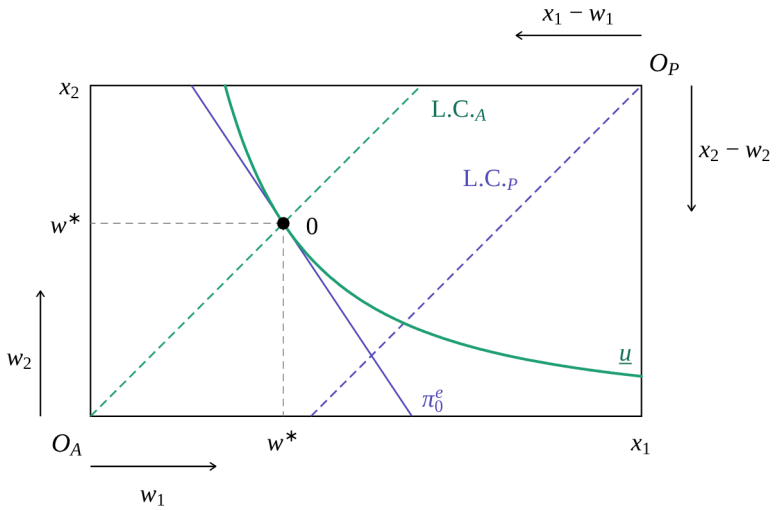
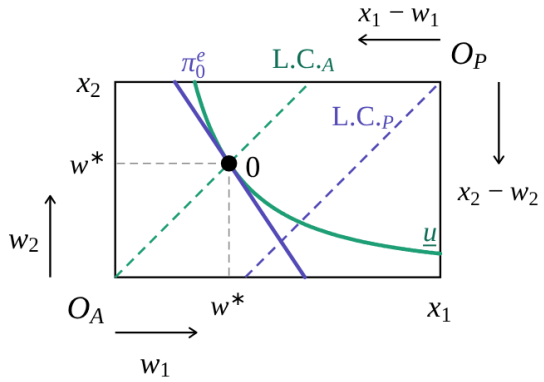


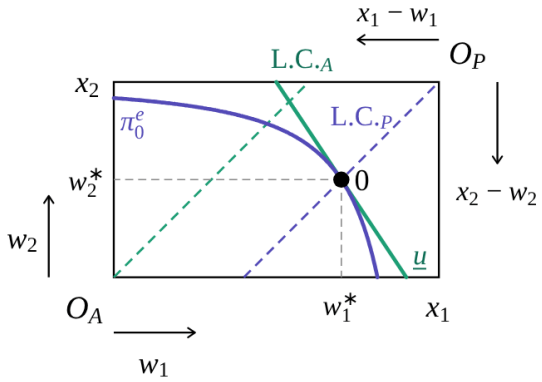
Figura A13.1: Modelo principal-agente con información simétrica. En el contrato óptimo, el principal neutral al riesgo asegura plenamente al agente averso al riesgo.

El punto óptimo define un plan de pagos contingente, con w_1^* si el resultado es x_1 y w_2^* si es x_2, y la figura A13.2 muestra su posición en los tres casos del corolario. La tangencia se sitúa sobre la línea de certeza del agente averso cuando el principal es neutral (panel a), sobre la del principal averso cuando el agente es neutral (panel b) y entre ambas líneas de certeza cuando los dos son aversos (panel c).

(a) Caso 1: principal neutral, agente averso



(b) Caso 2: principal averso, agente neutral



(c) Caso 3: ambos aversos

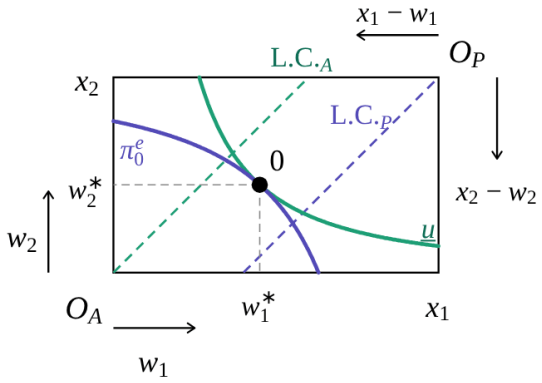


Figura A13.2: Reparto óptimo del riesgo en la caja de Edgeworth de estados de la naturaleza. La curva de indiferencia de reserva del agente, $\underline{u}$, y la del principal, π_0^e, son tangentes en el punto 0. La tangencia se sitúa sobre la línea de certeza del agente averso cuando el principal es neutral (panel a, caso 1) y sobre la del principal averso cuando el agente es neutral (panel b, caso 2). Cuando los dos son aversos (panel c, caso 3), la tangencia queda entre ambas líneas de certeza.

Estática comparativa: se distinguen dos perturbaciones:

- *Aumento de la utilidad de reserva* $\underline{u}$: desplaza la restricción de participación hacia O_P y traslada el contrato a lo largo de la curva de contratos, mejorando al agente a costa del principal.

- *Aumento de la aversión al riesgo de una de las partes*: aumenta la curvatura de sus curvas de indiferencia y desplaza la tangencia hacia su línea de certeza, es decir, hacia un mayor aseguramiento de esa parte.

1.2.3. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo base establece la referencia de eficiencia de la relación de agencia. Con información simétrica, el contrato óptimo reparte el riesgo según los perfiles de las partes (el principal neutral asegura plenamente al agente averso) y no existe pérdida de eficiencia. Cualquier ineficiencia observada en el resto del tema es, por tanto, imputable exclusivamente a la asimetría de información.

Limitaciones: la observabilidad del esfuerzo y de los tipos falla precisamente en las relaciones económicas relevantes (empleo, seguros, crédito, regulación), por lo que el modelo es un punto de partida y no una descripción. Los apartados 2 y 3 relajan, respectivamente, la observabilidad del esfuerzo y la de los tipos.

1.3. Aplicaciones

El marco principal-agente es transversal y aparece en el libro cada vez que una parte actúa por cuenta de otra con objetivos distintos y bajo incertidumbre. Sus aplicaciones principales son las siguientes:

- *Asegurador-asegurado*: los contratos de seguro, donde el asegurador desconoce el riesgo del asegurado y su comportamiento una vez asegurado (apartados 2.3 y 3.4.2; tema A10).

- *Accionista-directivo*: la separación entre propiedad y control en la empresa moderna, origen de la teoría de la agencia (Jensen y Meckling, 1976) y de los mecanismos de gobierno corporativo (tema A15).

- *Regulador-empresa regulada*: la regulación de monopolios naturales cuando el regulador desconoce los costes de la empresa (apartado 3.4.3 y tema A20).

- *Empleador-empleado*: el diseño de los contratos de trabajo y de los sistemas de incentivos, y la teoría de los salarios de eficiencia (tema A27).

- *Prestamista-prestatario*: el racionamiento del crédito (Stiglitz y Weiss, 1981; tema A42, apartado 2.3.1) y los costes de agencia de la deuda (tema B03, apartado 2.3.4).

- *Estado-ciudadano y organismos internacionales-Estados*: la condicionalidad de la ayuda y de los préstamos, y el diseño de las políticas públicas cuando el Estado no observa las características de los beneficiarios (temas B22 y B29).

En todos los casos el problema tiene interés económico precisamente porque falla el supuesto de información simétrica del modelo base. Si el principal no observa lo que el agente hace (el esfuerzo del directivo, la prudencia del asegurado, el uso del crédito), hay riesgo moral (apartado 2). Si no observa lo que el agente es (la productividad del trabajador, el riesgo del asegurado, la eficiencia de la empresa regulada), hay selección adversa (apartado 3). Las aplicaciones son, por tanto, el desarrollo de esas dos desviaciones respecto de la simetría de información.

1.4. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría de la agencia proporciona el marco general de la economía de la información, porque toda relación de agencia puede formularse como un contrato con restricciones de participación y, cuando la información es asimétrica, de incentivos. El modelo base es la referencia de eficiencia frente a la que se miden los dos fallos de información.

Limitaciones: el marco supone que el contrato puede escribirse sobre variables verificables y hacerse cumplir sin coste, que las partes son racionales y que la relación es bilateral. La teoría de los contratos incompletos (Grossman-Hart-Moore, tema A15, apartado 1.3.1) y la de los contratos relacionales relajan estos supuestos.

2. Riesgo moral (Arrow, 1963; Pauly, 1968)

La primera desviación respecto de la simetría de información del modelo base surge cuando el principal no observa lo que el agente hace una vez firmado el contrato. Tras precisar el concepto, se formaliza el modelo con esfuerzo no observable y se repasan sus aplicaciones y sus soluciones.

2.1. Concepto: riesgo moral

El término **riesgo moral** procede del sector asegurador, donde era de uso frecuente en el s. XIX. Sin embargo, su popularidad en la ciencia económica comienza tras la publicación del trabajo de Kenneth Arrow (1963).

El riesgo moral se produce cuando, después de la firma del contrato, el esfuerzo del agente no es observable ni verificable. El salario constante es óptimo con información simétrica cuando el agente es averso y el principal neutral (caso 1). No obstante, si el principal lo ofrece, el agente tiene incentivos a realizar un esfuerzo subóptimo ($e_L < e_H$), porque el esfuerzo le cuesta y el salario no depende de él.

Por eso, cuando hay riesgo moral, el principal se ve obligado a replantear la estructura de pagos. El contrato ya no puede exigir el esfuerzo, sino que debe inducirlo, haciendo que el esfuerzo deseado por el principal coincida con el que el agente elige por su cuenta una vez firmado el contrato.

2.2. Modelo: esfuerzo no observable

Origen: Kenneth Arrow (1963) y Mark Pauly (1968) plantean el problema en el mercado de seguros. La formalización del contrato óptimo con esfuerzo no observable es de Bengt Holmström (1979).

Idea: el esfuerzo del agente no es observable, de modo que el contrato no puede exigirlo y debe inducirlo mediante el esquema de pagos.

2.2.1. Supuestos

Entorno: se mantienen los supuestos del modelo base del apartado 1.2 (un principal y un agente, resultado x_i aleatorio con probabilidades $p_i(e)$ que dependen del esfuerzo, contrato sobre variables verificables, utilidad de reserva $\underline{u}$). La única diferencia es que el principal ya no observa el esfuerzo e, solo el resultado.

Agentes: el esfuerzo, para simplificar, toma dos valores, alto (e_H) y bajo (e_L). El principal desea inducir el alto mediante el esquema de pagos $w(x_i)$, lo que añade al problema una *restricción de incentivos*, según la cual el agente debe preferir el esfuerzo alto al bajo.

2.2.2. Modelo

Planteamiento: se añade la restricción de incentivos y se construye el nuevo lagrangiano con un nuevo multiplicador, μ:

$$\max_{\{w(x_i)\}} \sum_{i=1}^{n} p_i(e_H) \cdot \pi[x_i - w(x_i)]$$

$$\text{s.a.:} \begin{cases} \sum_i p_i(e_H) \cdot u[w(x_i)] - v(e_H) \geq \underline{u} & \text{(participación)} \\ \sum_i [p_i(e_H) - p_i(e_L)] \cdot u[w(x_i)] \geq v(e_H) - v(e_L) & \text{(incentivos)} \end{cases}$$

donde $w(x_i)$ es el salario ofrecido cuando el resultado es x_i, e_H y e_L los niveles de esfuerzo alto y bajo, $p_i(e_H)$ y $p_i(e_L)$ las probabilidades de cada resultado con uno u otro esfuerzo, π y u las utilidades VNM del principal y del agente, $v(e)$ la desutilidad del esfuerzo, $\underline{u}$ la utilidad de reserva y λ y μ los multiplicadores de las restricciones de participación e incentivos.

La restricción de incentivos recoge el problema de riesgo moral, pues exige que el esfuerzo alto rinda al agente una utilidad esperada no inferior a la del bajo.

CPO: se deriva el lagrangiano respecto al salario de cada estado y se obtiene la condición que sustituye a (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w(x_i)} &= -p_i(e_H) \frac{d\pi}{d(x_i - w_i)} + \lambda\, p_i(e_H) \frac{du}{dw_i} + \mu \left[p_i(e_H) - p_i(e_L)\right] \frac{du}{dw_i} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d\pi/d(x_i - w_i)}{du/dw_i} = \lambda + \mu \left(1 - \frac{p_i(e_L)}{p_i(e_H)}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

donde λ es el multiplicador de la restricción de participación y μ el de la restricción de incentivos. Se obtiene así la *condición de Holmström* (1979), según la cual el salario en cada estado depende del cociente de verosimilitud, que informa sobre el esfuerzo a partir del resultado observado.

Esta condición se diferencia de la condición de Borch en dos elementos:

1. *Coste del riesgo moral* ($\mu > 0$): el multiplicador μ mide cuánto aumentaría el beneficio esperado del principal si se relajase marginalmente la restricción de incentivos, es decir, el coste que le impone el riesgo moral.

Cuando el principal es neutral y el agente averso al riesgo (caso 1), μ es estrictamente positivo. Para verlo, supóngase que $\mu = 0$. En este caso, la condición (3) se reduciría a la de Borch y se recuperaría el contrato de información simétrica. Sin embargo, en el caso 1 ese contrato es un salario constante, que no ofrece ningún incentivo, induce el esfuerzo bajo y viola la restricción de incentivos. Por tanto, $\mu > 0$, de modo que la restricción de incentivos es activa y, debido a la asimetría de información, el principal obtiene un beneficio menor que con información simétrica.

2. *Cociente de verosimilitud* ($p_i(e_L)/p_i(e_H)$): mide cuán probable es el resultado x_i con esfuerzo bajo en relación con el esfuerzo alto.

Cuanto menor es el cociente, más indicativo es x_i de esfuerzo alto, mayor es el lado derecho de (3) y, por tanto, mayor el salario en ese estado. En el caso 1 el efecto es inmediato, porque π' es constante y un mayor lado derecho exige una menor u'. Cuando $\mu > 0$, el salario varía con el resultado siempre que el cociente varíe entre estados y el principal condiciona el pago a toda señal que contenga información sobre el esfuerzo. Además, en el caso 1, el salario será creciente

en el resultado solo si el cociente es decreciente en x_i (propiedad del cociente de verosimilitud monótono).

La restricción de participación sigue saturada. Como el contrato traslada riesgo al agente, el principal tiene que compensarlo con una prima de riesgo. Esta prima toma la forma de un salario esperado superior al de información simétrica que le deje justo en su utilidad de reserva. Ese salario más alto no mejora en nada al agente, pero el principal ve caer su beneficio esperado, y esa caída es justamente el coste del riesgo moral.

CSO: como en el modelo base, la concavidad de π y u garantiza que las CPO caracterizan el óptimo. Con dos niveles de esfuerzo, el principal compara además el beneficio de inducir e_H con el de conformarse con e_L a salario fijo, y elige el mayor.

Solución: es de nuevo el contrato óptimo $\{e^*, w^*(x_i)\}$, ahora con $e^* = e_H$ inducido en lugar de exigido. Si principal y agente persiguen lo mismo, el contrato de información simétrica ya cumple la restricción de incentivos y el riesgo moral no tiene coste. En cambio, con intereses enfrentados, los tres casos de perfil de riesgo se caracterizan como en el modelo base:

- *Caso 1: principal neutral, agente averso*:
  - *Condición*: con $d\pi/d(x_i - w_i)$ constante, (3) exige que du/dw_i varíe con el cociente de verosimilitud, de modo que el salario ya no puede ser constante.
  - *Reparto del riesgo*: el agente soporta parte del riesgo aunque sea averso, porque solo así el salario transmite incentivos, y de ahí procede el conflicto entre aseguramiento e incentivos.
  - *Esquema de pagos*: salario variable, mayor en los estados más indicativos de esfuerzo alto, y creciente con el resultado si el cociente de verosimilitud es monótono (los resultados altos son relativamente más probables con esfuerzo alto).
- *Caso 2: principal averso, agente neutral*:
  - *Condición*: con u' constante, (3) se cumple con π' constante, como en el modelo base, y la restricción de incentivos no es activa.
  - *Reparto del riesgo*: el agente asume todo el riesgo, sin coste, pues es neutral.
  - *Esquema de pagos*: contrato de franquicia, $w^* = x_i - k$. No hay pérdida de eficiencia porque, al depender el salario del resultado, y este del esfuerzo, el agente internaliza plenamente los incentivos y el principal obtiene el mismo beneficio que con información simétrica. Para ello el agente no ha de tener responsabilidad limitada, de modo que pueda aceptar pagos negativos.
- *Caso 3: ambos aversos*:
  - *Condición*: si el contrato de información simétrica, ya variable, no cumple la restricción de incentivos, $\mu > 0$ y (3) se cumple con pagos variables que combinan el reparto del riesgo de la condición de Borch con la prima de incentivos del cociente de verosimilitud.
  - *Reparto del riesgo*: ambos comparten el riesgo, pero el agente soporta más que en el modelo base.
  - *Esquema de pagos*: salario variable con parte fija y parte ligada al resultado, más sensible al resultado que con información simétrica.

Desarrollo gráfico: el riesgo moral se representa en la caja de Edgeworth de estados de la naturaleza (figura A13.3):

1. *Líneas de certeza y curvas de indiferencia*: las del modelo base, con la curva de reserva del agente, $\underline{u}$, y las del principal, π_0^e y π_1^e.

2. *Restricción de incentivos* (RI): excluye los contratos con salario igual en ambos estados. La región sombreada recoge los contratos que la cumplen.

3. *Equilibrio*: el riesgo moral se manifiesta en que el contrato ya no puede situarse en el punto 0, sobre la línea de certeza del agente averso (caso 1). El óptimo se desplaza, por tanto, a lo largo de la curva de indiferencia de reserva del agente hasta el punto 1, en la frontera de la restricción de incentivos, con $w_1^* \neq w_2^*$. En él, el principal renuncia a parte del reparto eficiente del riesgo a cambio de inducir el esfuerzo.

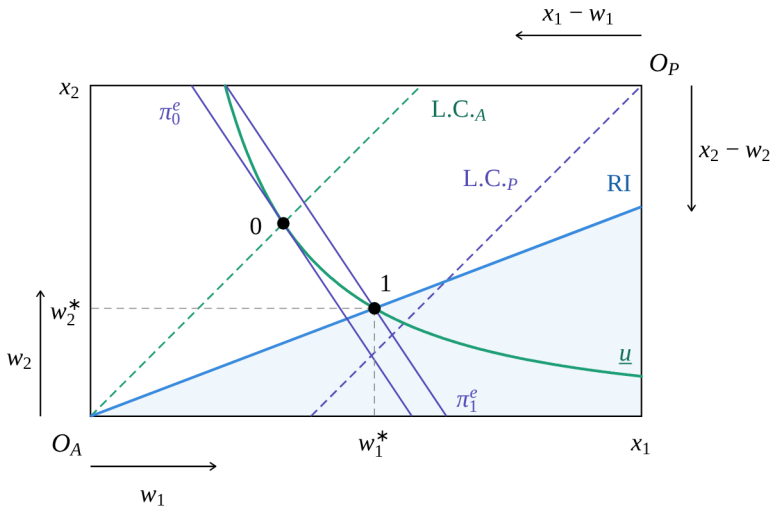


Figura A13.3: Riesgo moral en la caja de Edgeworth de estados de la naturaleza. Con esfuerzo observable, el contrato eficiente (0) asegura completamente al agente averso al riesgo. Con esfuerzo no observable, la restricción de incentivos (RI) lleva el contrato a lo largo de la curva de reserva del agente hasta 1, fuera de su línea de certeza y con menor beneficio esperado para el principal.

2.2.3. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo muestra con precisión que el origen de la ineficiencia del riesgo moral no está en la asimetría de información por sí misma, sino en la combinación de esfuerzo no observable, conflicto de interés y aversión al riesgo.

El modelo proporciona, además, el principio general de todo contrato de incentivos, el uso de cualquier señal informativa sobre el esfuerzo (condición de Holmström). Si la restricción de incentivos es activa y el agente es averso al riesgo, su pago ha de ser variable, pues no puede quedar asegurado en la medida en que lo haría el reparto eficiente del riesgo, y se llega a una solución de *second best*.

Limitaciones: el coste del riesgo moral depende de supuestos sobre las actitudes ante el riesgo que no siempre son contrastables (caso 2). Además, el modelo es estático y con una única tarea.

Sin embargo, con relaciones repetidas (reputación) o con varias tareas (Holmström y Milgrom, 1991), el contrato óptimo cambia sustancialmente.

2.3. Aplicaciones

La teoría del riesgo moral tiene múltiples aplicaciones, todas con la misma estructura. Una parte no observa la conducta de la otra tras la firma del contrato, y el remedio consiste en trasladarle parte del riesgo o en condicionar los pagos a resultados observables.

- *Mercados de seguros*: tras suscribir la póliza, el asegurado carece de incentivos para actuar con diligencia y prevenir el siniestro. Coherentemente con el modelo, la respuesta consiste en transferir al agente una parte del riesgo. Así, la póliza cubre solo una fracción del valor del bien, o el asegurado paga el primer tramo del daño (franquicias, copagos).

- *Gobierno corporativo*: cuando propiedad y gestión están separadas, los directivos pueden anteponer el tamaño o el prestigio al valor de la empresa. Para corregirlo, su retribución se vincula a los resultados (opciones sobre acciones, primas) y se establecen mecanismos de supervisión (tema A15).

- *Mercado de trabajo*: si el empleador solo detecta el escaqueo con cierta probabilidad, paga un salario superior al de vaciado del mercado para que el despido sea costoso para el trabajador y este tenga incentivos a no escaquearse. El modelo de salarios de eficiencia de Shapiro y Stiglitz (1984) explica así el desempleo involuntario como dispositivo de disciplina (tema A27).

- *Mercado de crédito*: tras una subida del tipo de interés, el prestatario tiene incentivos a reorientar los fondos hacia proyectos más arriesgados, con mayor rendimiento en caso de éxito, con los que afrontar el mayor coste, lo que eleva la morosidad esperada. Por ello, el prestamista prefiere racionar el crédito antes que subir el tipo (Stiglitz y Weiss, 1981; temas A42 y B26).

- *Rescates macroeconómicos*: tras obtener la ayuda, el país carece de incentivos para corregir la política económica que lo condujo a la emergencia. La solución es la condicionalidad de las instituciones multilaterales (tema B22).

2.4. Soluciones al problema del riesgo moral

Las soluciones al riesgo moral responden todas a la misma lógica del modelo, que consiste en reducir la asimetría de información o hacer que el agente soporte las consecuencias de su conducta.

- *Uso de toda la información disponible* (resultado de suficiencia estadística, Holmström, 1979): el riesgo moral es un coste adicional para la relación. Por ello, es valiosa cualquier señal que aporte, además de la del resultado, información sobre el esfuerzo (p. ej. sobre el estado de la naturaleza), y solo esa. El valor de esa señal está en que permite al principal estimar mejor el esfuerzo del agente y reducir el riesgo que este ha de soportar.

- *Competencia por comparación* (*yardstick competition*): los incentivos dependen de cómo rinde el agente frente al promedio del mercado, al de la propia empresa en otros periodos o al de otras empresas, lo que filtra las perturbaciones comunes que el agente no controla. También se construyen sobre la competencia intraempresa, mediante mecanismos de promoción y reconocimiento de méritos (torneos).

- *Supervisión y control*: las auditorías internas o externas y los indicadores de gestión reducen la asimetría de información y fomentan que el agente alinee su conducta con los intereses del principal. La contrapartida es el gasto en supervisión, que el principal lleva hasta que su coste marginal iguala la reducción marginal del coste de agencia.

- *Castigos*: el despido, la pérdida de reputación y las penalizaciones contractuales complementan a los incentivos positivos. Su eficacia depende de que sean creíbles y de que el agente tenga algo que perder, lo que conecta con los salarios de eficiencia.

- *Regulación*: tras la Gran Recesión (crisis financiera global y de deuda soberana, 2008-2014) se hizo evidente el riesgo moral asociado al *too big to fail*. Varias entidades financieras contaban con garantías implícitas de rescate público, lo que fomentaba la toma excesiva de riesgos. Por ello, los colchones de capital, las cláusulas de *bail-in* y los mecanismos de resolución tratan de devolver a la entidad y a sus acreedores las consecuencias de sus decisiones (tema B27).

- *Separación de responsabilidades y condicionalidad*: muchos problemas de riesgo moral derivan de la estructura de gobernanza (la monetización del déficit cuando la autoridad monetaria no es independiente del Gobierno) y se resuelven separando las funciones. En la ayuda oficial al desarrollo y en los rescates, la financiación en condiciones favorables a países con instituciones débiles genera riesgo moral, y la solución es la condicionalidad, es decir, subordinar los desembolsos al cumplimiento de reformas (temas B22 y B29).

2.5. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría del riesgo moral explica la forma de los contratos reales (remuneraciones variables, franquicias y copagos en los seguros, condicionalidad de la ayuda) como respuestas a la no observabilidad de la conducta. Proporciona también el principio que guía el diseño de esos contratos, usar toda la información sobre el esfuerzo y solo esa. Sus resultados son la base de la economía de las organizaciones y de la regulación financiera moderna.

Limitaciones: el modelo canónico es bilateral y estático, con un solo agente y una sola tarea. Las extensiones muestran que los resultados cambian con terceros y con el tiempo:

- *Con terceros*: John Vickers (1985) muestra, en un contexto de información simétrica, que los accionistas (principales) pueden preferir remunerar a los directivos (agentes) no solo según el resultado, sino con el objetivo estratégico de que los competidores produzcan menos. Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) extienden el resultado a la competencia en precios, en la que el contrato lleva a los rivales a fijar precios más altos. El contrato de agencia se convierte así en un instrumento de competencia en el mercado (sobre el oligopolio, tema A19).

- *Con el tiempo*: con relaciones repetidas, la reputación sustituye parcialmente a los incentivos explícitos.

3. Selección adversa (Akerlof, 1970)

Si lo que el principal no observa es lo que el agente es, y no lo que hace, la asimetría existe ya antes del contrato y da lugar a la selección adversa. A su concepto siguen el modelo de Akerlof, sus aplicaciones y las soluciones mediante señalización y autoselección.

3.1. Concepto: selección adversa

Hay **selección adversa** cuando el agente sabe, ya antes de firmar el contrato, algo que el principal ignora sobre algún rasgo propio o del bien intercambiado que pesa en el resultado final del intercambio[3].

Esta asimetría previa al contrato puede tener dos orígenes. Uno es que el mercado funciona mal porque no permite diferenciar unos bienes y servicios de otros, y el otro, que una de las partes oculte a propósito lo que sabe.

La consecuencia de esa asimetría es que la peor calidad desplaza a la mejor, hasta el punto de que pueden desaparecer algunos segmentos de un mercado o incluso el mercado entero.

3.2. Modelo de Akerlof (1970): el mercado de "limones"

Origen: George Akerlof (*The Market for "Lemons"*, 1970; Nobel 2001) toma como ejemplo la compraventa de coches usados. Una proporción α de ellos es de mala calidad y la restante, $1-\alpha$, de buena calidad, con $\alpha \in (0,1)$.

Idea: quien compra sin observar la calidad solo paga lo que vale un coche medio, y eso expulsa del mercado a los coches buenos hasta que solo se venden los malos ("limones").

3.2.1. Supuestos

Entorno: la información sobre la calidad de cada coche usado está repartida de forma asimétrica, porque solo la tiene quien vende y no quien compra. Hay dos calidades, coches buenos y limones, en proporciones conocidas, $1-\alpha$ y α.

Agentes: los dueños de coches usados, que conocen la calidad del suyo, y los compradores, numerosos y neutrales al riesgo. Cada coche vale más para el comprador que para su dueño, de modo que con información completa todos se venderían.

Mercado de bienes: competitivo y con un único precio para todos los coches, porque los compradores no distinguen calidades.

[3] Requiere heterogeneidad de la contraparte y conflicto de interés.

3.2.2. Modelo

Planteamiento: con calidad observable, cada coche se vendería por lo que vale para el comprador, p_A el bueno y p_B el malo ($p_A > p_B$). Como en realidad el comprador no sabe cuál le venden, solo paga por lo que espera recibir. Si cree que los coches en venta se reparten como el conjunto de los coches usados, ofrece la media ponderada de ambos valores, $p_C = (1-\alpha)p_A + \alpha p_B$.

Del lado de la oferta, quien tiene un coche bueno exige por él un precio mínimo, p_A^V, más alto que el que piden los dueños de coches malos.

Equilibrio: si el precio mínimo de los coches buenos supera lo que el comprador ofrece por un coche cualquiera ($p_A^V > p_C$), el mercado pasa de la situación inicial al equilibrio final en cuatro pasos:

1. *Situación inicial*: los compradores esperan la calidad media del conjunto de los coches usados y ofrecen p_C por cualquiera de ellos.

2. *Retirada de los coches buenos*: a ese precio, al propietario de un coche bueno no le compensa venderlo y lo saca del mercado, mientras que los limones se siguen ofreciendo[4].

3. *Revisión de las expectativas*: los compradores pagan p_C y comprueban que reciben limones, de modo que revisan a la baja la probabilidad que asignan a que un coche en venta sea bueno. Por la regla de Bayes, esa probabilidad es $(1-\alpha)s_A/[(1-\alpha)s_A + \alpha s_B]$, donde s_A y s_B son las fracciones de dueños de coches buenos y malos que venden al precio vigente. Como al precio p_C ningún dueño de un coche bueno vende ($s_A = 0$), la probabilidad pasa de $1-\alpha$ a cero.

4. *Equilibrio final*: los compradores ya solo ofrecen p_B, lo que vale un limón, y a ese precio solo se intercambian limones. Las expectativas se confirman, pero el mercado de coches buenos ha desaparecido.

Desarrollo gráfico: con un continuo de calidades, los mercados de coches buenos y de limones se condensan en uno solo, el de coches usados de calidad no observable, que se representa en el plano cantidad-precio (figura A13.4):

1. *Oferta*, $S(x)$: es creciente, porque cada vendedor solo ofrece su coche si el precio supera el valor que le atribuye, y los propietarios de coches mejores los valoran más. Por ello, al subir el precio entran en el mercado coches de mayor calidad y la calidad media de los coches en venta, θ, aumenta. Al bajar el precio, en cambio, se retiran primero los mejores coches.

2. *Demanda*, $D(x)$: los compradores no observan la calidad de cada coche, pero anticipan que la calidad media depende del precio. Sobre la cantidad demandada actúan, por tanto, dos efectos de signo contrario:

- *Efecto precio*: con la calidad dada, un precio más alto reduce la cantidad demandada, como en cualquier demanda ordinaria. Este efecto domina por encima de $\hat{p}$, y la demanda es decreciente en su tramo superior.

- *Efecto calidad*: un precio más alto indica que se ofrecen coches de mejor calidad media, lo que hace más atractiva la compra. Este efecto domina por debajo de $\hat{p}$, y la cantidad demandada aumenta con el precio en el tramo inferior.

La demanda tiene así dos pendientes y se "dobla" en $\hat{p}$, el precio al que la cantidad demandada es máxima.

[4] La oferta de limones genera una externalidad negativa, porque sus vendedores rebajan la calidad media percibida y, con ella, el precio que se paga por todos los coches.

3. *Equilibrios*: la oferta corta a la demanda en dos puntos. En el equilibrio 0, al precio p_0, se venden $x(\overline{\theta})$ coches con una calidad media alta, $\overline{\theta}$, porque aún se ofrecen coches buenos. En el equilibrio 1, al precio p_1, solo se venden $x(\underline{\theta})$ coches, de calidad media baja, $\underline{\theta}$, y el mercado queda reducido a los limones.

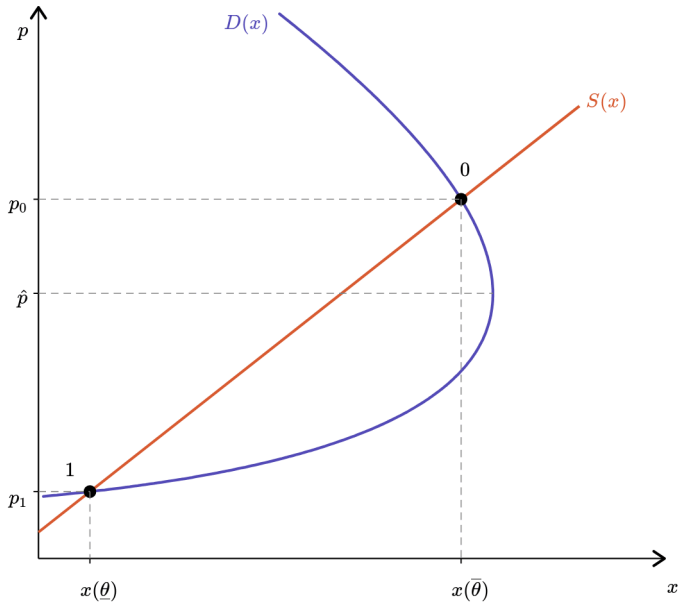


Figura A13.4: Mercado de limones (Akerlof, 1970), representado como un único mercado de coches usados cuya calidad no observan los compradores. Como el precio determina la calidad media ofrecida, θ, la demanda $D(x)$ crece con el precio hasta $\hat{p}$ y decrece después. Su corte con la oferta $S(x)$ da dos equilibrios. En 0, al precio p_0, se venden $x(\overline{\theta})$ coches, con calidad media alta, $\overline{\theta}$, porque se incluyen los de alta calidad. En 1, al precio p_1, solo $x(\underline{\theta})$, los de baja calidad ($\underline{\theta}$), y el mercado casi desaparece.

Estática comparativa: el resultado depende de la proporción de limones y de la distancia entre lo que vale un coche bueno para el comprador y para su dueño. Los coches buenos solo se venden si $p_C \geq p_A^V$, es decir, si la proporción de limones no supera $\alpha^* = (p_A - p_A^V)/(p_A - p_B)$. Cuanto mayor es α, menor es el precio medio que ofrecen los compradores y más probable es la expulsión de los coches buenos.

Dinámica: con un continuo de calidades, los equilibrios 0 y 1 se sostienen por sí mismos, porque en cada uno la calidad media que se ofrece al precio vigente coincide con la que esperan los compradores (Wilson, 1980). Ninguna fuerza interna del modelo empuja el mercado de 0 a 1, y cuál de los dos se alcanza depende de las expectativas. Si una perturbación lleva a los compradores a esperar una calidad suficientemente menor, ofrecen un precio más bajo, los dueños de los mejores coches los retiran y la calidad media cae, lo que confirma la revisión. Una ola de pesimismo puede llevar así el mercado de 0 a 1, en el que solo se intercambian limones. La expulsión de los coches buenos de los cuatro pasos del equilibrio es, en cambio, endógena, porque con dos calidades y $p_A^V > p_C$ el precio p_C no es un equilibrio.

Bienestar: con información simétrica, cada calidad tendría su mercado y su precio, y el resultado sería eficiente en el sentido de Pareto. Con información asimétrica, en cambio, el equilibrio no es

un óptimo de Pareto, ya que existen intercambios mutuamente beneficiosos (los coches buenos a un precio intermedio entre p_A^V y p_A) que no se realizan porque la asimetría impide que el precio los señale. La pérdida de eficiencia de la selección adversa se mide, así, por el excedente de los intercambios que desaparecen.

3.2.3. Conclusiones

Aspectos positivos: las ideas del modelo son de alcance general y admiten múltiples aplicaciones y extensiones. De hecho, la selección adversa que Akerlof analizó con calidades heterogéneas en un mercado de segunda mano puede trasladarse igualmente al mercado de trabajo, con trabajadores heterogéneos, o al de seguros, con clientes heterogéneos.

Limitaciones: el modelo supone que la calidad es exógena y que los compradores solo conocen su distribución. Sin embargo, con garantías, reputación o inspección previa, la asimetría se reduce, y el colapso total que predice el modelo es un caso extremo del que muchos mercados escapan con las soluciones del apartado 3.4.

3.3. Aplicaciones

La teoría de la selección adversa tiene múltiples aplicaciones, y el propio Akerlof (1970) la extendió ya al seguro médico de los mayores de 65 años y al crédito en los países en desarrollo. Todas las aplicaciones tienen la estructura del mercado de limones, en la que un precio basado en la calidad media expulsa a los mejores tipos, y el remedio consiste en hacer observable el tipo o en lograr que el agente lo revele.

- *Mercados de seguros*: con una prima única, calculada para el riesgo medio, los asegurados de bajo riesgo abandonan el seguro, la prima sube y el proceso se repite (*espiral de selección adversa*). Por ejemplo, en la Universidad de Harvard, a mediados de los años noventa, los empleados pasaron a pagar íntegramente el sobrecoste del seguro médico más generoso. En respuesta, los empleados más jóvenes y de menor gasto abandonaron ese seguro, y en tres años dejó de ofrecerse (Cutler y Reber, 1998). La respuesta es el seguro obligatorio, que mantiene a todos los tipos en el mismo fondo (responsabilidad civil del automóvil, sanidad pública), o un menú de pólizas que los separa.

- *Mercado de crédito*: el prestamista no distingue los proyectos seguros de los arriesgados. Si sube el tipo de interés, abandonan primero los prestatarios con proyectos más seguros, cuyo beneficio esperado, con responsabilidad limitada, es menor, y empeora la calidad media de la cartera. Este efecto selección se suma al de incentivos del apartado 2.3 y completa el racionamiento del crédito de Stiglitz y Weiss (1981), desarrollado en el tema A42, apartado 2.3.1. Las garantías sirven de instrumento de autoselección, pues el prestatario de bajo riesgo, que tiene menos probabilidad de perderlas, acepta aportar más colateral a cambio de un tipo menor (Bester, 1985).

- *Financiación de la empresa*: los directivos conocen mejor que los inversores el valor de la empresa y solo quieren emitir acciones si están sobrevaloradas. Por ello, el mercado recibe el anuncio de una ampliación de capital como una mala noticia, y las empresas prefieren la autofinanciación a la deuda, y esta a las acciones (jerarquía financiera de Myers y Majluf, 1984, tema B03, apartado 2.4).

- *Mercado de trabajo*: el empleador no observa la productividad de los candidatos, cuyo salario de reserva crece con ella. Si baja el salario, se marchan primero los más productivos, por lo que el empleador puede preferir pagar por encima del salario de vaciado del mercado (salarios de

eficiencia por selección adversa, tema A27, apartado 3.1). Los periodos de prueba y la educación como señal reducen la asimetría.

3.4. Soluciones al problema de selección adversa

Los estudios de Michael Spence (1973, 1974), sobre la señalización, y de Michael Rothschild y Joseph Stiglitz (1976), sobre la autoselección, dieron lugar a dos tipos de soluciones para los problemas de selección adversa. Las dos se apoyan en mejorar la circulación de la información para que ambas partes salgan ganando:

1. *Señalización* (*signaling*): el agente toma la iniciativa e intenta transmitir mediante acciones observables información sobre aquellas características suyas que no lo son. Funciona como señal cualquier rasgo visible que el agente elige y cuya adquisición le resulta costosa.

2. *Autoselección o filtro* (*screening*): el principal toma la iniciativa y diseña mecanismos que separan los distintos tipos de agentes, de manera que cada agente revela su tipo con su elección. Su análisis formal se apoya en el *principio de revelación* de Myerson (1979). Según este principio, al diseñar el contrato óptimo, el principal puede restringir sin pérdida de generalidad el menú de contratos a aquellos que incentivan a los agentes a revelar verazmente sus características. Los agentes revelarán la información correcta cuando decir la verdad sea su mejor estrategia. Este mecanismo se aplica después a la regulación de los monopolios naturales (Laffont y Tirole, 1986).

3.4.1. Señalización en el mercado de trabajo (Spence, 1973)

Origen: Michael Spence (1973, 1974), Nobel 2001 junto con Akerlof y Stiglitz, formuló el primer modelo en el que la parte informada emite una señal costosa para revelar su tipo.

Idea: ¿cómo puede ser que en muchas ofertas de empleo se pida tener título universitario, pero no se especifique cuál? La educación demuestra la capacidad de aprendizaje de los individuos y, así, es señal de las cualidades del trabajador.

Supuestos:

- *Entorno*: el modelo describe un mercado de trabajo con información asimétrica previa al contrato. Cada trabajador es de tipo A, de alta productividad, o de tipo B, de baja productividad ($\text{Pmg}_{L,A} > \text{Pmg}_{L,B}$). Los dos tipos son igual de numerosos en la población. Las empresas no saben de antemano a qué tipo pertenece cada trabajador, pero sí observan su educación, h, que se aproxima con indicadores como los años de escolarización o los títulos obtenidos.

- *Tecnología*: Spence supone que educarse resulta más caro para los trabajadores menos productivos[5], aunque la educación no altera la productividad de nadie[6].

Planteamiento: sin señales, la empresa no sabe de qué tipo es cada trabajador. A diferencia de lo que ocurriría en un mercado competitivo con información simétrica, el de tipo A cobra entonces menos de lo que produce y el de tipo B, más[7].

Los agentes pueden elegir su nivel de educación, h, antes de ser contratados. Cada tipo de agente elige o bien educarse ($h = h^*$) o no educarse ($h = 0$). La elección se reduce a esas dos opciones porque el valor de la educación como señal es el mismo para cualquier nivel $h \geq h^*$ (y nulo por debajo), si bien el coste de la educación aumenta con el nivel de educación.

[5] Coste en términos financieros, de oportunidad o desutilidad.
[6] De lo contrario, un agente de tipo B podría pasar a ser un agente de tipo A.
[7] La empresa, en incertidumbre, ofrece un salario medio.

Las empresas parten de unas creencias previas que asocian el tipo de cada trabajador a su educación, con un umbral de referencia, h^*. A quien alcanza al menos ese umbral ($h \geq h^*$) lo tratan como tipo A y le pagan w_A, y a quien se queda por debajo ($h < h^*$), como tipo B, con un salario $w_B < w_A$.

Para que la señal separe deben cumplirse dos condiciones. Según la restricción de incentivos de A, el salario del trabajador productivo, neto del coste de educarse, no debe quedar por debajo del que obtendría sin educarse ($w_A - c_A(h^*) \geq w_B$). Según la de B, al trabajador poco productivo no educarse le ha de dejar estrictamente más que educarse ($w_B > w_A - c_B(h^*)$).

De las restricciones se desprenden varias implicaciones. La condición necesaria para la existencia del equilibrio separador es que el coste de educarse del agente A sea menor que el de B ($c_A(h^*) < c_B(h^*)$), lo cual se cumple por hipótesis. No obstante, el equilibrio no es único, porque las restricciones admiten varios equilibrios según el diferencial salarial y el umbral h^* que fijen las creencias.

Equilibrio: de las restricciones de incentivos se desprenden tres equilibrios posibles:

1. *Equilibrio agrupador con educación* ($w_A - w_B \geq c_B(h^*)$): si el diferencial salarial es al menos equivalente al coste de educarse de B, ambos agentes elegirán educarse. Por tanto, la señal no distingue. En esta versión simplificada los salarios vienen dados por las creencias previas de las empresas, mientras que con creencias consistentes todos los trabajadores cobrarían en el equilibrio agrupador el salario medio.

2. *Equilibrio agrupador sin educación* ($w_A - w_B < c_A(h^*)$): si el diferencial salarial es menor que el coste de educarse de A, ningún agente elegirá educarse.

3. *Equilibrio separador* ($c_B(h^*) > w_A - w_B \geq c_A(h^*)$): si el diferencial salarial es menor que el coste de educarse de B, pero al menos equivale al coste de educarse de A, entonces solo A se educa. La señal funciona porque es costosa en su justa medida.

Desarrollo gráfico: los equilibrios de la señalización se representan en el plano educación-salarios (figura A13.5):

1. *Costes de educarse*, $c_A(h)$ y $c_B(h)$: los del agente B son mayores que los del agente A para cualquier nivel de educación.

2. *Diferencial salarial*, $w_A - w_B$: es una recta horizontal, pues no depende de la educación.

3. *Equilibrios*: los puntos de corte entre la recta del diferencial salarial y las funciones de costes, $\underline{h}$ con $c_B(h)$ y $\overline{h}$ con $c_A(h)$, determinan las tres zonas en las que se pueden producir los diferentes equilibrios. El equilibrio es agrupador con educación si $h^* \leq \underline{h}$, separador si $\underline{h} < h^* \leq \overline{h}$ y agrupador sin educación si $h^* > \overline{h}$.

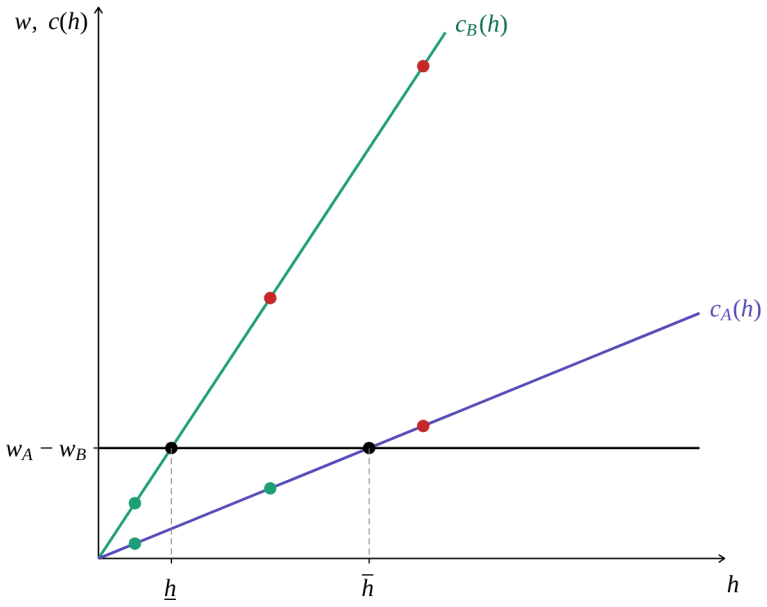


Figura A13.5: Señalización (Spence, 1973). El diferencial salarial $w_A - w_B$ corta las curvas de coste de educarse $c_B(h)$ y $c_A(h)$ en $\underline{h}$ y $\overline{h}$. Esos umbrales delimitan las zonas de equilibrio agrupador con educación ($h^* \leq \underline{h}$), separador ($\underline{h} < h^* \leq \overline{h}$), en el que solo los trabajadores de alta productividad se educan, y agrupador sin educación ($h^* > \overline{h}$).

Estática comparativa: como los costes de educarse son crecientes en h, todo lo que eleva la recta del diferencial o baja las curvas de costes desplaza a la derecha los cortes $\underline{h}$ y $\overline{h}$:

- *Mayor diferencial salarial*, $w_A - w_B$: para un umbral h^* dado, la economía puede pasar del agrupador sin educación al separador y, si el diferencial sigue creciendo, del separador al agrupador con educación, porque también al tipo B le compensa educarse.

- *Educación más barata* (menores $c_A(h)$ y $c_B(h)$): el efecto es el mismo. Si las empresas no elevan h^*, la señal puede dejar de separar, y para mantener la separación el umbral ha de subir.

- *Mayor diferencia de costes entre tipos*: amplía la zona separadora, $(\underline{h}, \overline{h}]$, y hace la señal más robusta.

Bienestar: el equilibrio agrupador sin educación es eficiente en el sentido de Pareto, pues nadie incurre en el coste de una señal que no aumenta la productividad, mientras que el agrupador con educación despilfarra recursos. Como la señal supone un coste, el equilibrio separador introduce una distorsión en términos de bienestar. Así, la solución descentralizada al problema de selección adversa basada en la señalización constituye una solución de *second best*.

Ahora bien, si el umbral h^* es el mínimo compatible con la separación (el más próximo a $\underline{h}$), se alcanza el equilibrio separador de menor coste (Riley, 1979), que es Pareto-superior a los demás equilibrios separadores. Alternativamente, también se podría alcanzar una solución Pareto-óptima si un planificador benevolente fija subsidios cruzados.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: las ideas de Spence sostienen los argumentos a favor de una educación más exigente, que evite que las señales sean percibidas como poco costosas. El modelo explica, además, el *efecto diploma* (*sheepskin effect*), por el que los trabajadores con título perciben un salario mayor que los que carecen de él aunque el título no haya aumentado su productividad.

- *Limitaciones*: el supuesto de que la educación no altera en absoluto la productividad es, cuando menos, exigente, y en ello difieren Spence y Becker. Para Spence, la productividad alta causa más educación, que actúa como señal y permite obtener más salario, mientras que para Becker (capital humano), la educación causa más productividad, que causa más salario (tema A25).

3.4.2. Autoselección y filtro (Rothschild y Stiglitz, 1976)

> El desarrollo analítico del modelo (programa, CPO, equilibrio, representación gráfica y extensiones) se recoge en el Anexo. Para la exposición basta con la idea y el razonamiento que siguen.

Origen: Michael Rothschild y Joseph Stiglitz (1976) formularon el modelo canónico de criba en el mercado de seguros, con aseguradoras en competencia. En cambio, la versión con un único principal que se presenta aquí, el *cribado monopolístico*, procede de Mussa y Rosen (1978) y de Maskin y Riley (1984).

Idea: el principal ofrece un menú de contratos diseñado de modo que cada tipo esté mejor con el contrato pensado para él, y los agentes se autoseleccionan al elegir.

Razonamiento: en el mercado de trabajo, el principal no observa si el agente es de tipo A, más productivo, o de tipo B, al que el esfuerzo le pesa más. El principal ofrece un par esfuerzo-salario para cada uno. El tipo A tendría interés en hacerse pasar por B, cuyo contrato exige menos esfuerzo. Para impedirlo, el principal exige al tipo B menos esfuerzo del eficiente, lo que hace su contrato poco atractivo para A. Además, el principal deja al tipo A una *renta informacional*, una utilidad por encima de su utilidad de reserva. El resultado es un equilibrio separador de *second best*, eficiente en el contrato del tipo alto y distorsionado en el del tipo bajo.

Con aseguradoras en competencia, como en el modelo original, tampoco hay equilibrio agrupador y la distorsión recae en los asegurados de bajo riesgo, que solo obtienen cobertura parcial, aunque en ese caso nadie obtiene renta informacional.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el modelo muestra que la parte no informada puede inducir a la informada a revelar su tipo mediante un menú de contratos. En su versión original de seguros, el menú combina cobertura completa cara (elegida por los de alto riesgo) y cobertura parcial barata (elegida por los de bajo riesgo). El menú explica así la estructura real de las pólizas, con franquicias y límites de cobertura como instrumentos de autoselección.

- *Limitaciones*: el equilibrio separador impone un coste al tipo bajo, pues el asegurado de bajo riesgo queda infraasegurado y el trabajador poco productivo recibe un contrato distorsionado. Además, en el mercado de seguros el equilibrio separador puede no existir cuando la proporción de agentes de bajo riesgo es alta, de modo que el mercado carece de equilibrio de Nash. No obstante, los refinamientos posteriores restauran la existencia a costa de modificar el concepto de equilibrio.

3.4.3. Aplicación a la regulación (Laffont y Tirole, 1986)

> El modelo de Laffont y Tirole (1986), con el programa del regulador, su CPO y su CSO, se desarrolla en el tema A15, apartado 2.3.3, y sus implicaciones para la política regulatoria, en el tema A20, apartado 2.2.2. Aquí se presenta como aplicación del mecanismo de autoselección.

Origen: el mecanismo de autoselección del apartado anterior se aplica también a la regulación de los monopolios naturales. Jean-Jacques Laffont y Jean Tirole (1986) parten de un regulador que no conoce la eficiencia intrínseca de la empresa regulada (selección adversa) ni observa el esfuerzo con que la empresa reduce sus costes (riesgo moral).

Idea: la regulación óptima es un menú de contratos.

Razonamiento: la empresa eficiente se autoselecciona en un contrato de precio fijo, con incentivos plenos y una renta informacional. La ineficiente, en cambio, elige un contrato con mayor reembolso de costes, de menor potencia de incentivos y sin renta.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el modelo reúne en un solo marco los dos fallos de información de este tema y muestra que la respuesta a ambos es la misma, un menú diseñado mediante el principio de revelación. La contrapartida es una renta informacional que el regulador no puede evitar.

- *Limitaciones*: el modelo es estático y supone un regulador benevolente con capacidad de compromiso. Si el regulador usa la información revelada para endurecer la regulación futura (efecto trinquete), la empresa deja de revelar su tipo, y si la industria captura al regulador, la regulación deja de perseguir el bienestar social. Además, el diseño del menú exige que el regulador conozca la distribución de los tipos de empresa.

3.5. Conclusiones

Aspectos positivos: la selección adversa explica por qué mercados que deberían funcionar (seguros, crédito, bienes de segunda mano, trabajo) se contraen o desaparecen. Las soluciones al problema (señalización, autoselección, menús de contratos) son hoy el fundamento del diseño de contratos y de la regulación con información asimétrica. El principio de revelación unifica las soluciones de autoselección, ya que cualquier mecanismo puede replicarse con uno en el que a los agentes les interese decir la verdad.

Limitaciones: las soluciones descentralizadas son de *second best* (la señal y la autoselección tienen un coste real), y los equilibrios son a menudo múltiples, por lo que su selección exige refinamientos. Además, los modelos suponen que los tipos son fijos y los agentes racionales. En cambio, con tipos endógenos o racionalidad limitada, la información asimétrica puede ser menos o más grave de lo que predicen los modelos.

Conclusiones

El tema ha estudiado las relaciones en que una parte sabe algo relevante que la otra no observa. El modelo principal-agente con información simétrica fija la referencia de eficiencia. Con riesgo moral, el principal no observa lo que el agente hace, y el pago ha de depender del resultado para inducir el esfuerzo, a costa de un peor reparto del riesgo. Con selección adversa, no observa lo que el agente es, y un precio basado en la calidad media puede expulsar del mercado a los mejores tipos. La señalización, la autoselección, la supervisión y la competencia por comparación mitigan estos problemas, siempre en un *second best*. La información asimétrica es, así, un fallo de mercado, condición necesaria pero no suficiente para intervenir, y varios premios Nobel reflejan su importancia (Akerlof, Spence y Stiglitz, 2001; Tirole, 2014; Hart y Holmström, 2016; Milgrom y Wilson, 2020).

Los modelos de información asimétrica combinan la utilidad esperada y la aversión al riesgo (tema A10) con la teoría de juegos, que formaliza la señalización como equilibrio bayesiano perfecto (tema A14). Su alcance es muy amplio. Dentro de la empresa, la agencia y los contratos incompletos explican su organización y sus límites (tema A15), y, frente a ella, el regulador que no conoce sus costes ha de diseñar contratos que revelen esa información (tema A20). En el análisis del bienestar, la información imperfecta es uno de los fallos de mercado que invalidan los teoremas fundamentales (tema A23). En macroeconomía, por último, explica por qué las empresas pagan salarios superiores al de equilibrio (tema A27) y por qué los bancos racionan el crédito en lugar de subir el tipo de interés, un canal de amplificación del ciclo (tema A42).

Los sistemas de valoraciones de las plataformas digitales generan la reputación que permite comerciar entre desconocidos, aunque sufren sesgos que limitan su información (Tadelis, 2016). Por su parte, la economía de los datos estudia la información como bien que se compra y se vende (Bergemann y Bonatti, 2019). Como los datos de un usuario revelan información sobre otros, su precio puede ser demasiado bajo y llevar a compartir más datos de lo eficiente (Acemoglu, Makhdoumi, Malekian y Ozdaglar, 2022). En el diseño de información, la persuasión bayesiana se distingue de la señalización porque el emisor no elige una acción costosa conociendo su tipo, sino que se compromete de antemano con la información que revelará al receptor (Kamenica y Gentzkow, 2011).

Anexo. Modelo de autoselección con un único principal

El anexo desarrolla el modelo de autoselección del apartado 3.4.2, en la versión con un único principal aplicada al mercado de trabajo, y recoge sus extensiones.

Supuestos:

▪ *Entorno*: información asimétrica previa al contrato. El agente puede ser de tipo A (más productivo, al que se destina el contrato (e_A, w_A)) o de tipo B (menos productivo, contrato (e_B, w_B)), con probabilidad p de que sea de tipo A. El esfuerzo es verificable *a posteriori*, pero el empresario no observa el tipo.

▪ *Agentes*: el principal es neutral al riesgo y su ingreso depende del esfuerzo, $x(e)$. Los dos tipos valoran el salario y sufren desutilidad por el esfuerzo, pero al tipo B este le pesa más, $\gamma \cdot v(e)$ con $\gamma > 1$.

Planteamiento: el mismo mecanismo se aplica aquí al mercado de trabajo, con un único principal en lugar de aseguradoras en competencia, para mantener el marco de los supuestos comunes. Aplicando el principio de revelación, el principal diseña un menú de dos contratos:

$$\max_{e_A, w_A, e_B, w_B} p \cdot [x(e_A) - w_A] + (1-p) \cdot [x(e_B) - w_B]$$

$$\text{s.a.:} \begin{cases} w_A - v(e_A) \geq \underline{u} \\ w_B - \gamma \cdot v(e_B) \geq \underline{u} \\ w_A - v(e_A) \geq w_B - v(e_B) \\ w_B - \gamma \cdot v(e_B) \geq w_A - \gamma \cdot v(e_A) \end{cases}$$

donde (e_A, w_A) y (e_B, w_B) son los pares esfuerzo-salario destinados a los tipos A y B, p la probabilidad de que el agente sea de tipo A, $x(e)$ el ingreso del empresario en función del esfuerzo y $\underline{u}$ la utilidad de reserva, común a los dos tipos (en la figura, $\underline{u}_A$ y $\underline{u}_B$ son sus curvas de reserva). Las dos primeras restricciones son las de participación (cada tipo acepta su contrato), y las dos últimas, las de incentivos o autoselección (ninguno prefiere el contrato del otro al suyo). El principal busca el mayor beneficio esperado sujeto a que cada tipo, a la vista del menú, acepte participar y escoja el contrato pensado para él.

CPO: por el método de Kuhn-Tucker, en el óptimo se cumplen con igualdad la restricción de participación del tipo B, que queda sin renta, y la de incentivos del tipo A, y las otras dos se satisfacen solas. La de incentivos de A es activa porque el tipo productivo tendría interés en hacerse pasar por B, es decir, en elegir el contrato de B, de menor esfuerzo, y obtener con él una renta informacional, ya que a A el esfuerzo le cuesta menos. De esas dos restricciones salen los salarios, $w_B = \underline{u} + \gamma \cdot v(e_B)$ y $w_A = \underline{u} + v(e_A) + (\gamma - 1) \cdot v(e_B)$, y, sustituidos en el objetivo, Π, las condiciones para los esfuerzos son:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial e_A} = p \left[\frac{dx}{de}\Big|_{e_A} - \frac{dv}{de}\Big|_{e_A} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \ \frac{dx}{de}\Big|_{e_A} = \frac{dv}{de}\Big|_{e_A}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial e_B} = (1-p) \left[\frac{dx}{de}\Big|_{e_B} - \gamma \frac{dv}{de}\Big|_{e_B} \right] - p\,(\gamma - 1) \frac{dv}{de}\Big|_{e_B} = 0$$

$$\Rightarrow \ \frac{dx}{de}\Big|_{e_B} = \left[\gamma + \frac{p\,(\gamma - 1)}{1-p} \right] \frac{dv}{de}\Big|_{e_B}$$

El tipo A se esfuerza hasta que el ingreso marginal iguala su desutilidad marginal, como con información simétrica. En cambio, al tipo B se le pide menos, porque cada unidad de su esfuerzo eleva también la renta informacional del tipo A, $(\gamma - 1) \cdot v(e_B)$, que el principal paga con probabilidad p.

CSO: como en los modelos anteriores, se supone el problema de buen comportamiento (x cóncava en el esfuerzo, desutilidad del esfuerzo convexa), de modo que el programa es cóncavo y las condiciones de Kuhn-Tucker (tema A08, apartado 1.4.1) caracterizan el menú óptimo.

Equilibrio: para impedir que el tipo A se haga pasar por B, el principal distorsiona el contrato del tipo B, al que exige menos esfuerzo del eficiente, lo que lo hace poco atractivo para A. Además, deja al tipo A una *renta informacional*, una utilidad por encima de su utilidad de reserva. El resultado es un equilibrio separador de *second best*, eficiente en el contrato del tipo alto y distorsionado en el del tipo bajo.

Desarrollo gráfico: en el plano esfuerzo-salario (e, w) (figura A13.6), las curvas de indiferencia del tipo B, $w - \gamma \cdot v(e)$, son más inclinadas que las del tipo A, $w - v(e)$, porque a B el esfuerzo le cuesta más. Los contratos de primer óptimo, A^* y B^*, están donde la curva de reserva de cada tipo es tangente a una curva isobeneficio del principal. En el menú de *second best*, el contrato del tipo B (punto B) se sitúa sobre su curva de reserva, $\underline{u}_B$, con $e_B < e_B^*$, y el del tipo A (punto A) mantiene el esfuerzo eficiente, e_A^*, sobre la curva u_A que pasa por B. La distancia vertical entre u_A y la curva de reserva de A, $\underline{u}_A$, es la renta informacional.

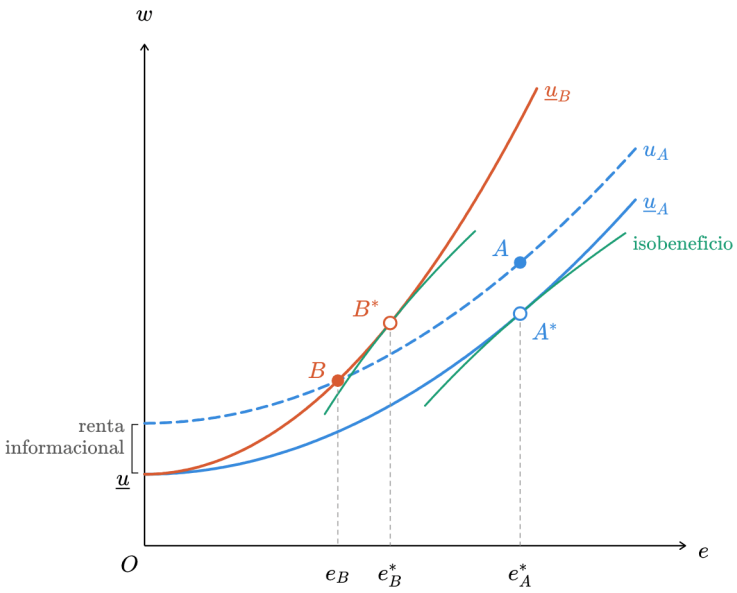


Figura A13.6: Autoselección en el mercado de trabajo (adaptación con un único principal del mecanismo de Rothschild y Stiglitz, 1976). Las curvas de indiferencia del tipo B, $w - \gamma \cdot v(e)$, son más inclinadas que las del tipo A, $w - v(e)$, y en los contratos de primer óptimo, A^* y B^*, la curva de reserva de cada tipo es tangente a una isobeneficio del principal. En el menú de *second best*, el contrato de B, sobre su curva de reserva $\underline{u}_B$, exige un esfuerzo inferior al de primer óptimo, y el de A mantiene e_A^* sobre la curva u_A que pasa por B, con una renta informacional sobre $\underline{u}_A$.

Extensiones: los resultados cambian cuando compiten varios principales, como en el modelo original de seguros, y el mecanismo explica además dos regularidades del mercado de trabajo:

- *Competencia entre aseguradoras* (Rothschild y Stiglitz, 1976): con muchas aseguradoras neutrales al riesgo y libre entrada, cada contrato tiene beneficio esperado nulo. No hay equilibrio agrupador, porque frente a cualquier póliza común una aseguradora puede ofrecer otra con menos cobertura y menos prima que solo atrae a los de bajo riesgo. En el equilibrio separador, los de alto riesgo obtienen cobertura completa a su prima justa, sin distorsión, y los de bajo riesgo, la máxima cobertura parcial a su prima justa que no tienta a los de alto riesgo, cuya restricción de incentivos es la activa. Nadie obtiene renta informacional, a diferencia de lo que ocurre con un único principal, y la distorsión recae, como allí, en el tipo al que el otro querría imitar, aquí el de bajo riesgo. Además, el equilibrio puede no existir si hay muchos asegurados de bajo riesgo, porque entonces una póliza común a la prima media atraería a ambos tipos.

- *Grilletes dorados* (Salop y Salop, 1976): perder a un trabajador ya formado sale caro, así que la empresa retrasa la recompensa. Paga poco al principio y promete después subidas por encima de las del mercado, condiciones que solo convienen a quien piensa quedarse. El perfil temporal del salario sirve así para filtrar a los candidatos y para retenerlos.

- *Menú de salario fijo y variable* (Lazear, 1986): los trabajadores más productivos tienen mejores alternativas fuera, y por eso la empresa ofrece elegir entre una retribución fija y otra que crece con el rendimiento. El poco productivo se queda con la fija y el productivo con la variable, que mejora sus ofertas externas. Cada uno revela así su tipo sin que la empresa lo observe, aunque el productivo conserva una renta informacional.

A14. Teoría de juegos

Teoría de juegos. Principales conceptos. Aplicaciones, con especial referencia a las subastas.

Introducción

Buena parte de la teoría económica moderna descansa sobre la **teoría de juegos**, que permite modelizar la *interdependencia estratégica* entre agentes, y el **análisis intertemporal**, que permite modelizar el *tiempo*, dos herramientas analíticas que no pertenecen a ningún campo concreto, sino que atraviesan todos ellos. Con la primera se analiza cómo elige un agente cuando lo que obtiene está condicionado por las elecciones de otros, y con la segunda, cómo elige cuando sus decisiones, como consumir o ahorrar, invertir o endeudarse, tienen efectos que se prolongan durante varios periodos.

Ambas herramientas tienen orígenes antiguos, pero su formalización es propia del siglo XX. En el terreno estratégico, los **modelos de duopolio** de Cournot (1838) y de Bertrand (1883) anticiparon el razonamiento de la teoría de juegos. Esta se constituye, sin embargo, como disciplina con *Theory of Games and Economic Behavior* (1944) de John von Neumann y Oskar Morgenstern y alcanza su concepto de solución central con el equilibrio de John Nash (1950). Reinhard Selten, con sus refinamientos para los juegos dinámicos, y John Harsanyi, con su extensión a los juegos con información incompleta, compartieron con Nash el Premio Nobel de 1994. Esas aportaciones hicieron de la teoría de juegos el lenguaje de la organización industrial, la economía de la información, el diseño de mecanismos y las negociaciones internacionales.

En el terreno intertemporal, Irving Fisher (*The Theory of Interest*, 1930) ofreció el primer análisis riguroso de la **elección entre consumo presente y futuro**. Frank Ramsey (1928) había planteado ya el problema del ahorro óptimo de una economía a lo largo de un **horizonte infinito**, que Cass y Koopmans (1965) integraron en la teoría del crecimiento. Frente a ese horizonte infinito, Paul Samuelson (1958) y Peter Diamond (1965) propusieron la alternativa de las **generaciones solapadas**, en la que los agentes tienen vida finita. Estas herramientas pasaron al centro de la macroeconomía a raíz de la crítica de Lucas (1976), que exigió que los modelos agregados se derivaran de las decisiones óptimas de agentes que miran hacia el futuro, y de esa exigencia proceden los modelos dinámicos de equilibrio general que hoy utilizan los bancos centrales.

Este tema desarrolla la primera de esas dos herramientas, la teoría de juegos. En competencia perfecta los agentes toman el precio como dado, y en el monopolio hay un único decisor. La teoría de juegos se ocupa, en cambio, de la *interdependencia estratégica*[1]. Su ámbito va desde el oligopolio (tema A19) y la economía de la información (tema A13) hasta la negociación internacional y el diseño de subastas, que hoy se emplean para colocar deuda pública o adjudicar licencias de espectro radioeléctrico.

[1] Las mejores acciones pueden depender de acciones ya tomadas, de acciones simultáneas esperadas o de futuras acciones que resulten de las presentes.

El tema expone las bases de la teoría de juegos, organizadas en los tres bloques que siguen:

- *Fundamentos*: qué es un juego y cómo se resuelve.
- *Aplicaciones*: los juegos representativos de cada entorno.
- *Subastas*: su teoría y sus aplicaciones.

1. Fundamentos de la teoría de juegos: elementos, estrategias y conceptos de solución

Antes de analizar juegos concretos (apartado 2) conviene fijar los elementos de un juego, sus tipos y representaciones, la noción de estrategia y los conceptos de solución.

1.1. Definición y elementos básicos de un juego

Un **juego** es la representación formal de una situación en la que un número determinado de individuos interactúa en un entorno de interdependencia estratégica. La *solución* al juego representa una predicción de cómo jugarán los agentes.

Todo juego queda definido por una serie de elementos que pueden agruparse en cuatro categorías principales:

1. *Conjunto de jugadores* ($N = \{1, 2, ..., n\}$): individuos, empresas o países, generalmente en número fijo.

2. *Reglas*:

- *Conjunto de acciones* disponibles para cada jugador i: A_i.

- *Temporalidad*: el juego puede ser simultáneo o secuencial.

- *Información*: qué sabe cada jugador en cada momento, tanto sobre las características del juego (pagos, tipos de los rivales) como sobre las acciones ya tomadas.

- *Compromisos vinculantes*: si los acuerdos entre jugadores son vinculantes, el juego es cooperativo, y si no lo son, no cooperativo. El caso extremo de conflicto de intereses son los juegos de suma cero, en los que lo que gana un jugador lo pierde el otro[2].

3. *Resultados*: para cada combinación de acciones, el desenlace del juego.

4. *Pagos*: las preferencias de los jugadores sobre los resultados, representadas como funciones de utilidad cardinal. La función de pagos $u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$ asigna a cada perfil de estrategias un pago para el jugador i.

1.2. Tipos de juego y sus representaciones

Los juegos pueden clasificarse según varios criterios:

Según el tratamiento del tiempo:

- *Juegos estáticos*: los jugadores eligen sus acciones simultáneamente (o, de forma equivalente, sin observar las elecciones de los demás) y el juego se resuelve de una sola vez.

- *Juegos dinámicos*: las decisiones se toman secuencialmente, de modo que al menos un jugador observa alguna acción previa de otro antes de decidir. Son de dos clases:

  - *Secuenciales*: el juego se juega una sola vez, por turnos, como el juego de entrada (apartado 2.3.1) o la negociación de Rubinstein (apartado 2.4.3).

[2] La interdependencia estratégica no se limita al conflicto, pues existen juegos de coordinación pura, con intereses plenamente alineados.

- *Repetidos*: un mismo juego estático, el juego de etapa, se juega varias veces, en horizonte finito o infinito (apartados 2.3.2 y 2.3.3).

Según el contexto informativo: cabe distinguir el conocimiento sobre el juego en sí (información completa frente a incompleta) y sobre las acciones de los otros jugadores (información perfecta frente a imperfecta):

▪ *Juegos con información completa*: todos los jugadores conocen jugadores, estrategias y pagos, y se supone *conocimiento común* (Aumann, 1976), es decir, que cada uno sabe que los demás lo saben, y así *ad infinitum*.

▪ *Juegos con información incompleta*: algún jugador desconoce alguna característica relevante del juego, típicamente los pagos (o el "tipo") de algún rival. Se modelizan con la transformación de Harsanyi.

▪ *Juegos con información perfecta*: al decidir, cada jugador conoce todas las acciones previas, de modo que cada conjunto de información tiene un solo nodo.

▪ *Juegos con información imperfecta*: algún jugador decide sin observar alguna acción previa, como en los juegos simultáneos (apartado 2.2.1).

Según la posibilidad de acuerdos vinculantes:

▪ *Juegos no cooperativos*: la unidad de análisis es el jugador individual y no existen mecanismos externos que hagan exigibles los acuerdos, de modo que cualquier cooperación debe sostenerse en los propios incentivos.

▪ *Juegos cooperativos*: la unidad de análisis es la coalición y los acuerdos son vinculantes. La pregunta relevante ya no es qué estrategia jugar, sino cómo repartir las ganancias de la cooperación.

Un juego admite, además, dos representaciones principales:

Representación normal, matricial o estratégica: una matriz de pagos que muestra las estrategias y los pagos de cada combinación. Por ejemplo, para dos jugadores con dos estrategias cada uno (donde el primer elemento de cada celda es el pago del jugador 1, que elige fila, y el segundo el del jugador 2, que elige columna):

Tabla A14.1: Representación normal de un juego de dos jugadores con dos estrategias.

	Izquierda	Derecha
Arriba	(3, 3)	(0, 4)
Abajo	(4, 0)	(1, 1)

Representación en forma extensiva: un diagrama de árbol que muestra la secuencia de decisiones, los nodos de decisión de cada jugador, la información disponible en cada nodo y los pagos en los nodos terminales. Los nodos entre los que un jugador no puede distinguir se agrupan en *conjuntos de información*.

La representación normal es la natural para los juegos estáticos y la extensiva para los dinámicos, si bien todo juego en forma extensiva admite una representación normal (asociando a cada plan contingente completo una estrategia). La figura A14.1 representa en forma extensiva el juego de la matriz anterior, con información imperfecta (derecha), y su versión secuencial con los mismos

pagos, con información perfecta (izquierda). En ella, A y B son Arriba y Abajo, y a y b, Izquierda y Derecha.

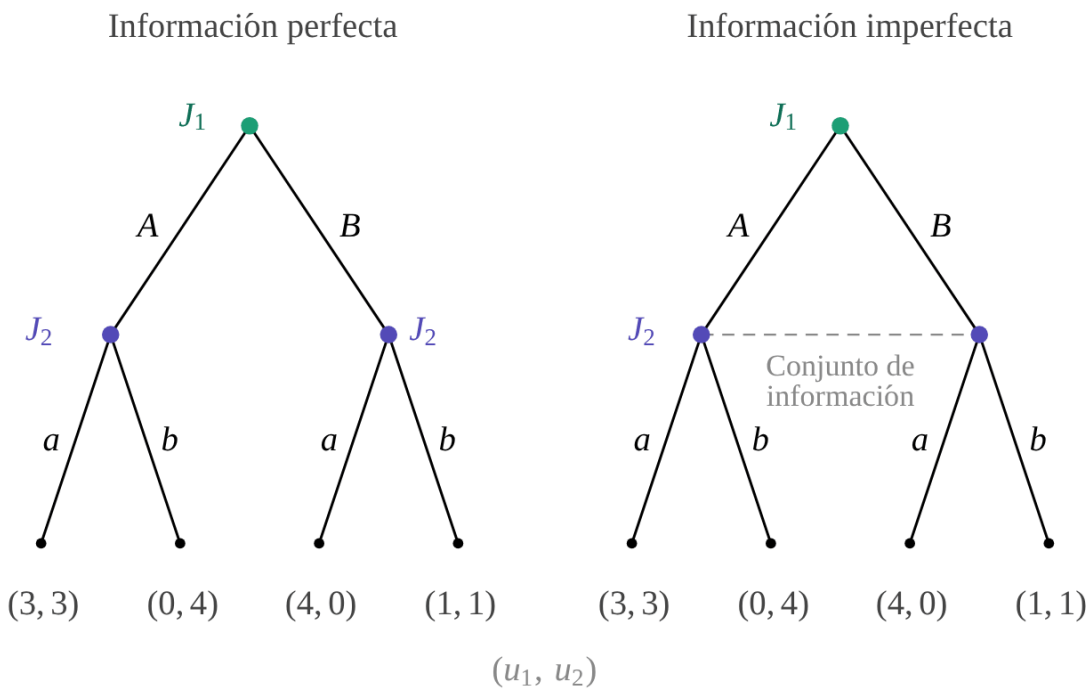


Figura A14.1: Forma extensiva del juego simultáneo de la matriz (derecha, con información imperfecta) y de su versión secuencial con los mismos pagos (izquierda, con información perfecta). El gráfico muestra los nodos de decisión, el conjunto de información y los pagos.

1.3. Comportamiento de los jugadores: la estrategia

Entender el comportamiento de los agentes en un juego exige distinguir entre acción y estrategia, conceptos que coinciden en un juego estático con información completa, pero no en uno dinámico:

1. *Acción*: cada una de las alternativas disponibles en un nodo de decisión.

2. *Estrategia*: un plan completo que indica qué acción tomar en cada nodo en el que al jugador pueda tocarle decidir (en cada uno de sus conjuntos de información), incluidos los nodos que, según ese mismo plan, nunca se alcanzarán.

1.3.1. Estrategias puras

Una **estrategia pura** (s_i^j) es un plan contingente completo, en el sentido anterior, que el jugador sigue con certeza. En un juego finito, cada jugador dispone de un conjunto finito de estrategias puras, $S_i = \{s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^m\}$, cuyo tamaño crece rápidamente con la estructura del juego, pues un jugador con k conjuntos de información y dos acciones en cada uno dispone de 2^k estrategias puras.

Un juego es *discreto* si cada jugador elige entre un número finito de estrategias (confesar o no en el dilema del prisionero) y *continuo* si elige en un intervalo (la cantidad en el duopolio de Cournot). En los discretos el equilibrio se busca en la matriz de pagos, y en los continuos, con las funciones de mejor respuesta que dan las condiciones de primer orden. En los juegos continuos existe un equilibrio en estrategias puras si los conjuntos de estrategias son compactos y convexos y los pagos, continuos y cuasicóncavos en la estrategia propia (Debreu, 1952).

Un **perfil de estrategias** es el vector formado por una estrategia de cada jugador, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, que suele escribirse como $\mathbf{s} = (s_i, \mathbf{s}_{-i})$ para separar la estrategia del jugador i de las de todos los demás.

1.3.2. Estrategias mixtas

Una **estrategia mixta** (σ_i) es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras del jugador, $\sigma_i = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, con $p_j \geq 0$ y $\sum_j p_j = 1$.

Toda estrategia pura es una estrategia mixta degenerada, y el conjunto de estrategias mixtas de un jugador es el símplice construido sobre sus estrategias puras. Los pagos de un perfil mixto son pagos esperados, de modo que su uso presupone preferencias de von Neumann-Morgenstern (tema A10).

Las estrategias mixtas requieren dos precisiones:

- *Interpretación*: aleatorización deliberada para no ser previsible (juegos de suma cero, como el *matching pennies*), frecuencias de las distintas estrategias puras en una población de jugadores, o incertidumbre de los rivales sobre lo que hará el jugador (interpretación de Harsanyi).

- *Comportamiento*: en los juegos dinámicos se utilizan también las *estrategias de comportamiento*, que aleatorizan nodo a nodo en lugar de sobre planes completos. Con memoria perfecta, ambas son equivalentes (Kuhn, 1953).

1.3.3. Mejor respuesta y dominancia

Dos conceptos construidos sobre las estrategias permiten formular después los conceptos de solución:

Mejor respuesta: la estrategia s_i^* es una mejor respuesta a $\mathbf{s}_{-i}$ si $u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$ para toda $s_i \in S_i$. La *función de mejor respuesta* (o de reacción), $s_i^* = R_i(\mathbf{s}_{-i})$, asigna a cada perfil de los rivales la respuesta óptima del jugador.

Dominancia: la estrategia s_i está *estrictamente dominada* por s_i' si $u_i(s_i', \mathbf{s}_{-i}) > u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$ para todo $\mathbf{s}_{-i}$, y *débilmente dominada* si la desigualdad es débil para todo $\mathbf{s}_{-i}$ y estricta para alguno. Una estrategia *dominante* es la que domina a todas las demás. Un jugador racional nunca juega una estrategia estrictamente dominada, lo que, si la racionalidad es conocimiento común, justifica el proceso de eliminación iterativa. Con todo, la eliminación de estrategias débilmente dominadas es menos segura, pues su resultado puede depender del orden de eliminación.

1.4. Soluciones a los juegos

Los conceptos de solución se presentan por separado para los juegos no cooperativos, centrados en la estrategia de cada jugador, y para los cooperativos, centrados en el reparto entre coaliciones.

1.4.1. Juegos no cooperativos

Los conceptos de solución de los juegos no cooperativos se corresponden con las distintas combinaciones de temporalidad e información. Todos responden a la misma pregunta, qué perfiles de estrategias cabe esperar de jugadores racionales, pero difieren en lo que exigen a los jugadores y en el tipo de juego al que se aplican. Las tablas A14.2 y A14.3 los recapitulan.

Equilibrio en estrategias dominantes (EED): si cada jugador dispone de una estrategia dominante, la juega con independencia de lo que espere que hagan los demás, y el perfil formado por esas estrategias es el EED. Este equilibrio es la predicción más robusta, porque solo exige racionalidad individual y ninguna hipótesis sobre las creencias, pero rara vez existe. La *eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas* amplía su alcance. Suprimidas esas estrategias, en el juego reducido pueden aparecer otras dominadas, y si tras repetir el proceso sobrevive un único perfil, el juego es *resoluble por dominancia*.

Equilibrio de Nash (EN): es un perfil de estrategias $\mathbf{s}^* = (s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*)$ en el que la estrategia de cada jugador es mejor respuesta a las de los demás, $u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*)$ para toda $s_i \in S_i$ y todo jugador i. Ningún jugador gana, por tanto, desviándose unilateralmente, y el perfil funciona como un acuerdo que se cumple por sí solo. El EN es más exigente que el EED, porque a la racionalidad añade que cada jugador acierte al prever qué estrategias van a seguir sus rivales. A cambio, se aplica a muchos más juegos, y todo EED es un EN, pero no a la inversa. Cabe distinguir dos casos:

- *En estrategias puras*: cada jugador elige con certeza una de sus estrategias. En este caso el EN puede no existir (*matching pennies*, apartado 2.1.4) o no ser único (batalla de los sexos, apartado 2.1.5).

- *En estrategias mixtas*: cada jugador aleatoriza entre sus estrategias puras y la condición de equilibrio se impone sobre los pagos esperados. Un jugador solo está dispuesto a mezclar entre estrategias puras que le dan el mismo pago esperado, de modo que, en equilibrio, las probabilidades de cada jugador dejan a los rivales indiferentes entre las estrategias que estos mezclan. El *teorema de Nash* (1950) garantiza que todo juego finito (número finito de jugadores, cada uno con un número finito de estrategias puras) tiene al menos un EN en estrategias mixtas. La demostración aplica el teorema de punto fijo de Kakutani a la correspondencia de mejor respuesta, que asigna a cada perfil las mejores respuestas de todos los jugadores, porque un EN es un punto fijo de esa correspondencia.

Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS): en un juego dinámico, el EN puede apoyarse en *amenazas no creíbles* (juego de entrada, apartado 2.3.1), acciones previstas para nodos que no se alcanzan en equilibrio y que el jugador no ejecutaría si llegara a ellos. Reinhard Selten (1965) propuso descartarlas exigiendo racionalidad también fuera de la senda de equilibrio. Un *subjuego* es la parte del árbol que empieza en un nodo que forma por sí solo un conjunto de información y comprende todos sus sucesores, sin partir ningún conjunto de información. Un ENPS es un perfil de estrategias que induce un EN en cada subjuego, se alcance este o no (*racionalidad secuencial*). En los juegos finitos con información perfecta se obtiene por *inducción hacia atrás*. Se resuelven primero las decisiones de los últimos nodos, se sustituye cada uno por el pago de la acción óptima y se retrocede hasta el nodo inicial. Todo ENPS es un EN, pero no a la inversa.

Equilibrio de Bayes-Nash (EBN): cuando algún jugador desconoce los pagos de los rivales, la *transformación de Harsanyi* (1967-1968) convierte el juego en otro de información completa pero imperfecta. La naturaleza elige primero el *tipo* de cada jugador (sus pagos o su información privada) según una distribución de probabilidad que es conocimiento común. Cada jugador observa solo su propio tipo, y una estrategia pasa a ser un plan que asigna una acción a cada

tipo posible. El EBN es el EN de este juego ampliado, en el que cada tipo de cada jugador elige la acción que maximiza su pago esperado, dadas sus creencias sobre los tipos de los rivales y las estrategias de estos.

Equilibrio bayesiano perfecto (EBP): en los juegos dinámicos con información incompleta las acciones observadas transmiten información sobre el tipo de quien las toma, y el EBN, como el EN, puede descansar en amenazas no creíbles. Por ello, el EBP combina la racionalidad secuencial del ENPS con la actualización de las creencias. Consta de unas estrategias *secuencialmente racionales* (óptimas en cada conjunto de información dadas las creencias) y de unas *creencias* sobre los nodos de cada conjunto de información *consistentes* (obtenidas de las estrategias por Bayes siempre que sea posible). En los conjuntos de información alcanzados con probabilidad nula en equilibrio, la regla de Bayes no impone nada, y ese margen para fijar creencias explica la multiplicidad de equilibrios, que refinamientos como el criterio intuitivo intentan acotar (apartado 2.2.4).

Tabla A14.2: Soluciones de los juegos no cooperativos con información completa.

	Equilibrio en estrategias dominantes (EED)	Equilibrio de Nash (EN)	Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS)
Tiempo	Estático	Estático	Dinámico
Información	Completa	Completa	Completa
Criterio	Dominancia estratégica	Mejor respuesta	Racionalidad secuencial
Definición	Cada jugador juega la estrategia que maximiza su pago haga lo que haga el rival	Cada estrategia es mejor respuesta a las demás, y nadie gana desviándose unilateralmente	EN que induce un EN en cada subjuego
Método	Elegir la estrategia estrictamente dominante o eliminar iterativamente las dominadas[3]	Marcar las mejores respuestas en la matriz o cortar las funciones de mejor respuesta	Inducción hacia atrás desde los nodos finales
Usos	Predicción robusta, pues solo exige racionalidad individual (dilema del prisionero, mecanismos de revelación)	Concepto central (oligopolio, bienes públicos, coordinación), que existe en mixtas en todo juego finito	Descarta las amenazas no creíbles (juego de entrada, Stackelberg, juegos repetidos)
Limitaciones	Rara vez existe y puede ser ineficiente	Puede no existir en puras, no ser único ni ser eficiente	Exige subjuegos identificables y falla en horizontes finitos largos (cadena de tiendas)

[3]El orden de supresión no afecta al conjunto final de estrategias supervivientes (con dominancia estricta).

Tabla A14.3: Soluciones de los juegos no cooperativos con información incompleta.

	Equilibrio de Bayes-Nash (EBN)	Equilibrio bayesiano perfecto (EBP)
Tiempo	Estático	Dinámico
Información	Incompleta	Incompleta
Criterio	Mejor respuesta condicional (en pagos esperados)	Racionalidad secuencial con creencias consistentes
Definición	Cada tipo maximiza su pago esperado dadas sus creencias sobre los tipos y las estrategias rivales	Estrategias secuencialmente racionales dadas unas creencias que siguen la regla de Bayes siempre que es posible
Método	Transformación de Harsanyi y maximización del pago esperado de cada tipo	Proponer un perfil (separador o agrupador), fijar las creencias por Bayes y comprobar que ningún tipo gana desviándose
Usos	Subastas (apartado 3), costes privados y mercado de "limones" (apartados 2.2.2 y 2.2.3)	Señalización y reputación (apartados 2.2.4 y 2.3.4)
Limitaciones	Depende de la distribución de tipos supuesta, que ha de ser conocimiento común	Multiplicidad por la libertad de creencias fuera de la senda, que el criterio intuitivo acota sin eliminar

1.4.2. Juegos cooperativos

En los juegos cooperativos, definidos por una **función característica** $V(S)$ que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ el valor que puede garantizarse por sí misma, la pregunta es cómo repartir el valor de la gran coalición, $V(N)$. Un *reparto* es un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que asigna a cada jugador una parte de ese valor. Los dos conceptos de solución fundamentales responden a criterios distintos, la estabilidad y la equidad, y la tabla A14.4 los recapitula.

Núcleo (Gillies, 1959): un reparto es estable si ninguna coalición puede garantizar a sus miembros más de lo que reciben, porque en caso contrario esa coalición abandonaría el acuerdo, es decir, lo *bloquearía*. El núcleo es el conjunto de repartos eficientes que ninguna coalición bloquea:

$$\mathcal{C}(V) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = V(N), \ \ \sum_{i \in S} x_i \geq V(S) \ \text{ para toda } S \subseteq N \right\}$$

donde x_i es lo que recibe el jugador i, $V(N)$ el valor de la gran coalición y $V(S)$ el que la coalición S obtiene por sí misma. Las coaliciones de un solo jugador imponen la *racionalidad individual*, $x_i \geq V(\{i\})$. El núcleo puede contener infinitos repartos cuando las coaliciones distintas de la gran coalición obtienen poco por sí solas (*joint venture*, apartado 2.4.1) y ser vacío cuando obtienen mucho. Así, si tres jugadores se reparten una unidad y basta una mayoría de dos para quedársela, cada pareja debe recibir en conjunto al menos la unidad. Sumando las tres condiciones, los pagos tendrían que sumar al menos 3/2, más de lo que hay que repartir.

Ejemplo: cálculo del núcleo con tres jugadores

Un inventor (jugador 1) y dos fabricantes (jugadores 2 y 3) pueden explotar una patente. Nadie obtiene nada por sí solo, $V(\{i\}) = 0$. El inventor con cualquiera de los fabricantes obtiene $V(\{1,2\}) = V(\{1,3\}) = 60$, los dos fabricantes sin la patente, $V(\{2,3\}) = 30$, y los tres juntos, $V(N) = 90$. Como $x_1 + x_2 + x_3 = 90$, cada condición de coalición equivale a un tope para el jugador que queda fuera de ella:

$$x_1 + x_2 \geq 60 \Leftrightarrow x_3 \leq 30, \qquad x_1 + x_3 \geq 60 \Leftrightarrow x_2 \leq 30, \qquad x_2 + x_3 \geq 30 \Leftrightarrow x_1 \leq 60$$

El núcleo son los repartos no negativos que suman 90 con $x_1 \leq 60$ y $x_2, x_3 \leq 30$, como $(30, 30, 30)$ o $(60, 15, 15)$. Si un fabricante recibiera más de 30, el inventor y el otro fabricante, que juntos se garantizan 60, abandonarían el acuerdo.

Valor de Shapley (Shapley, 1953): en lugar de describir todos los repartos estables, Lloyd Shapley busca una regla que asigne a cada juego un único reparto equitativo y la caracteriza por cuatro axiomas:

- *Eficiencia*: se reparte todo el valor de la gran coalición, $\sum_{i \in N} \phi_i(V) = V(N)$.
- *Simetría*: dos jugadores que aportan lo mismo a toda coalición que no incluye a ninguno de ellos reciben lo mismo.
- *Jugador nulo*: quien no aporta nada a ninguna coalición recibe cero.
- *Aditividad*: si los mismos jugadores participan en dos juegos, V y W, el pago de cada uno en el juego suma es la suma de sus pagos en cada juego, $\phi_i(V + W) = \phi_i(V) + \phi_i(W)$.

La única regla que cumple los cuatro axiomas asigna a cada jugador la media de sus contribuciones marginales:

$$\phi_i(V) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!}\,[V(S \cup \{i\}) - V(S)]$$

donde $\phi_i(V)$ es el pago del jugador i, n el número de jugadores, s el número de miembros de la coalición S, $V(S \cup \{i\}) - V(S)$ la *contribución marginal* de i a S y $s!\,(n-s-1)!/n!$ la probabilidad de que, si los jugadores se incorporan a la gran coalición en un orden aleatorio y todos los órdenes son igual de probables, i encuentre formada exactamente la coalición S al llegar. El valor de Shapley siempre existe y es único, pero no tiene por qué pertenecer al núcleo, porque la equidad no garantiza la estabilidad. Sí pertenece a él en los *juegos convexos*, en los que la contribución marginal de cada jugador no disminuye cuando se amplía la coalición a la que se une (Shapley, 1971).

Ejemplo: cálculo del valor de Shapley

En el juego del ejemplo anterior hay $3! = 6$ órdenes de llegada igual de probables. El inventor no aporta nada si llega el primero (dos órdenes) y aporta 60 en los otros cuatro, tanto si encuentra a un fabricante $(60 - 0)$ como a los dos $(90 - 30)$. Cada fabricante aporta 0 si llega el primero, 60 si encuentra solo al inventor, 30 si encuentra solo al otro fabricante y 30 si encuentra a ambos $(90 - 60)$. Con los pesos de la fórmula (2/6 para la coalición vacía y para la de los otros dos, 1/6 para cada coalición de uno):

$$\phi_1 = \tfrac{2}{6}\cdot 0 + \tfrac{1}{6}\cdot 60 + \tfrac{1}{6}\cdot 60 + \tfrac{2}{6}\cdot 60 = 40, \qquad \phi_2 = \phi_3 = \tfrac{2}{6}\cdot 0 + \tfrac{1}{6}\cdot 60 + \tfrac{1}{6}\cdot 30 + \tfrac{2}{6}\cdot 30 = 25$$

El reparto $(40, 25, 25)$ suma 90 (eficiencia), trata igual a los dos fabricantes (simetría) y está en el núcleo, pues $40 \leq 60$ y $25 \leq 30$. El inventor recibe más porque su contribución marginal es mayor.

Tabla A14.4: Soluciones de los juegos cooperativos.

	Núcleo (*core*)	Valor de Shapley (1953)
Criterio	Estabilidad coalicional	Equidad axiomática (eficiencia, simetría, jugador nulo, aditividad)
Definición	Repartos del valor total que ninguna coalición puede bloquear	Reparto que da a cada jugador su contribución marginal esperada
Método	Comprobar la racionalidad individual y la de cada coalición	Promediar las contribuciones marginales sobre todos los órdenes de llegada
Usos	Estabilidad de los acuerdos entre socios (*joint venture*, apartado 2.4.1)	Siempre existe y es único (reparto de costes, poder de voto, apartado 2.4.2)
Limitaciones	Puede ser vacío o muy grande	Puede quedar fuera del núcleo (lo "justo" puede no ser estable)

1.5. Conclusiones

Un juego queda definido por sus jugadores, reglas, resultados y pagos, y las reglas sobre el tiempo, la información y los compromisos vinculantes determinan su representación y el concepto de solución aplicable. Los conceptos no cooperativos, construidos sobre la mejor respuesta y la dominancia, son cada vez más exigentes. Así, el equilibrio de Nash pide que cada jugador acierte al prever las estrategias rivales, y a cambio existe en estrategias mixtas en todo juego finito. El ENPS y el equilibrio bayesiano perfecto añaden racionalidad fuera de la senda de equilibrio. En los juegos cooperativos, en cambio, el núcleo y el valor de Shapley reparten por estabilidad y por equidad, y el reparto equitativo puede no ser estable. El apartado 2 aplica estos conceptos a juegos característicos de cada entorno.

2. Aplicaciones

Los juegos no cooperativos se presentan, en la medida en que cada caso lo permite, con una estructura común: planteamiento del juego, solución por dominancia, equilibrio de Nash, equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (cuando el juego es dinámico), análisis de bienestar y conclusiones. Los modelos más formales (señalización, reputación y negociación) se exponen a partir de su origen, su idea y sus resultados, y los juegos cooperativos, mediante ejemplos.

2.1. Juegos estáticos con información completa

Cinco juegos simultáneos con información completa ilustran los casos característicos, desde el equilibrio en estrategias dominantes hasta la multiplicidad de equilibrios.

2.1.1. El dilema del prisionero

Planteamiento: dos sospechosos de un crimen son arrestados e interrogados por separado, sin posibilidad de comunicarse, y pueden confesar (C) o no confesar (NC). Se les dan las siguientes opciones, cuyos pagos (en años de condena, con signo negativo) recoge la tabla A14.5:

- *Ambos confiesan*: cada uno recibe cinco años de prisión.
- *Ninguno confiesa*: un año por un delito menor.
- *Solo uno confiesa*: queda libre y el otro recibe diez años.

Tabla A14.5: Matriz de pagos del dilema del prisionero.

	C	NC
C	(-5, -5)	(0, -10)
NC	(-10, 0)	(-1, -1)

Equilibrio en estrategias dominantes (EED): confesar es estrictamente dominante para ambos, ya que, sea cual sea la elección del otro, da un pago mayor ($-5 > -10$ si el otro confiesa y $0 > -1$ si no lo hace). El EED es, por tanto, (C, C), con pagos $(-5, -5)$.

Equilibrio de Nash (EN): todo EED es un EN, y aquí (C, C) es el único, pues en cualquier otra celda al menos un jugador mejora desviándose unilateralmente.

Bienestar: el resultado es ineficiente en el sentido de Pareto. (NC, NC), con pagos $(-1, -1)$, es Pareto-superior al equilibrio, pero no es sostenible, porque cada jugador tiene incentivos a desviarse unilateralmente.

Conclusiones: el dilema ilustra la tensión fundamental entre racionalidad individual y eficiencia colectiva, que reaparece en el oligopolio (la colusión), la provisión de bienes públicos, la carrera de armamentos o las guerras arancelarias.

Su lección es que la cooperación no puede descansar en el interés individual en un juego jugado una sola vez, sino que exige compromisos vinculantes (juegos cooperativos) o repetición con castigos creíbles.

2.1.2. La batalla del mar de Bismarck

Planteamiento: la batalla del mar de Bismarck es un ejemplo histórico de juego de suma cero. En 1943, un convoy japonés debía elegir la ruta norte o sur de Nueva Bretaña, y la aviación aliada, en qué ruta concentrar su búsqueda.

Los pagos (días de bombardeo sobre el convoy) eran:

Tabla A14.6: Matriz de pagos de la batalla del mar de Bismarck.

	J: Norte	J: Sur
A: Norte	(2, -2)	(2, -2)
A: Sur	(1, -1)	(3, -3)

Equilibrio en estrategias dominantes: para el convoy japonés, navegar por el norte domina débilmente al sur, pues garantiza como máximo dos días de bombardeo frente a los tres posibles en el sur. Para los aliados no existe estrategia dominante, pero, eliminada la ruta sur japonesa, su mejor respuesta es buscar en el norte. Por tanto, la eliminación iterada de estrategias dominadas conduce a (Norte, Norte).

Equilibrio de Nash: de nuevo, el único EN en estrategias puras es (Norte, Norte). Dado que Japón navega por el norte, los aliados buscan en el norte. Dado que los aliados buscan en el norte, Japón es indiferente entre ambas rutas y el norte es una mejor respuesta.

En estrategias mixtas existen además otros EN, en los que los aliados buscan en el norte y Japón elige el norte con probabilidad de al menos 1/2, todos con el mismo pago de dos días de bombardeo. En un juego de suma cero, el EN coincide con la solución *maximin* de cada jugador.

Bienestar: en un juego de suma cero toda ganancia de un jugador es pérdida del otro, de modo que cualquier perfil es óptimo de Pareto.

Conclusiones: la predicción coincide con lo que hicieron ambos bandos. El ejemplo muestra a la vez la potencia y el límite de la dominancia, pues con dominancia débil el resultado de la eliminación iterada puede depender del orden (apartado 1.3.3).

2.1.3. Juegos con un único equilibrio de Nash sin estrategias dominantes: el duopolio de Cournot

> El modelo de Cournot, con sus supuestos, las funciones de reacción y la comparación del equilibrio con el monopolio y la competencia perfecta, se desarrolla en el tema A19, apartado 1.1. Aquí sirve de ejemplo de juego con un único equilibrio de Nash sin estrategias dominantes.

Planteamiento: dos empresas eligen simultáneamente cantidades de un bien homogéneo. El precio de mercado depende de la cantidad total y el beneficio de cada empresa de su propia cantidad y de la del rival. Como cada empresa puede elegir cualquier cantidad, no cabe una tabla de pagos y el juego se describe con funciones de beneficio.

Equilibrio en estrategias dominantes: no existe, porque la cantidad óptima de cada empresa depende de la del rival. En el duopolio lineal, no obstante, la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas converge al EN.

Equilibrio de Nash: se obtiene como intersección de las funciones de mejor respuesta (funciones de reacción) y, bajo los supuestos habituales, es único[4].

Bienestar: el equilibrio de Cournot se sitúa entre el monopolio y la competencia perfecta. La cantidad total es mayor y el precio menor que en el cártel, pero menor y mayor, respectivamente, que en competencia, con la consiguiente pérdida de eficiencia.

Conclusiones: es el ejemplo canónico de que el EN es el concepto de solución general para los juegos estáticos con información completa, ya que todo EED es un EN, pero muchos juegos sin estrategias dominantes tienen, no obstante, un único EN.

2.1.4. Juegos sin equilibrio en estrategias puras: el *matching pennies*

Planteamiento: dos jugadores muestran simultáneamente una moneda por una de sus caras. Si coinciden, gana el jugador 1 y, si no, el jugador 2. Es un juego de suma cero, de nuevo:

Tabla A14.7: Matriz de pagos del *matching pennies*.

	Cara	Cruz
Cara	(1, -1)	(-1, 1)
Cruz	(-1, 1)	(1, -1)

Equilibrio en estrategias dominantes: no existe, porque la mejor elección de cada jugador depende por completo de la del rival.

Equilibrio de Nash: no existe EN en estrategias puras, ya que en toda celda algún jugador gana desviándose, de modo que las mejores respuestas nunca se cruzan. Sí existe en estrategias mixtas, y en él cada jugador elige cara con probabilidad $p = 1/2$ y cruz con $1 - p = 1/2$, lo que deja al rival indiferente entre sus dos opciones y le impide explotar patrón alguno. El pago esperado es cero para ambos. El juego ilustra así el teorema de Nash (1950), enunciado en el apartado 1.4.1.

Bienestar: como en todo juego de suma cero, no hay mejoras de Pareto posibles.

Conclusiones: el juego muestra por qué son necesarias las estrategias mixtas, ya que sin ellas la teoría no daría predicción alguna en los juegos de pura oposición.

2.1.5. Juegos con múltiples equilibrios: la batalla de los sexos

Planteamiento: dos personas quieren pasar la tarde juntas, pero una prefiere el fútbol y la otra la ópera. Ambas prefieren coincidir antes que ir por separado:

Tabla A14.8: Matriz de pagos de la batalla de los sexos.

	Fútbol	Ópera
Fútbol	(3, 2)	(0, 0)
Ópera	(0, 0)	(2, 3)

[4]La concavidad estricta del beneficio en la cantidad propia da funciones de reacción continuas (existencia). Una pendiente de estas, respecto a la cantidad del rival, menor que uno en valor absoluto garantiza la unicidad, como ocurre con demanda lineal y costes marginales constantes (pendiente $-1/2$).

Equilibrio en estrategias dominantes: no existe, ya que cada jugador prefiere ir donde vaya el otro.

Equilibrio de Nash: existen dos EN en estrategias puras, (Fútbol, Fútbol) y (Ópera, Ópera), y uno adicional en estrategias mixtas en el que cada jugador elige su opción favorita con probabilidad 3/5.

Bienestar: los dos equilibrios en puras son óptimos de Pareto, pero distribuyen de forma distinta las ganancias de la coordinación. En cambio, el equilibrio en mixtas es ineficiente, pues con probabilidad positiva los jugadores no se coordinan y ambos obtienen cero.

Conclusiones: el juego ilustra el problema de coordinación y el límite del EN como concepto de solución, pues la teoría no predice cuál de los equilibrios se alcanzará.

Esta indeterminación ha motivado conceptos de selección de equilibrios, como el punto focal de Schelling (convenciones, precedentes) o la comunicación previa, y muestra que en los juegos de coordinación la historia y las instituciones importan tanto como los incentivos.

2.2. Juegos con incertidumbre

Hasta aquí se ha supuesto que los jugadores conocen toda la información sobre los pagos, los jugadores y las reglas. Se estudian ahora tres formas de incertidumbre: información imperfecta, información incompleta e información asimétrica. La última se extiende después a los juegos dinámicos de señalización.

2.2.1. Información imperfecta: hundir la flota

Planteamiento: en los juegos con información *imperfecta*, los jugadores no observan alguna acción de los rivales, de modo que no conocen el estado del juego en el momento de decidir. Esta propiedad es distinta de la completitud, pues el propio dilema del prisionero es un juego de información completa (todos conocen los pagos) pero imperfecta (los jugadores deciden simultáneamente, sin observar la elección del otro)[5]. Un ejemplo es el juego de hundir la flota, en el que, en todo momento, cada jugador conoce el resultado de sus acciones, pero no la disposición de la flota del rival.

Equilibrio: la información imperfecta se representa en forma extensiva mediante conjuntos de información (apartado 1.2), y los conceptos de solución son los mismos (EN y, en los juegos dinámicos, ENPS aplicado a los subjuegos identificables). En juegos como hundir la flota, sin embargo, el espacio de estrategias es tan grande que el equilibrio no se calcula de forma cerrada, y los jugadores lo aproximan mediante reglas heurísticas de búsqueda.

Conclusiones: la distinción entre información perfecta e imperfecta permite representar la simultaneidad dentro de la forma extensiva y delimita dónde puede aplicarse la inducción hacia atrás (que exige subjuegos propios, que comienzan en nodos con información perfecta).

[5] Véase Gravelle y Rees (2004).

2.2.2. Información incompleta: el equilibrio de Bayes-Nash

Planteamiento: la información incompleta se modeliza con un movimiento inicial de la naturaleza (transformación de Harsanyi, apartado 1.4.1). Como ejemplo, existen dos posibles estados de la naturaleza, crisis y no crisis, $\Omega = \{\omega_c, \omega_{nc}\}$, y en cada estado la matriz de pagos del juego es distinta. El jugador 1 observa el estado antes de decidir, de modo que el estado es su tipo (su información privada). El jugador 2, en cambio, no sabe en qué matriz juega y solo conoce la distribución de probabilidad (de conocimiento común) que asigna $P_c \in (0, 1)$ al estado de crisis y $1 - P_c$ al de no crisis.

Equilibrio de Bayes-Nash: la estrategia del jugador 1 asigna a cada estado la acción que mejor responde, con la matriz de ese estado, a la del jugador 2. El jugador 2 elige la acción de mayor pago esperado, ponderando por las probabilidades de los estados los pagos que obtiene frente a la acción del jugador 1 en cada uno. Según la estructura de pagos, el equilibrio puede coincidir con el de alguno de los estados o ser distinto de ambos, y puede existir en estrategias puras o requerir estrategias mixtas. Sin información privada bastaría con hallar el EN de la matriz de pagos esperados.

Bienestar: se evalúa en términos esperados. El equilibrio puede ser ineficiente *ex post* (una vez conocido el estado) aunque sea la mejor respuesta *ex ante* a las creencias.

Conclusiones: la transformación de Harsanyi permite aplicar el aparato del EN, a costa de que la predicción sea sensible a la distribución de probabilidad supuesta, que ha de ser conocimiento común.

2.2.3. Información asimétrica: el mercado de coches usados (Akerlof, 1970)

> El modelo de Akerlof, con su formalización, se desarrolla en el tema A13, apartado 3.2, y las soluciones a la selección adversa (señalización y autoselección), en el apartado 3.4. Aquí se presenta como juego con información asimétrica, cuyo resultado es un equilibrio de Bayes-Nash.

Planteamiento: la información incompleta es *asimétrica* cuando una de las partes posee información privada relevante que la otra desconoce. Los vendedores conocen la calidad de su coche, $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$, y los compradores solo la distribución de calidades, de modo que ofrecen un precio basado en la calidad esperada, que actualizan por Bayes según qué vendedores acuden al mercado.

Equilibrio de Bayes-Nash: si la proporción de coches buenos no es lo bastante alta, al precio medio los vendedores de alta calidad se retiran. Su salida degrada la calidad esperada, reduce el precio y expulsa a más vendedores buenos, en una espiral de selección adversa que acaba en un EBN en el que solo se intercambian los coches malos (*lemons*).

Bienestar: el equilibrio no es un óptimo de Pareto, porque quedan sin realizar intercambios mutuamente beneficiosos, los de los coches buenos a un precio intermedio.

Conclusiones: es el modelo fundacional de la economía de la información y muestra que la información privada es por sí misma un fallo de mercado. Sus soluciones se estudian a continuación y en el tema A13.

2.2.4. Juegos de señalización y equilibrio bayesiano perfecto (Spence, 1973; Cho y Kreps, 1987)

> La señalización en el mercado de trabajo se desarrolla en el tema A13, apartado 3.4.1, como solución a la selección adversa, con sus zonas de equilibrio y su análisis de bienestar. Aquí se formaliza como juego dinámico con información incompleta para introducir el equilibrio bayesiano perfecto y el criterio intuitivo.

Origen: los juegos de señalización son la clase más simple de juegos dinámicos con información incompleta. El modelo de partida es el de Michael Spence (1973) sobre el mercado de trabajo, y el criterio intuitivo de Cho y Kreps (1987) selecciona entre sus equilibrios múltiples.

Idea: en un juego dinámico con información incompleta el EBN no basta, y el concepto de solución es el equilibrio bayesiano perfecto (EBP). En un juego de señalización, el jugador informado (emisor) elige primero una acción observable, la señal, y el no informado (receptor) responde tras actualizar sus creencias.

Supuestos:

- *Entorno*: la productividad $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$, con $\theta_H > \theta_L$, es privada, y las empresas solo conocen la probabilidad *a priori* $\mu_0 = \Pr(\theta = \theta_H)$. Es decir, los trabajadores conocen su tipo, pero las empresas no, de modo que estas hacen conjeturas sobre el tipo de trabajador que contratan.

- *Agentes*: un trabajador (emisor) y varias empresas competitivas (receptores), de modo que el salario iguala la productividad esperada.

- *Tecnología*: la educación $h \geq 0$ no altera la productividad, pero su coste marginal es menor para el tipo productivo que para el improductivo (*cruce único* o *single crossing*). Concretamente, el coste de la educación viene dado por $c(h, \theta) = h/\theta$.

Planteamiento: un EBP es una educación por tipo, un salario $w(h) = \mu(h)\,\theta_H + (1 - \mu(h))\,\theta_L$ y unas creencias $\mu(h) = \Pr(\theta_H \mid h)$ obtenidas por Bayes en las educaciones de equilibrio, tales que cada tipo maximiza $w(h) - c(h, \theta)$. Caben dos clases de equilibrio:

1. *Equilibrio separador*: cada tipo elige una educación distinta, de modo que la señal revela el tipo. El tipo bajo no se educa ($h_L = 0$, $w = \theta_L$) y el alto elige h^* ($w = \theta_H$), siempre que ningún tipo prefiera imitar al otro:

$$\theta_H - \frac{h^*}{\theta_H} \;\geq\; \theta_L \qquad \text{y} \qquad \theta_L \;\geq\; \theta_H - \frac{h^*}{\theta_L}$$

donde $\theta_H - h^*/\theta_H$ es la utilidad del tipo alto que se educa y es reconocido, θ_L la de cualquier tipo sin educarse y $\theta_H - h^*/\theta_L$ la del tipo bajo si imitase al alto. Estas *condiciones de compatibilidad de incentivos* acotan la señal, y el cruce único garantiza que el intervalo no sea vacío:

$$\theta_L(\theta_H - \theta_L) \;\leq\; h^* \;\leq\; \theta_H(\theta_H - \theta_L)$$

2. *Equilibrio agrupador* (*pooling*): ambos tipos eligen la misma educación, h_p, de modo que la señal no revela nada, las empresas mantienen la creencia *a priori* y pagan el salario medio, $\bar{w} = \mu_0\,\theta_H + (1 - \mu_0)\,\theta_L$. Con creencias pesimistas fuera del equilibrio ($\mu(h) = 0$ para toda $h \neq h_p$), quien se desvía cobra θ_L y le conviene entonces no educarse. Basta, por tanto, con que no lo prefiera el tipo bajo, para el que educarse es más caro:

$$\bar{w} - \frac{h_p}{\theta_L} \geq \theta_L \quad \Longrightarrow \quad h_p \leq \mu_0\,\theta_L(\theta_H - \theta_L)$$

Equilibrio: cualquier h^* del primer intervalo, con la creencia $\mu(h) = 1$ si $h \geq h^*$ y $\mu(h) = 0$ en caso contrario, es un EBP separador, y cualquier h_p entre cero y $\mu_0\,\theta_L(\theta_H - \theta_L)$, un EBP agrupador. Qué equilibrio surge depende, ante todo, del coste de la educación. La señal separa porque educarse es más caro para el tipo bajo, y cuanto mayor es esa diferencia, menos educación hace falta para separar (con el mismo coste para ambos, solo en un caso límite). El nivel del coste y la proporción de productivos deciden, a su vez, si al tipo alto le compensa separarse, pues la señal le cuesta h^*/θ_H y le reporta, frente al agrupador, $(1 - \mu_0)(\theta_H - \theta_L)$. Así, si los productivos son mayoría (μ_0 alta), el tipo alto puede preferir el agrupador. La multiplicidad procede de la libertad de creencias fuera de la senda.

Extensiones: el *criterio intuitivo* de Cho y Kreps (1987) restringe esas creencias. Si una desviación h' está *dominada en equilibrio* para el tipo bajo (ni con $w = \theta_H$ mejoraría su pago de equilibrio) pero no para el alto, el receptor debe atribuirla al tipo alto. Con ello todo agrupador se rompe y de los separadores solo sobrevive el de señal mínima, $h^* = \theta_L(\theta_H - \theta_L)$. La misma lógica explica el precio límite como señal de costes bajos (Milgrom y Roberts, 1982a; tema A19, apartado 3.2.1) o la garantía como señal de calidad.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el EBP es el concepto de solución general de los juegos dinámicos con información incompleta, y el modelo de Spence muestra que una actividad improductiva puede ser valiosa porque transmite información.

- *Limitaciones*: la libertad de creencias fuera de la senda genera una multiplicidad que ningún refinamiento elimina del todo, y el equilibrio separador es ineficiente respecto a la información simétrica, pues la educación es un coste puro.

2.3. Juegos dinámicos

En los juegos dinámicos el equilibrio de Nash puede apoyarse en amenazas no creíbles, y la repetición plantea si puede sostenerse la cooperación.

2.3.1. El juego de entrada

Planteamiento: el juego de entrada ilustra a la vez la ventaja de mover primero, el problema de las amenazas no creíbles y el principio de racionalidad secuencial. La empresa entrante decide entrar (E) o no entrar (NE) en el mercado. Si entra, la empresa instalada o incumbente decide luchar (L, p. ej. una guerra de precios) o acomodar (A, repartir el mercado). Los pagos (entrante, incumbente) son $(0, 2)$ si no hay entrada, $(-3, -1)$ si hay entrada y lucha, y $(2, 1)$ si hay entrada y acomodación.

Equilibrio en estrategias dominantes: no existe, pues la mejor estrategia de la entrante depende de cómo reaccione la incumbente.

Equilibrio de Nash: la forma normal del juego tiene dos EN en estrategias puras, (E, A) y (NE, L). El segundo lo es porque ninguna de las dos gana desviándose unilateralmente y, mientras la entrante se queda fuera, luchar no llega a ejecutarse y resulta irrelevante. Ese equilibrio se apoya, sin embargo, en una amenaza no creíble, ya que ante una entrada real la incumbente

acomodaría ($1 > -1$). Que el EN no permita eliminar equilibrios así es su principal debilidad en los juegos secuenciales.

Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos: aplicando el principio de racionalidad secuencial, se resuelve el juego por inducción hacia atrás. En el nodo de la incumbente, si la entrante ha entrado, la mejor respuesta de la incumbente es acomodar ($1 > -1$). En el nodo de la entrante, si no entra obtiene 0, y si entra, obtiene 2, pues sabe que la incumbente acomodará. Por tanto, entra. El ENPS es (E, A), con pagos $(2, 1)$ (figura A14.2).

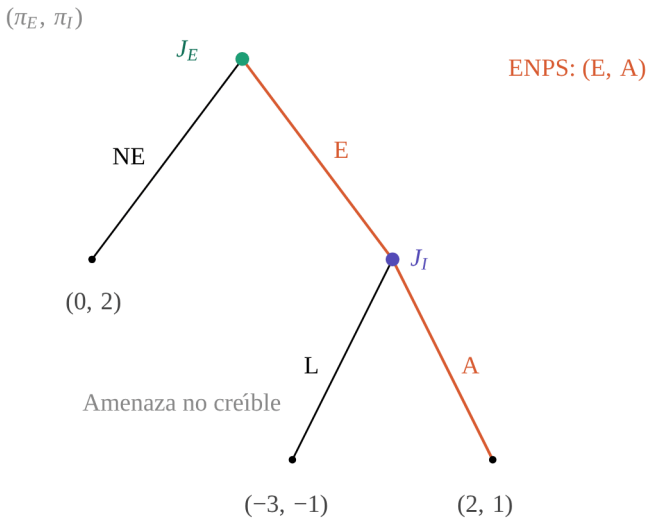


Figura A14.2: Juego de entrada en forma extensiva. La amenaza de lucha no es creíble y, por inducción hacia atrás, el ENPS es (E, A). El otro EN, (NE, L), no sobrevive.

Para comprometerse de forma creíble a luchar, la incumbente debe modificar sus propios pagos mediante costes hundidos (inversiones irreversibles en capacidad, por ejemplo) que hagan que, llegado el caso, luchar sea efectivamente su mejor respuesta (figura A14.3).

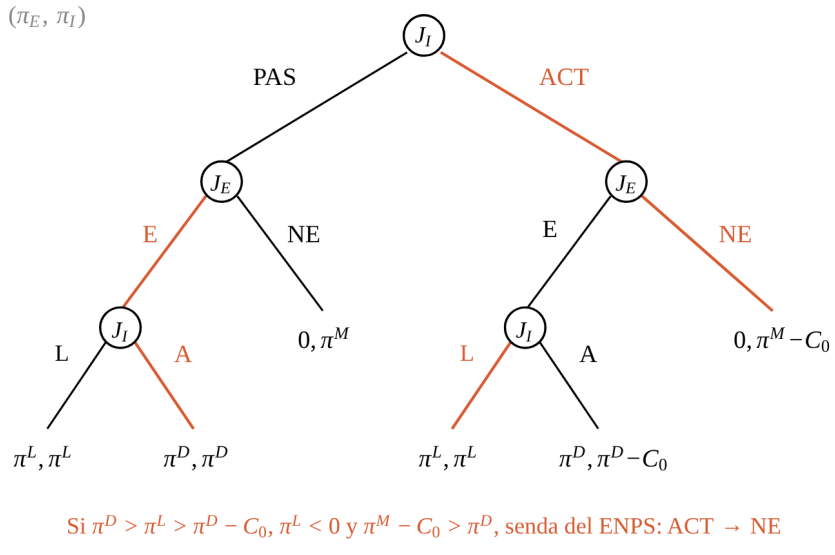


Figura A14.3: Juego de entrada con compromiso previo. Si la inversión hundida C_0 hace creíble la lucha ($\pi^L > \pi^D - C_0$), la lucha causa pérdidas a la entrante ($\pi^L < 0$) y la inversión compensa ($\pi^M - C_0 > \pi^D$), la incumbente invierte y la entrada queda disuadida. ACT es invertir C_0 y PAS, no invertir. Los beneficios de monopolio, de duopolio y de lucha son π^M, π^D y π^L.

Bienestar: el ENPS es eficiente para las dos empresas frente a la lucha, y la entrada aumenta la competencia y el bienestar de los consumidores, lo que explica el interés de la política de competencia por las conductas que la disuaden.

Conclusiones: dos lecciones se desprenden del juego. La primera es la *credibilidad*, pues la incumbente puede alterar el resultado comprometiéndose creíblemente a luchar. La paradoja es que reducir la propia libertad de acción futura puede aumentar el poder estratégico presente[6]. La segunda es la *ventaja de mover primero*, ya que quien mueve primero puede comprometerse con una acción que condiciona la respuesta del seguidor (el líder de Stackelberg obtiene más que en Cournot). Sin embargo, la ventaja no es universal, pues en la competencia secuencial en precios con productos diferenciados el seguidor gana más que el líder.

> Las barreras a la entrada se estudian en el tema A15, apartado 2.2.1. Los modelos de oligopolio (Cournot, Bertrand, Stackelberg) se desarrollan en el tema A19, sección 1, y la disuasión estratégica de la entrada, en su apartado 3.2.

[6] Un ejemplo clásico es el de Hernán Cortés al hundir sus naves en 1519, episodio que la tradición recuerda como su "quema".

2.3.2. El dilema del prisionero repetido en horizonte finito

> La aplicación a la colusión en oligopolio, con competencia en precios a la Bertrand, se desarrolla en el tema A19, apartado 2.1.2, con el mismo razonamiento.

La cuestión es si la amenaza de castigar mañana a quien no coopere hoy permite sostener la cooperación que el juego de una sola ronda no sostiene.

Supuestos:

▪ *Entorno*: el juego de etapa, el dilema del prisionero, se repite un número finito de veces, T, conocido por todos. La información es completa y de conocimiento común, cada jugador observa las acciones pasadas y el juego no varía de un periodo a otro.

▪ *Agentes*: dos jugadores racionales. En lo que sigue, cooperar (c) es no confesar (NC) y no cooperar (nc) es confesar (C).

Razonamiento: el juego se resuelve por inducción hacia atrás:

1. *Periodo T*: como ya no hay futuro, la historia es irrelevante y el juego se reduce a una sola jugada. No cooperar es la estrategia dominante, porque el castigo tendría que llegar en $T+1$, que no existe, y ninguna amenaza es creíble. Todo ENPS prescribe, por tanto, el EN de etapa en el último periodo.

2. *Periodo $T-1$ y anteriores*: ambos saben que en T nadie cooperará pase lo que pase hoy, así que desviarse en $T-1$ no tiene coste. El mismo argumento vale para $T-2$ y, retrocediendo, para cada periodo hasta el primero.

Equilibrio: el único ENPS consiste en T repeticiones del EN del juego de etapa, (C, C) en cada ronda. Ni siquiera hay otros EN que sostengan la cooperación en alguna ronda, porque el pago del EN de etapa, $(-5,-5)$, coincide con el pago *minimax* de cada jugador (lo máximo que obtiene cuando el rival lo castiga confesando), de modo que no hay castigo más severo con el que amenazar. La excepción son los juegos de etapa con varios EN, en los que la repetición finita sí puede sostener la cooperación en las primeras rondas, con la selección del equilibrio final como premio o castigo.

Bienestar: el resultado es tan ineficiente como el del juego de una ronda, repetido T veces.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: la lección, negativa y robusta, es que con horizonte finito y conocido e información completa la cooperación no se sostiene por los propios incentivos. Además, el modelo precisa qué haría falta, un horizonte sin final conocido o varios equilibrios en el juego de etapa.

▪ *Limitaciones*: el resultado depende de que el último periodo se conozca con certeza y de que la racionalidad sea conocimiento común. De hecho, basta una pequeña probabilidad de que el rival sea de un tipo cooperativo para que la cooperación se sostenga durante buena parte del juego (Kreps, Milgrom, Roberts y Wilson, 1982).

2.3.3. Juegos repetidos en horizonte infinito: la colusión tácita

> La aplicación a la colusión tácita, con el umbral $\beta \geq 1/2$ del duopolio de Bertrand, su extensión a n empresas y las guerras de precios en equilibrio, se desarrolla en el tema A19, apartado 2.2.

James Friedman (1971) estudió si, cuando los jugadores prevén un número indeterminado de repeticiones (el "superjuego"), lo que ganan a largo plazo cumpliendo sus compromisos compensa la ganancia inmediata de incumplirlos.

Supuestos:

▪ *Entorno*: el juego de etapa se repite infinitamente o, de forma equivalente, con una probabilidad constante $p \in (0,1)$ de que continúe tras cada periodo, que se incorpora al factor de descuento. La información es completa y cada jugador observa las acciones pasadas.

▪ *Agentes*: dos jugadores racionales que descuentan el futuro con un factor $\beta \in (0,1)$.

Planteamiento: consta de tres elementos:

▪ *Historia del juego*: la historia hasta el periodo t es la sucesión de acciones de ambos jugadores, $h^{t-1} = \{(s_1^\tau, s_2^\tau)\}_{\tau=1}^{t-1}$, con $s_i^\tau \in \{c, nc\}$, y la estrategia de cada jugador en cada periodo es una función de ella, $s_i^t(h^{t-1})$.

▪ *Estrategia del gatillo* (*trigger strategy*): $s_i^t(h^{t-1}) = c \Leftrightarrow (s_1^\tau, s_2^\tau) = (c,c) \;\; \forall \tau < t$. Cada jugador coopera mientras ambos hayan cooperado en todos los periodos anteriores y, ante una sola desviación, revierte para siempre al EN del juego de etapa.

▪ *Condición de cooperación*: cooperar debe valer al menos tanto como desviarse y sufrir después el castigo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \, \pi_{c,c} \;\geq\; \pi_{nc,c} + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \, \pi_{nc,nc}, \qquad \beta \in (0,1)$$

donde $\pi_{c,c}$ es el pago de cooperación mutua, $\pi_{nc,c}$ el pago de traicionar cuando el otro coopera y $\pi_{nc,nc}$ el pago del EN no cooperativo.

Aplicando la serie geométrica, $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = 1/(1-\beta)$, y operando, con $\pi_{nc,c} > \pi_{c,c} > \pi_{nc,nc}$:

$$\frac{\pi_{c,c}}{1-\beta} \;\geq\; \pi_{nc,c} + \frac{\beta}{1-\beta}\,\pi_{nc,nc} \quad\Longrightarrow\quad \beta \;\geq\; \frac{\pi_{nc,c} - \pi_{c,c}}{\pi_{nc,c} - \pi_{nc,nc}}$$

Equilibrio: la cooperación es un ENPS si se cumple la condición. El numerador del umbral es la ganancia inmediata de la traición, $\pi_{nc,c} - \pi_{c,c}$, y el denominador suma a esa ganancia la pérdida que el castigo inflige en cada periodo futuro, $\pi_{c,c} - \pi_{nc,nc}$. Si los jugadores son suficientemente pacientes, la pérdida futura supera la ganancia presente. El castigo es creíble porque revertir al EN del juego de etapa es, en cada subjuego, un equilibrio. En el dilema del prisionero, con $\pi_{c,c} = -1$, $\pi_{nc,c} = 0$ y $\pi_{nc,nc} = -5$, basta $\beta \geq 1/5$.

Bienestar: el resultado general es el *folk theorem*. Friedman (1971) mostró que, si el juego se repite sin fin y los jugadores son lo bastante pacientes, puede sostenerse como ENPS cualquier vector de pagos factible que mejore estrictamente para todos el pago del EN del juego de etapa. Fudenberg y Maskin (1986) lo generalizaron, con castigos más duros que la vuelta al EN, a todo

vector factible que dé a cada jugador más que su pago *minimax*, con una condición de dimensión si hay más de dos jugadores. La cooperación eficiente es, por tanto, alcanzable, pero también lo son infinitos resultados intermedios, de modo que la repetición resuelve el problema de eficiencia a costa de un problema de multiplicidad.

Extensiones: además de la estrategia del gatillo, destacan otras dos:

- *Tit-for-tat* (Axelrod, 1984): coopera en la primera ronda y después imita la acción del rival en la anterior, de modo que permite restaurar la cooperación tras una desviación.

- *Castigo óptimo*: castiga durante un número finito de periodos y vuelve después a cooperar, maximizando los pagos cooperativos sujetos a la restricción de incentivos.

Conclusiones: la aplicación económica central es la *colusión tácita* en oligopolio. Si las empresas son suficientemente pacientes y existen castigos creíbles, la cooperación colusiva puede sostenerse sin acuerdos explícitos. Por eso la estabilidad de los cárteles depende del número de empresas, de la transparencia del mercado y del factor de descuento.

2.3.4. Reputación y la paradoja de la cadena de tiendas (Selten, 1978; Kreps y Wilson, 1982)

Origen: Reinhard Selten (1978) planteó la paradoja como crítica a su propio concepto de perfección en subjuegos, y Kreps y Wilson (1982) y Milgrom y Roberts (1982b) la resolvieron con información incompleta.

Idea: una cadena de tiendas se enfrenta sucesivamente a K entrantes en el juego de entrada. Por inducción hacia atrás nunca debe luchar, porque en el último mercado luchar no disuade a nadie, y así hasta el primero. La intuición dice, en cambio, que conviene luchar al principio para ganar una reputación de dureza.

Razonamiento: si, con una probabilidad $\varepsilon > 0$ que es conocimiento común, la cadena es un tipo duro que lucha siempre, la solución es un EBP. Acomodar revela que la cadena es racional, mientras que luchar mantiene la sospecha de que es dura, de modo que el tipo racional imita al duro mientras la reputación le ahorre entradas futuras. Con los pagos del juego de entrada, un entrante espera $2 - 5\,\Pr(\text{luchar})$ y solo entra si $\Pr(\text{luchar}) < 2/5$. Para K grande, una ε arbitrariamente pequeña sostiene la no entrada en casi todos los mercados. La reputación racionaliza así la predación (tema A19, apartado 3.2.3; tema A15).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: resuelve la paradoja sin renunciar a la racionalidad de la cadena y muestra la fragilidad de la inducción hacia atrás, que cambia por completo con una perturbación mínima de la información.

- *Limitaciones*: la predicción depende del tipo "duro" que se postule y de que su probabilidad inicial sea conocimiento común, supuestos difíciles de contrastar.

2.4. Juegos cooperativos y negociación

La sección ilustra los conceptos de solución de los juegos cooperativos y termina con la negociación bilateral, que enlaza los enfoques cooperativo y no cooperativo. Los conceptos de núcleo y valor de Shapley del apartado 1.4.2 se ilustran con dos aplicaciones características, la *joint venture* de dos empresas y el reparto del poder en una votación.

2.4.1. El núcleo: la *joint venture*

Dos empresas valoran cooperar en un proyecto conjunto. En solitario, la empresa 1 obtiene $V(\{1\}) = 1$ y la empresa 2, $V(\{2\}) = 2$. Si cooperan, las sinergias elevan el valor a $V(\{1,2\}) = 5$. El **núcleo** es el conjunto de repartos (x_1, x_2) con $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \geq 1$ y $x_2 \geq 2$. Cualquier reparto que dé a cada socio al menos su alternativa exterior es estable, pues ninguna de las dos gana rompiendo el acuerdo. El núcleo no determina un reparto único, ya que cualquier punto del segmento entre $(1, 4)$ y $(3, 2)$ es estable.

2.4.2. El valor de Shapley: reparto único y poder de voto

El **valor de Shapley** selecciona un reparto concreto, que en este juego pertenece al núcleo. Promediando las contribuciones marginales de cada empresa en los dos órdenes posibles de formación de la coalición, se obtienen $\phi_1 = (1 + 3)/2 = 2$ y $\phi_2 = (4 + 2)/2 = 3$.

Gráficamente, el núcleo y el valor de Shapley se representan en el plano (x_1, x_2) (figura A14.4):

1. *Restricciones individuales*, $x_1 \geq V(\{1\})$ y $x_2 \geq V(\{2\})$: cada socio recibe al menos su alternativa exterior.

2. *Recta de repartos eficientes*, $x_1 + x_2 = V(\{1,2\}) = 5$: recoge los repartos que agotan el valor de la coalición.

3. *Núcleo y valor de Shapley*: el núcleo es el segmento de esa recta entre $(1, 4)$ y $(3, 2)$, y el valor de Shapley, $\phi = (2, 3)$, es uno de sus puntos.

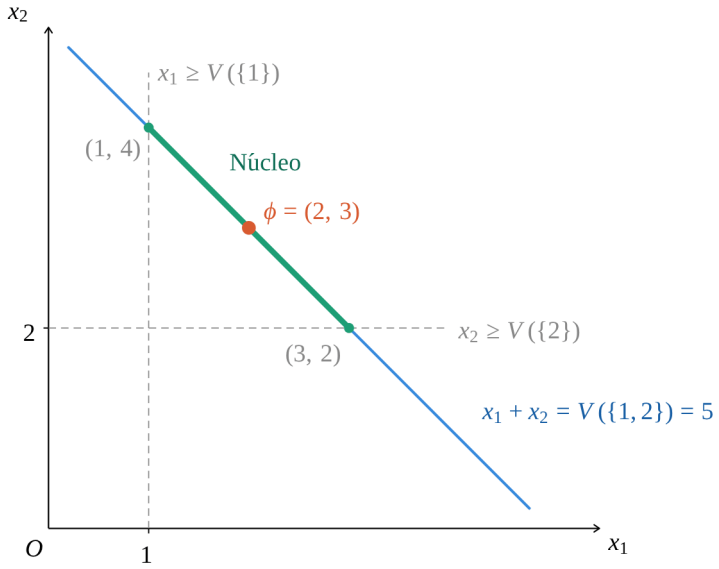


Figura A14.4: *Joint venture* de dos empresas. El núcleo es el conjunto de repartos eficientes no bloqueados y el valor de Shapley, el reparto único.

Aplicado a juegos de votación (donde $V(S) = 1$ si la coalición alcanza la mayoría y 0 en caso contrario), el valor de Shapley da lugar al **índice de poder de Shapley-Shubik**, que mide el poder de cada partido como la proporción de ordenaciones en las que resulta *pivotal*. El resultado

clásico es que el poder no es proporcional a los escaños. Por ejemplo, en un parlamento con tres partidos de 45, 35 y 20 escaños y mayoría de 51, cualquier pareja alcanza la mayoría, por lo que los tres son pivotales por igual y el índice asigna a cada uno un poder de 1/3.

Bienestar: ambos conceptos son eficientes por construcción (reparten todo el valor de la gran coalición).

Conclusiones: los ejemplos muestran la diferencia de criterio entre el núcleo y el valor de Shapley. La teoría cooperativa es el fundamento de los modelos de negociación (tema A27), de la teoría del equilibrio general (el núcleo converge al equilibrio competitivo cuando crece el número de agentes, tema A21) y de la medición del poder en las decisiones colectivas (tema A24).

2.4.3. Negociación: la solución de Nash (1950) y el modelo de Rubinstein (1982)

> La solución de Nash es la base de los modelos de negociación salarial del tema A27: su versión generalizada, con distinto poder negociador (apartado 2.1.3), el modelo de *right to manage* (apartado 2.2) y los contratos eficientes (apartado 2.3).

Origen: John Nash (1950) formuló la primera solución axiomática al reparto entre dos agentes, y Ariel Rubinstein (1982) le dio fundamento estratégico como ENPS de un juego de ofertas alternas.

Idea: dos agentes deben repartirse un excedente y, sin acuerdo, cada uno obtiene su pago de desacuerdo. Nash no modela el regateo, sino las propiedades que debe cumplir un reparto razonable, y demuestra que solo uno las cumple todas. Por su parte, Rubinstein muestra que ese reparto es, aproximadamente, lo que obtendrían dos negociadores impacientes con ofertas alternas.

Supuestos:

- *Entorno*: un conjunto factible de pares de utilidades $\mathcal{U}$, compacto y convexo, y un punto de desacuerdo $d = (d_1, d_2) \in \mathcal{U}$ dominado por algún $u \in \mathcal{U}$.
- *Agentes*: dos jugadores con utilidades de von Neumann-Morgenstern u_1 y u_2.
- *Axiomas*: la solución debe ser (a) *invariante* a transformaciones afines positivas de las utilidades, (b) *simétrica* (si $\mathcal{U}$ es simétrico y $d_1 = d_2$, ambos reciben lo mismo), (c) *independiente de alternativas irrelevantes* (sigue siendo la solución en todo subconjunto de $\mathcal{U}$ que la contenga junto con d) y (d) *eficiente* en el sentido de Pareto.

Planteamiento: la única solución que satisface los cuatro axiomas es la que resuelve

$$\max_{(u_1,u_2)\in\mathcal{U}} (u_1 - d_1)(u_2 - d_2) \qquad \text{s.a.:} \quad u_i \geq d_i,\ i = 1, 2$$

donde u_i es la utilidad que el acuerdo proporciona al jugador i, d_i su utilidad de desacuerdo (su *alternativa exterior*) y $u_i - d_i$ su ganancia neta. En el reparto de un excedente monetario Y con utilidades lineales, $u_1 = x$ y $u_2 = Y - x$, el programa se reduce a $\max_x (x - d_1)(Y - x - d_2)$.

CPO: en el reparto monetario, la derivada del producto de Nash respecto a x se anula:

$$(Y - x - d_2) - (x - d_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^* - d_1 = Y - x^* - d_2$$

En el caso general, la CPO iguala la pendiente de la frontera de $\mathcal{U}$, en valor absoluto, a la ratio de ganancias netas:

$$-\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_2 - d_2}{u_1 - d_1}$$

En el plano (u_1, u_2) (figura A14.5), las curvas de nivel del producto de Nash son hipérbolas con asíntotas $u_1 = d_1$ y $u_2 = d_2$, y la solución N es el punto en que la más alta de ellas toca la frontera de $\mathcal{U}$.

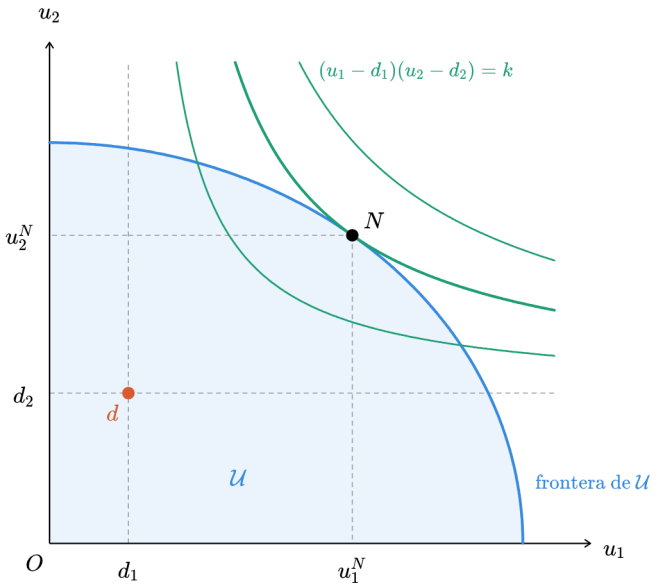


Figura A14.5: Solución de negociación de Nash. Las curvas de nivel del producto de Nash, $(u_1 - d_1)(u_2 - d_2) = k$, son hipérbolas con asíntotas $u_1 = d_1$ y $u_2 = d_2$, y la solución N está donde la más alta de ellas toca la frontera del conjunto factible $\mathcal{U}$. En N, la pendiente de la frontera, en valor absoluto, iguala la ratio de ganancias netas respecto al punto de desacuerdo, $(u_2 - d_2)/(u_1 - d_1)$.

CSO: el objetivo es estrictamente cóncavo en x (su segunda derivada es -2), lo que hace la CPO suficiente. En el caso general, la convexidad de $\mathcal{U}$ garantiza un máximo único.

Solución: el reparto iguala las ganancias netas de los dos jugadores:

$$x^* = d_1 + \frac{1}{2}(Y - d_1 - d_2)$$

Cada parte recibe su alternativa exterior más la mitad del excedente que la negociación genera respecto al desacuerdo, de modo que quien tiene mejor alternativa exterior obtiene más.

Extensiones: en el *modelo de Rubinstein* (1982), dos jugadores se reparten un excedente de tamaño uno con ofertas alternas sin límite de periodos, y ambos descuentan el futuro con un factor $\beta \in (0, 1)$. El jugador 1 propone en los periodos pares y el 2 en los impares. Quien recibe la oferta la acepta o la rechaza, y en este caso se pasa al periodo siguiente. El único ENPS tiene acuerdo inmediato, en el que el jugador 1 se queda con $x^* = 1/(1+\beta)$ y el 2 acepta, porque quien propone ofrece al otro exactamente lo que este obtendría, descontado, si rechazase y propusiera

él después ($1 - x^* = \beta x^*$). Por tanto, el proponente obtiene más de la mitad, tanto más cuanto más impacientes sean los jugadores. Cuando $\beta \to 1$, el reparto converge a la mitad, la solución de Nash simétrica, de modo que la ventaja del proponente nace de la impaciencia.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la solución de Nash es la herramienta estándar para todo reparto bilateral que el mercado no fija, como la negociación salarial o el monopolio bilateral, cuyo precio deja indeterminado el análisis de oferta y demanda (tema A17). Rubinstein le da un fundamento no cooperativo.

- *Limitaciones*: el axioma de independencia de alternativas irrelevantes es discutible (Kalai y Smorodinsky, 1975, lo sustituyen por una condición de monotonía), y el resultado depende de qué se tome como punto de desacuerdo. Además, ambos modelos suponen información completa, cuando con información privada aparecen retrasos e ineficiencias que ninguno predice.

2.5. Conclusiones

Los juegos estáticos recorren los casos del equilibrio de Nash, desde el que coincide con el de estrategias dominantes hasta el que solo existe en estrategias mixtas o se multiplica y deja la selección a las convenciones. Con incertidumbre, la información privada se traslada a las creencias y puede impedir intercambios beneficiosos, como en el mercado de coches usados. En los juegos dinámicos, la inducción hacia atrás descarta las amenazas que no conviene cumplir, y por eso la disuasión y la cooperación se apoyan en compromisos irreversibles, en la repetición indefinida o en la reputación. Por último, en la negociación de Rubinstein el reparto converge con jugadores pacientes a la solución simétrica de Nash. El apartado 3 aplica el equilibrio de Bayes-Nash a las subastas.

3. Teoría de las subastas

Tras describir los formatos de subasta, se derivan las pujas de equilibrio y el teorema de equivalencia de ingresos, con los casos en que deja de cumplirse, y se repasan sus aplicaciones al diseño de políticas públicas.

3.1. Concepto (Vickrey, 1961; Myerson, 1981; Milgrom y Wilson, Nobel 2020)

Las subastas son uno de los mecanismos de asignación de bienes y recursos más antiguos y extendidos. Ya Heródoto describe subastas de novias en Babilonia hacia el siglo V a. C.

Hoy siguen siendo centrales en la economía y se emplean para colocar deuda pública, adjudicar licencias de espectro radioeléctrico, vender electricidad en los mercados mayoristas o asignar los anuncios en buscadores y redes sociales.

La **teoría de subastas**, iniciada por William Vickrey (1961, Nobel en 1996), analiza el funcionamiento de los distintos mecanismos de venta en presencia de información asimétrica (cada pujador conoce su propia valoración, pero no la de los demás). Myerson (1981) la extendió al diseño de la subasta óptima para el vendedor. Por esa información asimétrica, las subastas son la principal aplicación de los juegos con información incompleta.

3.2. Formatos básicos de subasta

Se distinguen cuatro formatos básicos, en los que se subasta un único objeto:

1. *Subasta inglesa* (ascendente): el precio se anuncia abiertamente y sube hasta que queda un solo pujador, que obtiene el objeto y paga el precio al que abandonó el último rival.

2. *Subasta holandesa* (descendente): el precio también se anuncia públicamente, pero baja desde un nivel alto hasta que un pujador lo acepta y paga ese precio.

3. *Subasta en sobre cerrado de primer precio*: a diferencia de los dos casos anteriores, cada pujador presenta una oferta sellada, sin conocer las de los demás. El ganador es quien presenta la oferta más alta y paga su propia oferta.

4. *Subasta en sobre cerrado de segundo precio* (Vickrey): cada pujador presenta de nuevo una oferta sellada, y gana quien presenta la más alta, pero en este caso paga la segunda oferta más alta.

3.3. Pujas de equilibrio: la subasta de primer precio y la subasta de Vickrey (1961)

Origen: la derivación de las pujas de equilibrio con valores privados independientes se debe a Vickrey (1961), que resolvió el caso uniforme y propuso la subasta de segundo precio que lleva su nombre.

Idea: en la subasta de primer precio, pujar alto aumenta la probabilidad de ganar pero reduce la ganancia, y la puja óptima rebaja la valoración (*bid shading*) según el número de rivales. En cambio, en la de segundo precio el dilema desaparece, porque la puja solo decide si se gana, no cuánto se paga.

Supuestos:

- *Entorno*: cada pujador conoce su valoración v_i, extraída de forma independiente de una uniforme en $[0,1]$ (valores privados independientes).

- *Agentes*: $n \geq 2$ pujadores neutrales al riesgo y un vendedor que valora el objeto en cero.

- *Reglas*: pujas simultáneas en sobre cerrado. Gana la más alta y paga su puja (primer precio) o la segunda más alta (Vickrey). Se busca un equilibrio simétrico en estrategias $b(v)$ crecientes.

Planteamiento: en la subasta de primer precio, el pujador de valoración v elige su puja b para maximizar el excedente esperado:

$$\max_b (v-b)\cdot \Pr(\text{ganar} \mid b), \qquad \Pr(\text{ganar} \mid b) = \left[b^{-1}(b)\right]^{n-1}$$

donde $v-b$ es la ganancia si vence, $b^{-1}(b)=\tilde{v}$ es la valoración del rival que, en equilibrio, pujaría exactamente b, y $\tilde{v}^{n-1}$ la probabilidad de que las $n-1$ valoraciones rivales sean inferiores a $\tilde{v}$. Elegir la puja equivale a elegir la valoración $\tilde{v}$ que el pujador aparenta, $\max_{\tilde{v}} (v-b(\tilde{v}))\,\tilde{v}^{n-1}$.

CPO: derivando respecto a b e imponiendo que en equilibrio el pujador no quiera desviarse de $b^* = b(v)$ (es decir, que no quiera aparentar una valoración distinta de la propia, $\tilde{v}=v$), el beneficio marginal de pujar un euro más debe igualar a su coste marginal[7]:

$$\underbrace{\frac{(n-1)\,v^{n-2}}{db/dv}\,[v-b(v)]}_{\text{Bmg}(b^*)} = \underbrace{v^{n-1}}_{\text{Cmg}(b^*)}$$

El beneficio marginal es el aumento de la probabilidad de ganar multiplicado por el excedente obtenido al ganar, mientras que el coste marginal es la probabilidad de ganar, pues el euro adicional se paga en todos los casos en que se gana.

CSO: la derivada del objetivo respecto a $\tilde{v}$ tiene el signo de $v-\tilde{v}$, de modo que a quien aparenta menos de lo que valora le compensa subir la puja, y a quien aparenta más, bajarla. Por tanto, $\tilde{v}=v$ es el máximo global y $b(v)$ es mejor respuesta a sí misma (equilibrio de Bayes-Nash simétrico).

Solución: integrando con $b(0)=0$ resulta $b(v)=\frac{n-1}{n}\,v$, es decir, la puja es una fracción constante de la valoración (la mitad con dos pujadores) que tiende a la valoración cuando $n\to\infty$, porque la competencia elimina la rebaja.

En la subasta de Vickrey, en cambio, pujar la propia valoración, $b(v)=v$, es débilmente dominante, pues pujar más solo añade victorias con pérdida y pujar menos solo hace perder victorias rentables. El ganador paga la segunda valoración, cuya esperanza es $\frac{n-1}{n}\,v$, lo mismo que puja el ganador en la de primer precio.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el modelo da una predicción cerrada y contrastable de las pujas y muestra que la rebaja estratégica es una respuesta racional a la información privada, no un fallo.

[7] Multiplicando por $b'(v)$ y reordenando, $v^{n-1}b'(v)+(n-1)\,v^{n-2}\,b(v)=(n-1)\,v^{n-1}$, cuyo lado izquierdo es la derivada de $v^{n-1}b(v)$. Por tanto, la CPO equivale a la ecuación diferencial $\frac{d}{dv}\left[v^{n-1}b(v)\right]=(n-1)\,v^{n-1}$, que puede integrarse directamente para obtener la puja de equilibrio.

▪ *Limitaciones*: la solución cerrada depende de la simetría, la neutralidad al riesgo y la independencia de las valoraciones. Así, con aversión al riesgo, los pujadores rebajan menos (la de primer precio recauda más que la de Vickrey), y con valores comunes la puja debe corregir además la maldición del ganador.

> La subasta de Vickrey es el caso más sencillo del *mecanismo de Clarke-Groves-Vickrey* (VCG, por sus siglas en inglés), que el tema A23, apartado 2.1.4, estudia como solución a la provisión ineficiente de los bienes públicos. Con varios objetos, el mecanismo asigna los bienes de forma eficiente y cobra a cada pujador el coste que su presencia impone a los demás, de modo que pujar la verdadera valoración sigue siendo una estrategia dominante. En la práctica apenas se usa, porque puede recaudar poco y es vulnerable a la colusión y a los pujadores ficticios (Ausubel y Milgrom, 2006). Una excepción notable fue la venta de publicidad de Facebook (Varian y Harris, 2014).

3.4. Teorema de equivalencia de ingresos (Vickrey, 1961; Riley y Samuelson, 1981; Myerson, 1981)

Origen: Vickrey (1961) observó que, con valores privados independientes y uniformes, las subastas de primer y de segundo precio generan el mismo ingreso esperado. Riley y Samuelson (1981) y Myerson (1981) lo generalizaron, de forma independiente, al analizar la subasta óptima para el vendedor.

Idea: el ingreso esperado del vendedor depende de quién obtiene el objeto y del excedente que se deja al pujador de menor valoración, no de las reglas de pago. Por ello, dos subastas que asignan el objeto del mismo modo recaudan, en promedio, lo mismo.

Supuestos:

▪ *Entorno*: valores privados independientes. Cada pujador conoce su propia valoración, independiente de las demás y extraída de la misma distribución continua.

▪ *Agentes*: $n \geq 2$ pujadores neutrales al riesgo y simétricos.

▪ *Reglas*: cualquier formato en el que gane el pujador de mayor valoración y el de valoración mínima obtenga excedente nulo.

Razonamiento: con estos supuestos, los cuatro formatos básicos de subasta generan el mismo ingreso esperado para el vendedor[8]. La intuición distingue dos grupos de formatos:

▪ *Vickrey e inglesa*: la estrategia débilmente dominante es pujar la verdadera valoración (revelación veraz) o, en la inglesa, permanecer en la puja hasta alcanzarla, pues el precio pagado no depende de la propia oferta.

▪ *Primer precio y holandesa*: los pujadores rebajan estratégicamente sus ofertas (*bid shading*), pero el equilibrio produce el mismo ingreso esperado.

Extensiones: el teorema sirve de referencia para analizar qué cambia cuando el vendedor fija un precio mínimo o cuando falla alguno de sus supuestos:

[8] La demostración (Myerson, 1981) se apoya en el teorema de la envolvente. Por él, la utilidad de equilibrio del tipo v es $U(v) = \int_0^v P(x)\,dx$, donde $P(x)$ es la probabilidad de ganar del tipo x. Como $P(\cdot)$ es la misma en todos los formatos, también lo son $U(v)$, el pago esperado de cada tipo, $vP(v) - U(v)$, y el ingreso del vendedor ($\frac{n-1}{n+1}$ en el caso uniforme).

▪ *Precio de reserva óptimo* (Myerson, 1981): el vendedor aumenta su ingreso esperado fijando un *precio de reserva* $\underline{r}$ por debajo del cual no vende, aunque a veces se quede con el objeto. La condición de optimalidad es $\underline{r} - \frac{1-F(\underline{r})}{f(\underline{r})} = 0$, donde F y f son la distribución y la densidad de las valoraciones. El vendedor se comporta como un monopolista frente al pujador de mayor valoración e iguala su coste (cero) al *valor virtual*, el ingreso marginal de vender al tipo $\underline{r}$ descontada la renta informacional que cede a los tipos superiores. En el caso uniforme, $\underline{r}^* = 1/2$ con independencia de n. Con dos pujadores, el ingreso esperado pasa de 1/3 a 5/12.

▪ *Aversión al riesgo*: la equivalencia se rompe a favor de la subasta de primer precio y de la holandesa. En ellas, pujar algo más reduce el riesgo de quedarse sin el objeto, de modo que los pujadores aversos al riesgo rebajan menos sus ofertas. En la de Vickrey y en la inglesa, en cambio, pujar la propia valoración sigue siendo débilmente dominante y la recaudación no cambia.

▪ *Valores comunes*: el valor del objeto es el mismo para todos los pujadores, pero desconocido (p. ej. una concesión petrolífera). Surge la *maldición del ganador*, porque el ganador tiende a ser quien más ha sobrestimado el valor, por lo que los pujadores racionales ajustan sus ofertas a la baja. La corrección consiste en pujar según el valor esperado *condicionado a ganar*, y como la señal del ganador es más optimista cuanto mayor es n, más competidores no siempre elevan las pujas. La subasta inglesa mitiga la maldición porque las retiradas sucesivas revelan las señales de los rivales.

▪ *Valores afiliados* (Milgrom y Weber, 1982): las señales de los pujadores están correlacionadas positivamente, de modo que una señal alta hace más probable que las de los rivales también lo sean. La subasta inglesa genera al menos tantos ingresos como las de sobre cerrado (y la de segundo precio, al menos tantos como la de primer precio), porque revela más información durante el proceso.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el teorema es la referencia con la que se comparan todos los formatos, y el razonamiento de su demostración se extiende al diseño de la subasta óptima.

▪ *Limitaciones*: sus supuestos (neutralidad al riesgo, simetría, valores privados independientes y un único objeto) rara vez se cumplen a la vez, y cuando falla alguno los formatos dejan de ser equivalentes. Tampoco contempla la colusión entre pujadores ni la venta de muchas unidades, que son habituales en las aplicaciones.

3.5. Aplicaciones

El Premio Nobel de 2020 a Paul Milgrom y Robert Wilson reconoció la mejora de la teoría de subastas y la invención de nuevos formatos, como las subastas de múltiples objetos y las combinatorias, que han llevado la teoría al diseño de políticas públicas. En la mayoría de estas aplicaciones se venden muchas unidades de un bien homogéneo a pujadores que demandan varias, y el teorema de equivalencia de ingresos deja de cumplirse.

En la subasta de *precio uniforme* todos los adjudicatarios pagan el precio marginal, lo que invita a rebajar la puja de las últimas unidades para abaratar las demás. En la *discriminatoria* (de precios múltiples) cada uno paga su puja, lo que invita a rebajarlas todas. Ningún formato domina al otro en general, ni en ingresos ni en eficiencia. Las principales aplicaciones son las siguientes:

- *Deuda pública*: el Tesoro Público usa un formato mixto, la subasta española u holandesa modificada. En ella, las ofertas competitivas aceptadas pagan su propio precio si queda entre el mínimo aceptado y el medio ponderado, y el medio ponderado si lo igualan o superan, igual que las no competitivas (Orden ECM/2/2026, art. 12.4). En cambio, el Tesoro de EE. UU. aplica precio uniforme a todas sus subastas desde 1998 (tema B24, apartado 1.1.1).

- *Política monetaria*: el Eurosistema adjudicó sus operaciones principales de financiación por subasta a tipo variable y de precios múltiples entre junio de 2000 y octubre de 2008, tras comprobar que el tipo fijo con prorrateo provocaba pujas infladas. Desde entonces aplica tipo fijo con adjudicación plena, confirmado en la revisión de su marco operativo de 2024, de modo que cada entidad obtiene lo que pide al tipo oficial y la subasta deja de ser un juego estratégico (tema A36, apartado 3.1.1).

- *Derechos de emisión*: el régimen de comercio de derechos de emisión de la Unión Europea (RCDE UE) subasta hasta el 57 % de sus derechos generales de 2021-2030 en la bolsa European Energy Exchange (EEX) de Leipzig. Las subastas son de ronda única, en sobre cerrado y a precio uniforme (Reglamento Delegado (UE) 2023/2830; tema A23, apartado 2.2.5).

- *Espectro radioeléctrico*: Milgrom y Wilson, en parte con Preston McAfee, diseñaron para la Comisión Federal de Comunicaciones de EE. UU. la subasta simultánea de rondas múltiples, que vende a la vez todas las licencias con pujas ascendentes para que cada operador ajuste sus pujas por licencias complementarias. En su estreno, en julio de 1994, la subasta vendió diez licencias por 617 M$ (Real Academia Sueca de Ciencias, 2020).

- *Contratación pública*: en una licitación el comprador subasta un contrato a la baja, y el riesgo principal es la colusión entre licitadores (*bid rigging*), que la teoría de subastas ayuda a detectar (sobre los cárteles, tema A19, apartado 2.1.1). Por ejemplo, en las licitaciones de carreteras de Long Island, el orden de las ofertas de cobertura del cártel no respondía a sus costes (Porter y Zona, 1993). La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) recoge estos indicios en sus directrices de 2025.

Conclusiones

La teoría de juegos es el marco formal de la interacción estratégica, y sus conceptos de solución se ordenan según el tiempo y la información del juego. Así, la dominancia y el equilibrio de Nash resuelven los juegos estáticos, el ENPS descarta las amenazas no creíbles de los dinámicos y los equilibrios bayesianos incorporan las creencias cuando hay información privada. Los ejemplos muestran que el equilibrio puede no existir en estrategias puras, como en el *matching pennies*, no ser único, como en la batalla de los sexos, o no ser eficiente, como en el dilema del prisionero, y que la repetición entre jugadores pacientes permite sostener la cooperación (*folk theorem*). Los juegos cooperativos, en cambio, se ocupan del reparto estable (el núcleo) y equitativo (el valor de Shapley) de las ganancias de cooperar, y las subastas aplican estas herramientas a un problema de diseño.

Estas herramientas recorren buena parte del libro, siempre que el resultado de cada agente dependa de lo que hagan los demás. En los mercados, el oligopolio, la colusión tácita y la disuasión de la entrada son juegos entre empresas (tema A19), y la selección adversa y la señalización, juegos con información privada (tema A13). En macroeconomía, la inconsistencia dinámica de la política monetaria (Kydland y Prescott, 1977; Barro y Gordon, 1983a) es un juego entre el banco central y el público, en el que el anuncio de una inflación baja no es creíble sin compromiso (tema A06). En economía internacional, por último, la guerra arancelaria sigue la lógica del dilema del prisionero (tema B07), y la coordinación de políticas entre países se analiza con juegos no cooperativos y cooperativos (tema B19).

Sobre la colusión algorítmica, Calvano, Calzolari, Denicolò y Pastorello (2020) muestran en simulaciones que algoritmos de precios basados en el aprendizaje por refuerzo (*Q-learning*) aprenden por sí solos a fijar precios supracompetitivos y a castigar las desviaciones sin comunicarse entre sí. Los algoritmos reproducen así la colusión tácita de los juegos repetidos con una coordinación que nadie ha acordado. El diseño de mercados, por su parte, emplea la teoría de juegos para construir instituciones de asignación. Al diseño de subastas de Milgrom y Wilson (Nobel 2020) se suma la teoría de las asignaciones estables de Roth y Shapley (Nobel 2012), cuyos mecanismos de emparejamiento asignan médicos residentes, plazas escolares o riñones de donantes vivos.

A15. Teoría de la organización industrial

La empresa: el tamaño eficiente y sus límites. Mención especial de la economía de los costes de transacción. La Teoría de la Organización Industrial: barreras a la entrada y mercados impugnables.

Introducción

Uno de los principales objetos de la teoría económica es la organización de la producción y la asignación de los bienes producidos entre los agentes en distintos entornos institucionales. Ese objeto se estudia a través de las *estructuras de mercado*, entendidas como las características de un mercado que condicionan el comportamiento de compradores y vendedores y, con ello, la forma en que el mercado asigna los recursos.

Según el **grado de poder de mercado**, es decir, la capacidad de los agentes para influir sobre los precios, se distinguen cuatro estructuras básicas:

1. *Competencia perfecta*: ningún agente puede influir en el precio y todos son precio-aceptantes.

2. *Competencia monopolística*: las empresas venden bienes diferenciados, sustitutivos cercanos entre sí, y ejercen un poder de mercado limitado sobre su clientela.

3. *Oligopolio*: un número reducido de empresas comparte el mercado y la interdependencia estratégica entre ellas pasa a ser central.

4. *Monopolio*: un único vendedor protegido por barreras a la entrada abastece toda la demanda.

Aunque en la realidad no existen mercados perfectamente competitivos ni monopolios puros, estas referencias permiten ordenar los mercados observados y orientan la política de defensa de la competencia.

Históricamente, el análisis de los mercados comienza con los modelos de duopolio de Cournot (1838) y Bertrand (1883) y con el equilibrio parcial de Marshall (1890), que hizo de la competencia perfecta y del monopolio los dos polos de referencia. La insatisfacción con esa dicotomía, incapaz de explicar la publicidad o la diferenciación de productos, dio lugar en los años veinte y treinta a las teorías de la competencia imperfecta (Sraffa, 1926; Robinson y Chamberlin, 1933). Tras la Segunda Guerra Mundial, la escuela de Harvard (Mason, Bain) desarrolló el paradigma estructura-conducta-resultado, discutido por la escuela de Chicago, y, desde los años setenta, la teoría de juegos y la economía de la información originaron la nueva organización industrial. Frente al equilibrio parcial, la teoría del equilibrio general de Walras integró todos los mercados en un único sistema. Por último, la teoría de la regulación estudió por qué interviene el sector público y cómo debe hacerlo cuando el mercado no asigna eficientemente los recursos. Abarca desde la visión del interés público hasta la teoría económica de la regulación de Stigler (1971)

y los modelos con información asimétrica de Laffont y Tirole. Todo ello conforma hoy el fundamento analítico de la política de competencia y de la regulación de sectores como la energía, las telecomunicaciones o los mercados digitales.

La **teoría de la organización industrial** (TOI) estudia tanto la empresa como agente económico como el funcionamiento de los mercados. La teoría de la producción trata la empresa como "caja negra" tecnológica, y la teoría de mercados se centra en las decisiones de precio y cantidad. La TOI abarca, en cambio, la estructura interna de la empresa, las barreras a la entrada, la conducta estratégica y los resultados del mercado.

La TOI tiene implicaciones directas para la política de defensa de la competencia y la regulación, lo que la convierte en una de las ramas más aplicadas de la microeconomía.

El tema se organiza en tres partes:

- *Teoría de la empresa*: el tema estudia la empresa de su existencia a su comportamiento, con su tamaño eficiente, sus límites y los costes de transacción.

- *Teoría del mercado*: se analizan las barreras a la entrada, los mercados impugnables y la regulación.

- *Organización industrial empírica*: el tema termina con la nueva teoría de la organización industrial empírica (NEIO).

1. Teoría de la empresa

La **teoría de la empresa** estudia cuatro ámbitos de la naturaleza de la empresa: la existencia y los objetivos (¿por qué nacen las empresas y qué persiguen?), los límites (¿qué determina su tamaño?), la organización (¿cómo se organiza internamente?) y el comportamiento (¿cómo se comporta en los mercados?).

1.1. Existencia y objetivos

Las teorías de este apartado se ocupan sobre todo del objetivo de la empresa, de qué persigue y de quién decide en ella. La pregunta de por qué existe, es decir, por qué ciertas transacciones se organizan dentro de la empresa y no en el mercado, la responde Coase (1937) con los costes de transacción, que fijan también sus límites.

1.1.1. Enfoques tradicionales

Teoría de la maximización de beneficios: el enfoque tradicional considera que la empresa existe como unidad de decisión que combina factores para maximizar la diferencia entre ingresos y costes. Esta visión, aunque operativa y potente para la teoría de mercados, supone implícitamente que la empresa es una unidad de decisión monolítica (sin conflictos internos) y que dispone de la información necesaria para optimizar. Los enfoques posteriores cuestionan ambos supuestos.

Mención a la escuela austriaca: el pensamiento de Menger, Hayek y Kirzner ofrece una visión distinta. Los austriacos conciben el orden económico como un descubrimiento incesante y no como un equilibrio en reposo. Por eso, su empresario no optimiza mecánicamente, sino que está *alerta* a las ocasiones de obtener beneficio. Así, un beneficio extraordinario, que para el neoclásico delata la explotación de un monopolio, es para ellos el indicio de una oportunidad de mercado aún sin aprovechar. Competir es un proceso que transcurre en el tiempo, no un estado.

Hayek (1945) enfatizó, además, que el sistema de precios es un mecanismo descentralizado para transmitir información dispersa, una idea que inspiraría gran parte de la economía de la información posterior.

1.1.2. Enfoque directivista o gerencial

Origen: la empresa moderna se caracteriza, desde Berle y Means (1932), por la separación entre la propiedad (accionistas) y la gestión (directivos). Si los directivos disponen de discrecionalidad, la empresa puede perseguir objetivos distintos de la maximización del beneficio[1]. Pasa entonces a entenderse como una coalición de intereses en la que el objetivo efectivo depende de quién controla las decisiones. El primer modelo formal de esta familia es el de maximización de las ventas de Baumol (1959; 1967).

Idea: los directivos maximizan los ingresos por ventas, de los que dependen su remuneración y prestigio, sujetos a un beneficio mínimo que satisfaga a los accionistas. El resultado es una producción superior a la que maximiza el beneficio, pues el directivo expande las ventas hasta agotar la restricción.

[1] Si no existiera asimetría informativa, los propietarios podrían controlar perfectamente las acciones de los directivos y la empresa maximizaría beneficios.

Supuestos:

▪ *Entorno*: una empresa con poder de mercado afronta una demanda inversa decreciente $p(x)$, con $p' < 0$, y el ingreso total $\mathrm{IT}(x) = p(x)\,x$ se supone cóncavo ($2p' + p''x < 0$) y alcanza un máximo interior donde el ingreso marginal se anula. El coste total $\mathrm{CT}(x)$ es creciente y convexo, con costes fijos CF.

▪ *Agentes*: los directivos controlan la empresa, deciden la producción y su utilidad crece con el ingreso total. Los accionistas no observan las decisiones, pero sí el beneficio.

▪ *Restricciones*: los accionistas exigen un beneficio mínimo $\pi_{\min} > 0$, inferior al máximo alcanzable, $\pi_{\min} < \max_x \pi(x)$. Si no se alcanza, el equipo directivo es sustituido.

Planteamiento: los directivos resuelven

$$\max_x \ \mathrm{IT}(x) = p(x)\,x \quad \text{s.a.:} \quad \pi(x) = p(x)\,x - \mathrm{CT}(x) \geq \pi_{\min}$$

donde x es la producción, $p(x)$ la demanda inversa, $\mathrm{IT}(x)$ el ingreso total, $\mathrm{CT}(x)$ el coste total, $\pi(x)$ el beneficio y $\pi_{\min}$ el beneficio mínimo exigido por los accionistas. El lagrangiano es $\mathcal{L} = p(x)\,x + \lambda\,[\pi(x) - \pi_{\min}]$, con multiplicador $\lambda \geq 0$.

CPO: las condiciones de Kuhn-Tucker (tema A08, apartado 1.4.1) son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \mathrm{Img}(x) + \lambda\,\frac{d\pi}{dx} = 0 \tag{1}$$

$$\lambda \geq 0, \qquad \lambda\,[\pi(x) - \pi_{\min}] = 0 \tag{2}$$

donde (2) es la condición de holgura complementaria, que deja dos casos:

▪ *Restricción no activa* ($\lambda = 0$): la empresa produce donde el ingreso marginal se anula, $\mathrm{Img}(x_{\mathrm{IT}}) = 0$ (elasticidad unitaria de la demanda), lo que solo es factible si en ese punto el beneficio cubre el mínimo.

▪ *Restricción activa* ($\lambda > 0$): la empresa produce donde $\pi(x_B) = \pi_{\min}$, y de (1) se sigue $\mathrm{Img}(x_B) = -\lambda\,d\pi/dx_B > 0$, así que $d\pi/dx_B < 0$. La empresa opera, por tanto, en el tramo en que el beneficio decrece con la producción, a la derecha del máximo de beneficios.

CSO: con objetivo cóncavo y conjunto factible convexo, las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias y suficientes[2].

Equilibrio: sean x_π la producción que maximiza el beneficio ($\mathrm{Img}(x_\pi) = \mathrm{Cmg}(x_\pi)$), x_B la del maximizador de ventas y x_{IT} la que anula el ingreso marginal. Con la restricción activa, el equilibrio tiene dos rasgos:

1. *Producción y precio*: se cumple $x_\pi < x_B < x_{\mathrm{IT}}$ y, por la pendiente negativa de la demanda, $p_B < p_\pi$. El maximizador de ventas produce, por tanto, más y vende más barato que el maximizador de beneficios.

2. *Beneficio*: es exactamente igual a $\pi_{\min}$. Cuando $\pi_{\min}$ tiende al beneficio máximo, el modelo converge al tradicional.

[2] El objetivo $\mathrm{IT}(x)$ es cóncavo y el conjunto factible $\{x : \pi(x) \geq \pi_{\min}\}$ es un intervalo, pues $\pi(x)$ es cóncava (diferencia de una función cóncava y una convexa).

Estática comparativa: la diferencia con el modelo tradicional se concentra en las perturbaciones que no alteran el coste marginal:

- *Impuesto de suma fija (o aumento de los costes fijos)*: para el maximizador de beneficios es irrelevante, pues no altera el ingreso ni el coste marginal y x_π no varía. Para el maximizador de ventas, en cambio, desplaza hacia abajo la curva $\pi(x)$ y la intersección de la derecha con $\pi_{\min}$ se mueve hacia la izquierda, de modo que la producción cae y el precio sube. Esta predicción contrastable separa ambas hipótesis, y la observación de que las empresas trasladan a precios los costes fijos fue el principal apoyo empírico de Baumol.

- *Impuesto unitario o aumento de la demanda*: reduce (o eleva) la producción en ambos modelos, aunque en distinta magnitud, pues el maximizador de ventas ajusta solo hasta restablecer $\pi = \pi_{\min}$.

Extensiones: Baumol aplicó el modelo a la publicidad (el maximizador de ventas anuncia más que el de beneficios) y, en 1967, a la maximización de la tasa de crecimiento de las ventas. En la versión de 1967, el beneficio pasa de restricción externa a fuente de financiación del crecimiento. Las restantes hipótesis gerenciales sustituyen las ventas por otros argumentos de la función objetivo de los directivos:

- *Hipótesis de la maximización del crecimiento* (Marris, 1964): los directivos maximizan la tasa de crecimiento de la empresa (que determina su poder, estatus y remuneración), sujetos a una restricción de valoración bursátil. Si el precio de la acción cae demasiado, la empresa se convierte en objetivo de una adquisición hostil (*takeover*) que costaría el puesto al equipo directivo, y el mercado de control corporativo actúa así como mecanismo disciplinante externo.

- *Hipótesis de la ineficiencia-X* (Leibenstein, 1966): en ausencia de presión competitiva y con información asimétrica, trabajadores y directivos no se esfuerzan al máximo. En consecuencia, no existe una correspondencia unívoca entre *inputs* y *outputs*, y la empresa puede operar por debajo de su frontera técnica de producción. El grado de competencia determina el esfuerzo. Sin embargo, el concepto ha sido criticado porque, si el control se ejerce hasta que su coste marginal iguala a su beneficio marginal, la ineficiencia-X no es tal, sino el resultado óptimo dado el coste del control.

- *Hipótesis de la maximización de la utilidad gerencial* (Williamson, 1963; 1964): los directivos maximizan una función de utilidad que depende del gasto en plantilla, G, de los beneficios discrecionales, π^D, y de otros emolumentos. La maximización está sujeta a la obtención de un beneficio mínimo que satisfaga a los accionistas. El resultado es un exceso de gasto en personal y en gastos de representación respecto del óptimo de los propietarios, que da nombre a la hipótesis de la *preferencia por el gasto*.

Gráficamente, la elección del directivo en la hipótesis de Williamson se representa en el plano gasto en plantilla-beneficio discrecional (figura A15.1):

1. *Frontera de beneficios*, $\pi^D(G)$: es el beneficio discrecional que permite cada gasto en plantilla, creciente mientras ese gasto es productivo y decreciente a partir de su máximo.

2. *Curvas de indiferencia del directivo*, u_0 y u_1: tienen pendiente negativa, porque el directivo valora el gasto y el beneficio.

3. *Equilibrio*: los propietarios preferirían el máximo de la frontera (punto 0), con gasto G_0 y beneficio π_0^D. El directivo, en cambio, elige la tangencia de la frontera con la curva de indiferencia más alta, u_1 (punto 1), con un gasto G_1 mayor y un beneficio π_1^D menor.

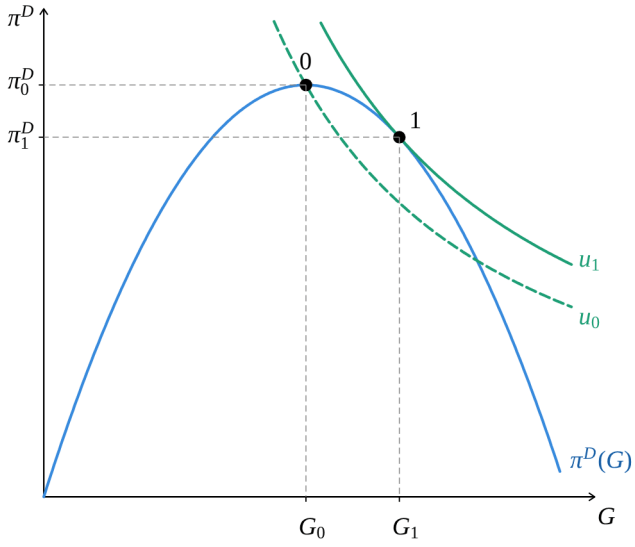


Figura A15.1: Williamson (1964). El directivo maximiza su utilidad sobre la frontera de beneficios y elige un gasto en plantilla G_1 superior al que maximiza el beneficio, G_0 (preferencia por el gasto).

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el modelo de Baumol es el primero que deriva formalmente el comportamiento de la empresa de un objetivo distinto del beneficio y ofrece una predicción contrastable (la respuesta a los costes fijos). Los modelos gerenciales, en conjunto, sustituyen la maximización del beneficio por objetivos propios de los directivos y anticipan la teoría de la agencia.

▪ *Limitaciones*: el enfoque gerencial presenta tres debilidades:

- *Objetivos postulados*: se dan por supuestos en lugar de derivarse de la estructura de incentivos, que es lo que hará el enfoque contractual.
- *Beneficio mínimo exógeno*: se toma como dado, cuando resulta de la disciplina del mercado de capitales, del mercado de control corporativo y de los contratos de remuneración.
- *Presión competitiva*: la competencia y la libre entrada tienden a expulsar a las empresas que no maximizan el beneficio, por lo que la discrecionalidad gerencial solo es sostenible con poder de mercado y barreras a la entrada.

1.1.3. Conclusiones

Aspectos positivos: todas estas aportaciones deben entenderse como complementarias, no excluyentes, para explicar la razón de ser de la empresa. La maximización del beneficio sigue siendo la referencia normativa y el ancla del análisis de mercados, mientras que los enfoques austriaco y gerencial iluminan, respectivamente, la función empresarial en el desequilibrio y las desviaciones que introduce la separación entre propiedad y control.

Limitaciones: estos enfoques explican qué persigue la empresa, pero no por qué ciertas transacciones se organizan dentro de ella y no en el mercado, pues dan por supuesta su existencia y se centran en su objetivo o en la figura del empresario. Esa pregunta la aborda el enfoque contractual de Coase.

1.2. Límites

Las teorías de este apartado explican el tamaño de la empresa por sus costes de producción, en los enfoques neoclásico y tecnológico, o de transacción, en el contractual.

1.2.1. El enfoque neoclásico: la caja negra y las economías de escala

El enfoque neoclásico se centra en el estudio de tres dimensiones:

- *Tecnología*: cómo sus distintos tipos dan lugar a diferentes rendimientos a corto y largo plazo que condicionan el *output* producido.

- *Costes*: cómo su estructura determina la eficiencia económica y, con ella, la dimensión viable de la empresa.

- *Mercado*: cómo su tamaño y el de la empresa se condicionan mutuamente, puesto que determinan los ingresos.

En esta visión, el tamaño de la empresa queda determinado por el mínimo de la curva de coste medio a largo plazo, en forma de U. La dimensión óptima es única y la empresa es, en lo demás, una caja negra tecnológica.

1.2.2. Enfoque tecnológico de la TOI

> Los rendimientos a escala, de los que depende la forma del coste a largo plazo, se estudian en el tema A11, apartado 2.2. El tema A12 desarrolla la curva de coste medio en U y sus casos polares (apartados 2.2 y 2.4), la horquilla de capacidad de Stigler (apartado 3.1.1), las definiciones, condiciones e índices de la subaditividad y de las economías de alcance (apartados 3.2.2 y 3.2.3) y la evidencia empírica sobre la forma de las curvas, en L más que en U (apartado 3.4).

La TOI revitalizó el enfoque tecnológico refinando el análisis de la estructura de costes en tres direcciones:

Horquilla de capacidad (Stigler, 1939):

- *Definición*: las empresas mantienen una reserva de capacidad que les da flexibilidad ante la incertidumbre. La evidencia empírica sobre costes apunta a un coste medio a largo plazo en forma de L y no de U, es decir, alcanzada la escala mínima eficiente (EME), el coste medio se mantiene aproximadamente constante.

- *Implicación para el tamaño*: no existe una dimensión óptima única. El tamaño de las empresas de una industria puede variar en un rango amplio sin diferencias de coste, lo que explica la coexistencia de tamaños muy distintos.

Subaditividad de costes (Baumol, Panzar y Willig, 1982):

▪ *Definición*: una función de costes es subaditiva cuando una sola empresa produce el *output* total a menor coste que cualquier reparto de ese *output* entre varias empresas, lo que constituye la definición moderna de monopolio natural. En el caso uniproducto, las economías de escala en todo el tramo hasta ese *output* son condición suficiente pero no necesaria de la subaditividad[3].

▪ *Implicación para el tamaño*: el límite superior del tamaño eficiente lo fija la subaditividad y no la pendiente del coste medio. De ahí que una empresa pueda ser el único productor eficiente aunque opere con costes medios crecientes, siempre que su escala mínima eficiente sea grande respecto al mercado[4].

Economías de alcance (Panzar y Willig, 1981):

▪ *Definición*: producir varios bienes en una misma empresa cuesta menos que producirlos por separado, por la existencia de *inputs* públicos dentro de la empresa (marca, red, conocimiento), indivisibilidades y estructuras comunes.

▪ *Implicación para el tamaño*: la eficiencia se alcanza también por la variedad y no solo por el volumen, lo que explica la empresa multiproducto y los conglomerados y fija el límite horizontal del tamaño, del mismo modo que la subaditividad fija el límite en volumen.

1.2.3. Costes de transacción: la empresa como estructura de contratos (Coase, 1937; Williamson, 1975)

Origen: Ronald Coase (*The Nature of the Firm*, 1937; Nobel en 1991) explica con un mismo argumento por qué existen las empresas y dónde termina cada una. Si el mecanismo de precios asigna eficientemente los recursos, cabe preguntarse por qué una parte de la producción se organiza dentro de la empresa y, a la inversa, por qué una sola empresa no organiza toda la producción.

Idea: la respuesta a las dos preguntas son los *costes de transacción*. Utilizar el mecanismo de precios tiene costes (búsqueda de contrapartes, negociación de cada contrato, supervisión del cumplimiento, previsión de contingencias), de modo que la empresa existe porque, para ciertas actividades, organizar la producción internamente resulta menos costoso que recurrir al mercado. Sin embargo, la organización interna también tiene costes, que crecen con el tamaño. Por ello, la empresa se amplía solo hasta que organizar internamente una transacción más cuesta lo mismo que realizarla en el mercado, y ese punto fija su límite.

Razonamiento: Oliver Williamson (1975; Nobel en 2009) profundizó en esta idea[5]. Los costes de transacción pueden ser *ex ante* (previsión de contingencias, redacción y negociación de los contratos) o *ex post* (regateo o *haggling costs*, ejecución, incumplimiento, litigios). La empresa compara los costes de la organización interna con los de acudir al mercado. Por tanto, la dimensión óptima de la empresa, x^*, es decir, su límite, minimiza el coste total $\mathrm{CT}(x) = \mathrm{CE}(x) + \mathrm{CI}(x)$ y se alcanza cuando el coste marginal de organizar internamente una transacción adicional iguala el coste marginal de realizarla en el mercado:

[3] Para el caso multiproducto: $C(\sum_i \mathbf{x}_i) < \sum_i C(\mathbf{x}_i)$, donde $\mathbf{x}_i$ son vectores de producción.

[4] Esto explica por qué antes había más monopolios naturales. Conforme crece la demanda, la EME se hace menor en relación con el mercado y la subaditividad deja de cumplirse en el rango relevante.

[5] El oportunismo entre individuos de racionalidad limitada hace necesario prever contingencias. La combinación de racionalidad limitada, oportunismo y especificidad de activos es la tríada williamsoniana de los costes de transacción.

$$\underbrace{\left.\frac{d\mathrm{CI}}{dx}\right|_{x^*}}_{\text{coste marginal interno}} = \underbrace{\left.-\frac{d\mathrm{CE}}{dx}\right|_{x^*}}_{\text{coste marginal externo}}$$

donde $\mathrm{CI}(x)$ es el coste de organización interna, que crece con la dimensión x, y $\mathrm{CE}(x)$ el coste de acudir al mercado, que decrece con ella, de modo que $-d\mathrm{CE}/dx$ mide el coste de mercado que ahorra organizar internamente una transacción más.

Desarrollo gráfico: los costes de acudir al mercado y de organización interna se representan en el plano dimensión de la empresa-coste (figura A15.2):

1. *Coste de acudir al mercado*, $\mathrm{CE}(x)$: decrece con la dimensión, porque son menos las transacciones que se realizan a través del mercado.

2. *Coste de organización interna*, $\mathrm{CI}(x)$: crece con la dimensión, por las deseconomías gerenciales. Williamson (1967) las explica por la *pérdida de control*, ya que las órdenes y la información pierden parte de su contenido al cruzar cada nivel de la jerarquía. Crecer obliga a añadir niveles, lo que reduce la eficacia de la dirección y acota el tamaño. Por su parte, Penrose (1959) sitúa el límite en la capacidad del equipo directivo para absorber nuevas actividades, que acota más el ritmo de crecimiento que el tamaño, y Lucas (1978), en el talento directivo, que determina cuántos recursos puede gestionar con provecho cada directivo (*span of control*).

3. *Coste total*, $\mathrm{CT}(x)$: es la suma vertical de las dos curvas anteriores y tiene forma de U.

4. *Equilibrio*: la dimensión óptima, x^*, corresponde al mínimo del coste total, C^* (punto 0). En la representación estándar, con curvas simétricas, ese punto se sitúa sobre el corte de $\mathrm{CE}(x)$ y $\mathrm{CI}(x)$, donde $\mathrm{CE}(x^*) = \mathrm{CI}(x^*)$.

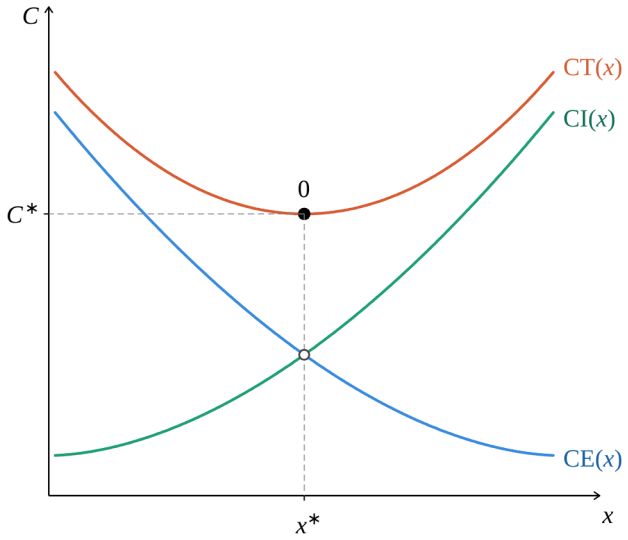


Figura A15.2: Coase (1937). La dimensión óptima de la empresa, x^*, minimiza el coste total (punto 0), $\mathrm{CT}(x) = \mathrm{CE}(x) + \mathrm{CI}(x)$, suma del coste de acudir al mercado y del de organización interna. En la representación estándar, con curvas simétricas, ese mínimo se sitúa sobre el corte de ambas curvas.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: plantea por qué existen las empresas y dónde están sus límites, y sitúa los costes de usar el mercado en el centro del análisis. La teoría es también el punto de partida del enfoque transaccional.

- *Limitaciones*: el concepto de coste de transacción es amplio y poco preciso, lo que expone la teoría al riesgo de explicar *a posteriori* cualquier frontera de la empresa. Además, la teoría no precisa qué permite a la organización interna evitar los costes que encarecen el mercado, cuestión que aborda el nuevo enfoque de los derechos de propiedad.

1.2.4. Conclusiones

Aspectos positivos: el enfoque tecnológico explica el tamaño de la empresa por los costes de producción, y el enfoque contractual lo explica por los costes de transacción. Ambos convergen en la idea de que la empresa es la forma de organización que minimiza el coste total de producir e intercambiar.

Limitaciones: el enfoque tecnológico, con costes medios en forma de L, admite un rango amplio de tamaños igualmente eficientes y no determina el de cada empresa, mientras que el contractual descansa en costes de transacción difíciles de medir. Ambos dejan abierta, además, la organización interna de la empresa, que se analiza a continuación con los derechos de propiedad, los costes de transacción y los contratos.

1.3. Organización

Este ámbito responde a cómo se organiza la empresa, es decir, si lo hace de forma jerárquica o de manera más horizontal y descentralizada. Este ámbito busca entender también qué relaciones contractuales se establecen en el seno de la empresa. Lo abordan el enfoque de los derechos de propiedad, el transaccional y el de contratos completos.

1.3.1. Enfoque de derechos de propiedad

Origen: el enfoque tiene dos generaciones. La primera la desarrollan Armen Alchian y Harold Demsetz en los años sesenta y setenta. La segunda, conocida como *nuevo enfoque de los derechos de propiedad*, la formalizan Sanford Grossman, Oliver Hart y John Moore entre 1986 y 1990 con la teoría de los contratos incompletos[6].

Idea: la propiedad de un bien no es el bien mismo sino un conjunto de derechos sobre él (usarlo, apropiarse de sus rendimientos y transferirlo), y quién los tiene determina los incentivos de quienes deciden. La empresa se explica por esa asignación, que en la primera generación recae en el perceptor residual del beneficio y en la segunda, en el titular de los derechos residuales de control sobre los activos.

Razonamiento:

[6] Oliver Hart recibió el Nobel en 2016 (junto a Bengt Holmström) por sus contribuciones a la teoría de los contratos.

1. *Perspectiva de primera generación (Alchian, 1965; Demsetz, 1967; Alchian y Demsetz, 1972)*: para Demsetz, los derechos de propiedad aparecen cuando la ganancia de internalizar una externalidad supera el coste de establecerlos y hacerlos cumplir. Así ocurrió con los territorios de caza de los *montagnais* del Labrador cuando el comercio de pieles con los europeos revalorizó el castor. Para Alchian, la conducta depende de la estructura de los derechos. Por ejemplo, en la empresa pública, cuya propiedad no puede venderse, quien decide no carga con las ganancias ni con las pérdidas de sus decisiones, y se debilita el incentivo a gestionar bien los recursos.

Alchian y Demsetz aplican esta lógica a la organización interna. En la producción en equipo la contribución individual no es observable por separado y aparece el incentivo a escaquearse (*shirking*). La solución es nombrar un supervisor y, para que este tenga incentivos a supervisar, convertirlo en *perceptor residual* de los beneficios, con derecho a contratar y despedir a los miembros del equipo y a vender su posición. La figura del empresario capitalista clásico emerge así como respuesta eficiente a un problema de medición.

2. *Nuevo enfoque de los derechos de propiedad (Grossman y Hart, 1986; Hart y Moore, 1990)*: cuando los contratos son inevitablemente incompletos (no pueden prever todas las contingencias), la propiedad importa. La razón es que asigna los *derechos residuales de control*, es decir, el derecho a decidir sobre el activo en todo aquello que el contrato no especifica. Las partes hacen inversiones específicas antes de negociar y se reparten después el excedente, de modo que cada una solo se apropia de una parte del rendimiento de su inversión e invierte menos de lo eficiente (*hold-up*). La propiedad de un activo refuerza la posición negociadora de su titular y, con ella, sus incentivos a invertir, pero debilita los de la otra parte. Por ello, la asignación óptima de la propiedad, que fija los límites de la empresa, otorga el control a la parte cuya inversión específica es más importante para el valor de la relación y reúne bajo un mismo propietario los activos complementarios. A diferencia del enfoque transaccional, los costes de la integración nacen del mismo mecanismo que sus beneficios, porque la parte que pierde la propiedad invierte menos.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la primera generación da una razón de eficiencia a la propiedad privada y a la figura del empresario, y la segunda precisa qué es la propiedad y de dónde nacen los costes de la integración vertical.

- *Limitaciones*: la primera generación es verbal y no explica por qué el perceptor residual ha de ser también el propietario de los activos físicos. El nuevo enfoque descansa en contratos incompletos cuyos fundamentos discuten Maskin y Tirole (1999), atiende sobre todo a los activos físicos y a la inversión previa a la negociación, y dice poco de la organización interna una vez fijada la propiedad.

1.3.2. Enfoque transaccional

Origen: el enfoque transaccional aplica a la organización interna de la empresa la teoría de los costes de transacción de Coase (1937) y Williamson (1975).

Idea: en el marco de Williamson, la *estructura de gobernanza* óptima de cada transacción (mercado, formas híbridas como los contratos de largo plazo, o jerarquía) depende, principalmente, de tres atributos:

1. *Frecuencia*: se refiere a la recurrencia de la actividad. Las transacciones frecuentes justifican amortizar los costes fijos de crear estructuras de gobernanza especializadas (departamentos internos, relaciones estables), mientras que las ocasionales se resuelven mejor en el mercado.

2. *Incertidumbre*: cuanto mayor es la incertidumbre del entorno, más contingencias quedan sin prever, más incompletos resultan los contratos y más frecuentes y costosas son las renegociaciones, lo que, en presencia de activos específicos, favorece la coordinación jerárquica frente al mercado.

3. *Especificidad de los activos*: las inversiones no reutilizables fuera de la relación generan cuasirrentas apropiables[7] y exponen a las partes al problema del *hold-up* (la renegociación oportunista una vez hundida la inversión), lo que favorece la integración vertical.

Razonamiento: el enfoque transaccional convierte la elección entre mercado y jerarquía en un problema económico de minimización de costes de transacción, y explica la integración vertical, las relaciones a largo plazo y las formas híbridas (franquicias, alianzas).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: hace operativa la intuición de Coase al ligar la forma de gobierno a atributos concretos de cada transacción, y de ellos obtiene predicciones contrastables sobre la integración vertical, que han guiado buena parte del trabajo empírico sobre los límites de la empresa.

- *Limitaciones*: la racionalidad limitada y el oportunismo se introducen como supuestos de comportamiento sin formalizar, de modo que el enfoque es en gran medida verbal, y sus atributos, en especial la especificidad de los activos, son difíciles de medir con precisión.

1.3.3. Enfoque de contratos completos

> Sobre la economía de la información y la relación de agencia (riesgo moral, selección adversa y señalización), véase el tema A13.

Origen: el enfoque de contratos completos aplica a la empresa la teoría de la agencia (Ross, 1973; Jensen y Meckling, 1976), suponiendo que las partes pueden escribir contratos que contemplan todas las contingencias verificables.

Idea: las relaciones internas de la empresa pueden modelizarse como una relación de agencia entre un principal (el propietario) y un agente (el directivo o trabajador).

Planteamiento: como referencia, se parte del problema sin imperfecciones de información. El principal, neutral al riesgo, diseña un contrato salarial $w(x)$ que maximiza su beneficio esperado:

$$\max_{e,\, w(\cdot)} \ \mathbb{E}[\pi] = \sum_i p_i(e)\ [x_i - w(x_i)]$$

donde e es el esfuerzo del agente, x_i los posibles resultados y $p_i(e)$ la probabilidad de cada resultado, que el esfuerzo desplaza hacia los resultados altos (dominancia estocástica de primer orden). El programa está sujeto a la *restricción de participación* del agente (obtener al menos su utilidad de reserva).

CPO: el producto marginal esperado del esfuerzo iguala la compensación monetaria que el agente exige por su desutilidad marginal. Si el esfuerzo es observable y verificable, el contrato óptimo alcanza el *first best*, en el que el principal exige el nivel de esfuerzo eficiente. Si el agente

[7] En el sentido de Klein, Crawford y Alchian (1978), la cuasirrenta *apropiable* es el exceso del valor del activo en su uso actual sobre su valor en su mejor uso alternativo. Se trata de la parte que la contraparte puede intentar apropiarse renegociando una vez hundida la inversión.

es averso al riesgo, el principal le paga un salario fijo y asume todo el riesgo. El riesgo y el esfuerzo se asignan así eficientemente a la vez.

CSO: con resultado esperado cóncavo en el esfuerzo y utilidad del agente cóncava, el programa es cóncavo y la CPO es necesaria y suficiente.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: este punto de referencia permite calibrar el coste de la información asimétrica. Cuando el esfuerzo no es observable (riesgo moral) y el agente es averso al riesgo, el contrato debe condicionar el pago al resultado para incentivar, sacrificando aseguramiento, lo que conduce a un *second best*.

- *Limitaciones*: la información asimétrica genera *costes de agencia*, que Jensen y Meckling (1976) definen como la suma de los costes de supervisión del principal, los costes de garantía del agente y la pérdida residual respecto del *first best*. El diseño de contratos de incentivos y los mecanismos de gobierno corporativo buscan minimizarlos, sin poder eliminarlos.

1.4. Comportamiento

El último ámbito estudia cómo se comporta la empresa en los mercados en los que existe interdependencia estratégica.

1.4.1. Modelo de variaciones conjeturales (Bowley, 1924; Frisch, 1933)

Origen: la noción de *variación conjetural* se debe a Bowley (1924) y Frisch (1933). Fue el instrumento con el que la organización industrial anterior a la teoría de juegos comparaba las soluciones de oligopolio de Cournot, Bertrand y Stackelberg y la colusión (tema A19, apartados 1.1 a 1.3 y 2.1.1).

Idea: los modelos de oligopolio difieren en lo que cada empresa espera que haga la rival cuando ella altera su producción. Si esa expectativa se recoge en un parámetro, la variación conjetural, los equilibrios de esos modelos son casos particulares de una misma condición de primer orden.

Supuestos:

- *Entorno*: mercado de un bien homogéneo con demanda inversa $p(X)$, $p' < 0$, y dos empresas con costes $\mathrm{CT}_i(x_i)$, $\mathrm{CT}_i' > 0$.

- *Agentes*: cada empresa elige su cantidad, x_i, suponiendo que la rival responde según la variación conjetural $v_i \equiv \partial x_j / \partial x_i$, que toma como dada.

Planteamiento:

$$\max_{x_i} \ \pi_i = p(x_i + x_j) \cdot x_i - \mathrm{CT}_i(x_i)$$

donde x_i y x_j son las cantidades de la empresa y de su rival, $X = x_i + x_j$ la producción total, $p(\cdot)$ la demanda inversa y $\mathrm{CT}_i(x_i)$ el coste de la empresa i.

CPO: derivando y teniendo en cuenta que $dX/dx_i = 1 + v_i$:

$$p(X) + \frac{dp}{dX}\,(1 + v_i)\,x_i = \frac{d\mathrm{CT}_i}{dx_i}$$

La empresa iguala su coste marginal a un ingreso marginal percibido, ya que, al aumentar su producción, anticipa que el precio caerá por su propia expansión y también por la reacción que conjetura en la rival. Por tanto, cuanto mayor es la conjetura, mayor es la caída de precio esperada, más se restringe la producción y mayor es el margen sobre el coste marginal.

CSO: con p cóncava (o lineal) y CT_i convexa, π_i es estrictamente cóncava en x_i para $v_i > -1$, por lo que la condición anterior caracteriza el máximo.

Solución: dividiendo la CPO por p, con la cuota $s_i = x_i/X$ y la elasticidad $|\varepsilon_{Xp}| = -p/(p'X)$, el margen de Lerner queda en función de la conjetura:

$$\frac{p - d\mathrm{CT}_i/dx_i}{p} = \frac{(1+v_i)\, s_i}{|\varepsilon_{Xp}|}$$

Equilibrio: el valor de v_i selecciona el modelo:

Tabla A15.1: Variaciones conjeturales, margen de Lerner y modelo de oligopolio resultante.

Conjetura	v_i	Margen de Lerner	Equilibrio
La rival compensa exactamente mi variación	-1	0	Competencia perfecta o Bertrand con bien homogéneo
La rival no reacciona	0	$s_i/\lvert\varepsilon_{Xp}\rvert$	Cournot
La rival reacciona según su función de reacción	$\varphi_j'(x_i)$	$(1+\varphi_j')\, s_i/\lvert\varepsilon_{Xp}\rvert$	Stackelberg (líder)
La rival replica mi variación	1	$2s_i/\lvert\varepsilon_{Xp}\rvert = 1/\lvert\varepsilon_{Xp}\rvert$ (simétrico)	Cártel (monopolio conjunto)

Estática comparativa: con n empresas simétricas que conjeturan la misma respuesta v de cada rival, la reacción conjunta esperada es $\partial X_{-i}/\partial x_i = (n-1)v$, y la fórmula se generaliza a

$$\frac{p - d\mathrm{CT}/dx_i}{p} = \frac{1+(n-1)v}{n\,|\varepsilon_{Xp}|}$$

El poder de mercado crece con la conjetura, decrece con la elasticidad y, salvo en el cártel ($v = 1$), decrece también con el número de empresas.

Extensiones:

- *Parámetro de conducta*: $\theta \equiv 1 + (n-1)v \in [0, n]$, que la NEIO estima con datos de precios y cantidades para medir el grado de competencia de una industria sin observar su estructura (apartado 3).

- *Conjeturas consistentes* (Bresnahan, 1981): la reacción conjeturada debe coincidir con la pendiente efectiva de la función de reacción de la rival. Con demanda lineal, $p = a - X$, y coste marginal constante, c, la rival que conjetura v responde con $x_j = (a-c-x_i)/(2+v)$, de pendiente $-1/(2+v)$, y la única conjetura consistente es $v = -1$, el resultado competitivo. En cambio, con costes marginales crecientes, la conjetura consistente queda entre -1 y 0, y el equilibrio es más competitivo que el de Cournot.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: ofrece una lectura común de los modelos estáticos de oligopolio y un índice continuo del poder de mercado, entre el resultado competitivo y el colusivo, que hace comparables industrias distintas.

- *Limitaciones*: carece de fundamento estratégico. El marco es pseudodinámico, porque describe una secuencia de reacciones dentro de un modelo de una sola jugada, y sus conjeturas son *ad hoc*, pues no se derivan de la racionalidad de los rivales. Además, la exigencia de consistencia restringe mucho los valores admisibles, y la teoría de juegos (tema A14) sustituyó el planteamiento por modelos con estructura temporal explícita (Stackelberg, juegos repetidos), en los que la reacción se deriva del equilibrio.

1.4.2. Modelo de diferenciación horizontal (Hotelling, 1929)

Origen: el comportamiento de la empresa incluye también las decisiones sobre las características del producto. El modelo canónico de diferenciación *horizontal* (variedades distintas sin ordenación común de calidad) es la ciudad lineal de Hotelling.

Idea: la diferenciación horizontal muestra que la localización en el espacio de características es una decisión estratégica, porque acercarse al rival capta demanda pero intensifica la competencia en precios (principio de diferenciación mínima frente a máxima).

Razonamiento: los consumidores se distribuyen uniformemente sobre un segmento $[0, 1]$ (que representa el espacio geográfico o el espacio de características), soportan costes de transporte y las empresas eligen localización (variedad) y precio. El resultado depende de la variable de competencia:

- *Precios fijos*: las empresas tienden a aglomerarse en el centro (principio de mínima diferenciación).

- *Precios endógenos y costes de transporte cuadráticos*: el resultado se invierte y las empresas se separan al máximo (máxima diferenciación) para relajar la competencia en precios (d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse, 1979).

> El modelo de la ciudad lineal y la competencia con productos diferenciados se desarrollan en el tema A18.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica con un solo marco tanto la aglomeración como la separación de las empresas, según cuál sea la variable de competencia.

- *Limitaciones*: el resultado es muy sensible a la forma de los costes de transporte. De hecho, con costes lineales puede no existir equilibrio en precios, como mostraron d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979).

1.4.3. Innovación y estructura de mercado (Schumpeter, 1942; Arrow, 1962)

Origen: Joseph Schumpeter (*Capitalism, Socialism and Democracy*, 1942) sostuvo que la gran empresa con poder de mercado es el motor de la innovación. Kenneth Arrow (1962) comparó el incentivo a innovar bajo distintas estructuras de mercado y obtuvo la conclusión contraria.

Idea: las *hipótesis schumpeterianas* afirman que la innovación crece con el tamaño de la empresa y con el poder de mercado, porque solo la gran empresa puede financiar internamente la I+D

y diversificar su riesgo, y solo el beneficio extraordinario permite recuperar la inversión. Arrow replica que el monopolista tiene menos incentivo que una empresa competitiva para innovar, por el *efecto reemplazo* (o sustitución).

Razonamiento: ante una innovación de proceso patentada y no drástica, la empresa competitiva, que parte de un beneficio nulo, cobra algo menos que el coste anterior, se queda con todo el mercado y gana el ahorro de coste sobre toda la demanda. En cambio, el monopolista gana solo la diferencia entre su beneficio después y antes de innovar, porque la innovación canibaliza el beneficio que ya obtiene. Como el excedente social de la innovación supera a ambas ganancias, el orden de incentivos es planificador, competencia y monopolio.

Extensiones: el *efecto eficiencia* actúa en sentido contrario, pues un monopolista amenazado por un entrante tiene más que perder que este que ganar, por lo que el monopolista puja más por la patente (Gilbert y Newbery, 1982). Aghion, Bloom, Blundell, Griffith y Howitt (2005) documentan una relación en forma de U invertida entre competencia e innovación, en la que con poca competencia domina el efecto de *escapar de la competencia* y, con mucha, el schumpeteriano. El resultado se integra en los modelos de crecimiento del tema A44, apartado 3.2.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el debate identifica los dos efectos opuestos que ligan la estructura de mercado y la innovación, el efecto reemplazo y el efecto eficiencia, y muestra que ni la competencia ni el monopolio alcanzan el incentivo socialmente óptimo.

- *Limitaciones*: Arrow toma la estructura de mercado como exógena y supone una patente que protege por completo la innovación. Además, Arrow da la innovación por hecha, sin considerar quién puede financiar la I+D que la genera, que es el núcleo del argumento schumpeteriano. Con una evidencia empírica mixta, ninguna de las dos tesis se impone con carácter general.

1.4.4. Otros modelos de comportamiento

> La diferenciación de producto con variedad (Spence, 1976; Dixit y Stiglitz, 1977) y la diferenciación vertical (Shaked y Sutton, 1982) se desarrollan en el tema A18, apartados 2.2 y 3.1.

Junto a los modelos anteriores, la organización industrial estudia otras conductas de las empresas con poder de mercado. Tres son especialmente relevantes:

1. *Integración vertical y doble marginalización* (Spengler, 1950): cuando un fabricante con poder de mercado vende con un precio mayorista lineal a un minorista que también lo tiene, cada uno añade su margen sin internalizar el del otro. El minorista trata el precio mayorista como su coste marginal, y el fabricante, que mueve primero, aplica la regla del monopolista a una demanda derivada que ya incorpora ese segundo margen. Con demanda lineal, $p = a - X$, y coste marginal constante, c, la cadena vende $X^D = (a-c)/4$, la mitad que la empresa integrada, a un precio mayor, $p^D = (3a+c)/4$ frente a $p^I = (a+c)/2$, con un beneficio conjunto un 25 % inferior y la cuarta parte del excedente del consumidor (figura A15.3).

La integración vertical, o una restricción vertical que elimine el segundo margen (un precio máximo de reventa o una tarifa en dos partes), mejora así a las empresas y a los consumidores, lo que fundamenta la regla de la razón de Chicago, aunque la integración puede cerrar el mercado a los rivales no integrados (*foreclosure*, tema A20).

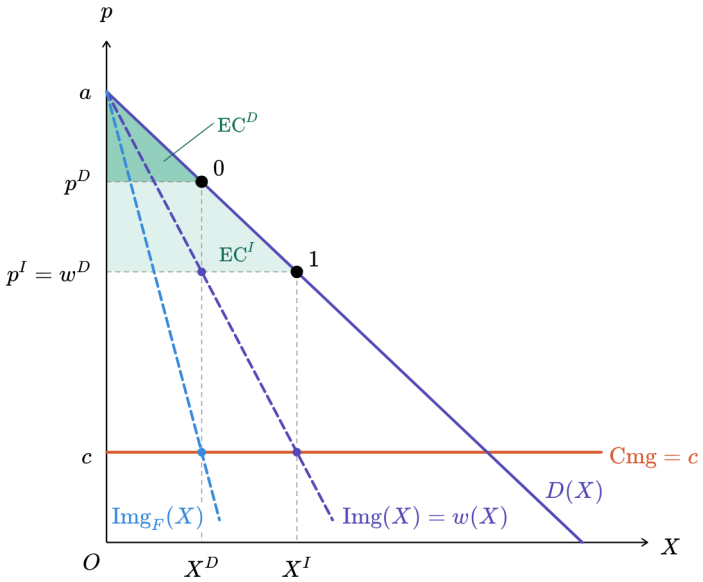


Figura A15.3: Doble marginalización con demanda lineal y coste marginal constante. La empresa integrada iguala $\text{Img}(X)$ a c y vende X^I a p^I (punto 1), mientras que en la cadena el fabricante iguala a c el ingreso marginal de su demanda derivada, $\text{Img}_F(X)$, fija w^D y el minorista vende $X^D = X^I/2$ a p^D (punto 0). El excedente del consumidor es todo el triángulo verde, EC^I, con integración y solo el triángulo oscuro, EC^D, con doble marginalización.

2. *Diferenciación de producto y variedad* (Spence, 1976; Dixit y Stiglitz, 1977): cuando los consumidores valoran la variedad y cada empresa produce una variedad distinta con rendimientos crecientes, cada una fija un margen constante sobre el coste marginal, $p = \frac{\sigma}{\sigma-1}\,\text{Cmg}$, donde σ es la elasticidad de sustitución entre variedades, y la libre entrada lleva el beneficio a cero. El número de variedades resulta del equilibrio entre el gusto por la variedad y las economías de escala.

3. *Diferenciación vertical* (Shaked y Sutton, 1982): cuando, a igualdad de precio, todos los consumidores prefieren la calidad más alta, las empresas eligen primero calidades distintas para suavizar la competencia en precios y compiten después en precios. Si mejorar la calidad exige sobre todo costes fijos, solo un número finito de empresas sobrevive por mucho que crezca el mercado (*propiedad de finitud*, Shaked y Sutton, 1983).

1.5. Conclusiones

La teoría de la empresa responde a cuatro preguntas que sustentan la teoría del mercado. La estructura de costes (subaditividad, economías de alcance, EME) delimita cuántas empresas caben en un mercado. Los derechos de propiedad, los costes de transacción y los contratos explican dónde terminan las empresas, y los conflictos de agencia, qué objetivo persiguen. Las decisiones estratégicas determinan cómo actúan dentro de las estructuras resultantes. El modelo de variaciones conjeturales reúne en un parámetro las soluciones de oligopolio, de la competencia al cártel. La diferenciación, la innovación y las relaciones verticales muestran, además, que la conducta altera la propia estructura del mercado, que la sección 2 deja de tomar como un dato.

2. Teoría del mercado

Con la empresa ya caracterizada, la atención pasa al mercado en el que opera. El recorrido parte de los antecedentes de Harvard y Chicago, sigue con los determinantes de la estructura de los mercados y termina con su regulación.

2.1. Antecedentes

La primera generación de la TOI se articuló en torno al paradigma estructura-conducta-resultado de la escuela de Harvard y a la crítica que le dirigió la escuela de Chicago.

2.1.1. Paradigma estructura-conducta-resultado: la escuela de Harvard (años cuarenta)

Origen: Edward Mason y Joe Bain (escuela de Harvard, años cuarenta) desarrollaron el paradigma ECR[8].

Idea: el paradigma establece dos relaciones causales:

1. *Estructura* → *conducta*: la *estructura* del mercado (número de empresas, concentración, barreras a la entrada, diferenciación) determina la *conducta* de las empresas (políticas de precios, inversión, publicidad, I+D).

2. *Conducta* → *resultado*: la conducta, a su vez, determina el *resultado* del mercado (eficiencia, beneficios, innovación, distribución).

Razonamiento: la dirección causal es unidireccional (estructura → conducta → resultado). Por ello, para la política de competencia[9], toda industria con pocas empresas resulta por principio sospechosa de conductas estratégicas. La tarea de los organismos reguladores consiste en cuantificar la concentración (índice de Herfindahl-Hirschman, ratios de concentración) y determinar si permite ejercer un poder de mercado generador de ineficiencia asignativa.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el paradigma ECR inaugura el análisis empírico sistemático de los mercados, con estudios intersectoriales que relacionan concentración y rentabilidad. También dota a la política de competencia de instrumentos operativos, como los índices de concentración, que siguen siendo una referencia en el análisis de fusiones.

- *Limitaciones*: el paradigma ECR es estático y no incorpora la conducta estratégica. Además, su causalidad unidireccional es discutible, porque los resultados pueden retroalimentar la estructura (las empresas más rentables crecen y concentran el mercado).

[8] También conocidos como "estructuralistas".

[9] La Sherman Antitrust Act (1890) y la Clayton Act (1914) respondieron en EE. UU. al crecimiento de las grandes compañías y a sus prácticas anticompetitivas de finales del s. XIX. Con la Gran Depresión ganó fuerza la idea de que la competencia imperfecta bloqueaba el ajuste entre precios y cantidades.

2.1.2. Escuela de Chicago: libre entrada y eficiencia (años cincuenta y sesenta)

Origen: la escuela de Chicago surge en los años cincuenta y sesenta como reacción al paradigma ECR y a la política antimonopolio activista que este inspiraba.

Idea: la tesis central de la escuela de Chicago (Stigler, Demsetz, Posner, Bork) es que la concentración de mercado no es necesariamente indicativa de poder de mercado anticompetitivo, por dos razones.

Razonamiento: en primer lugar, las empresas grandes pueden serlo porque son más eficientes. La causalidad va de la eficiencia a la concentración, y la evidencia de la forma en L de los costes medios, que la propia escuela aportó, implica que la gran dimensión no comporta desventaja alguna. En segundo lugar, la amenaza de entrada disciplina los precios incluso en mercados concentrados.

Si la libre entrada es posible, el mercado se autorregula, de modo que la intervención pública es innecesaria o incluso contraproducente, y la regulación debe limitarse a eliminar las barreras a la entrada *legales* (las creadas por la propia regulación).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: subrayó que la concentración puede ser fruto de la eficiencia y que la entrada potencial disciplina los precios, ideas que formalizó después la teoría de los mercados impugnables.

- *Limitaciones*: su confianza en la autorregulación descansa en la libre entrada y no tiene en cuenta las barreras estratégicas ni la predación, que la teoría posterior mostró que puede ser racional.

2.1.3. Conclusiones

Aspectos positivos: la TOI de primera generación estableció los fundamentos del análisis de la organización industrial y fijó los términos del debate regulatorio que perdura hasta hoy.

Limitaciones: sus carencias eran simétricas. El paradigma ECR resultaba demasiado estático, y la escuela de Chicago, demasiado optimista respecto de la capacidad autorreguladora de los mercados. Ambas escuelas, además, trataban la empresa como una unidad homogénea, sin analizar su estructura interna, carencia que vino a llenar la teoría de la empresa.

2.2. Estructura

La estructura del mercado, que Harvard tomaba como punto de partida y Chicago como resultado de la eficiencia, depende sobre todo de las condiciones de entrada. A las barreras a la entrada siguen los mercados impugnables, los mercados de varias caras y la predación, con su tratamiento en la política de competencia.

2.2.1. Causas: las barreras a la entrada

Las **barreras a la entrada** son el determinante central de la estructura de los mercados, ya que de ellas depende que la concentración observada sea inocua (disciplinada por la entrada potencial) o lesiva. El propio concepto ha sido objeto de un debate definicional:

1. *Bain* (1956): las barreras son el conjunto de condiciones que permiten a las instaladas fijar precios por encima del nivel competitivo de forma persistente sin inducir la entrada. Esta definición se basa en los resultados, y la taxonomía clásica de Bain identifica tres barreras estructurales:

- *Economías de escala*: el entrante afronta el dilema de entrar pequeño con desventaja de costes o entrar grande deprimiendo el precio.

- *Diferenciación de producto*: la lealtad de marca acumulada obliga al entrante a gastos de introducción ya amortizados por las instaladas.

- *Ventajas absolutas de costes*: tecnología, acceso a *inputs*, financiación más barata.

2. *Stigler* (1968): una barrera es un coste de producción que debe soportar la empresa entrante pero que no soportaron las instaladas. Esta definición se basa en la asimetría de costes y es deliberadamente más restrictiva. Bajo ella, las economías de escala no son una barrera, pues afectan por igual a instaladas y entrantes. El debate no es semántico, porque de la definición adoptada depende el perímetro de la intervención pública, lo que explica que Harvard fuese intervencionista y Chicago, abstencionista.

3. *Baumol y Willig* (1981): generalizan la aportación de Stigler distinguiendo entre costes fijos y costes hundidos, con lo que anticipan la teoría de los mercados impugnables. Los costes fijos no constituyen por sí mismos una barrera (los soporta igualmente quien ya está dentro). La barrera genuina son, por el contrario, los *costes hundidos*, pues introducen una asimetría de riesgo entre quien ya los ha comprometido y quien aún puede evitarlos.

A las barreras estructurales y legales (licencias, patentes, aranceles) se suman las **barreras estratégicas**, creadas deliberadamente por las instaladas: el precio límite (Bain-Sylos-Modigliani), la inversión en capacidad como compromiso creíble (Spence, 1977; Dixit, 1980) y la proliferación de marcas (Schmalensee, 1978), entre otras.

Las barreras estratégicas y las legales forman las barreras **artificiales**, frente a las naturales o estructurales, que nacen de la tecnología y la demanda del sector. Esta distinción ordena la regulación del monopolio (temas A17, apartado 1.1, y A20, apartado 1.3).

> El papel de los costes hundidos como mecanismo de compromiso y el juego de entrada se estudian en el tema A14, apartado 2.3.1, y el precio límite y la disuasión de la entrada en los modelos de oligopolio, en el tema A19, apartado 3.2.

2.2.2. Mercados impugnables (Baumol, 1982)

Origen: William Baumol (1982) reintrodujo la distinción de Demsetz entre la competencia en el mercado y la competencia por el mercado. Baumol desarrolló la teoría con Panzar y Willig en *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure* (1982).

Idea: un mercado es *impugnable* (*contestable*) si los entrantes potenciales pueden entrar y salir sin desventaja alguna respecto de las instaladas. Las condiciones exigidas[10] son las siguientes:

[10] El marco admite también diferenciación de producto (Tirole, 1988, p. 309; Nicholson y Snyder, 2012, p. 553).

1. *Tecnología*: igualdad de acceso a la tecnología (sin ventajas absolutas de costes).

2. *Costes*: pueden existir costes fijos, pero no costes hundidos (no hay barreras de salida, pues la inversión es recuperable al salir).

3. *Reacción*: el tiempo que requiere la entrada es inferior al tiempo de reacción del incumbente, porque existen costes de menú que retrasan el ajuste de sus precios, mientras la demanda responde instantáneamente al entrante.

Razonamiento: en un mercado perfectamente impugnable, incluso un monopolio natural fijará un precio igual al coste medio (beneficio nulo), porque cualquier precio superior atraería una entrada relámpago (*hit-and-run entry*). La disciplina competitiva no proviene de la competencia actual, sino de la amenaza de competencia potencial, de modo que la estructura del mercado deja de ser el indicador relevante del resultado.

Formalmente, Baumol, Panzar y Willig (1982) introducen tres conceptos que permiten seguir la lógica del razonamiento:

1. *Factibilidad*: una configuración de la industria, con n empresas que producen $x_1, \dots, x_n$ al precio p, es factible si atiende la demanda y ninguna empresa tiene pérdidas, $\sum_i x_i = X(p)$ y $p\,x_i - C(x_i) \geq 0$, donde $X(p)$ es la cantidad demandada a ese precio.

2. *Sostenibilidad*: esa misma configuración es, además, sostenible si ningún entrante puede obtener beneficios con un precio igual o inferior, es decir, si $p^e x^e - C(x^e) \leq 0$ para todo $p^e \leq p$ y $x^e \leq X(p^e)$.

3. *Impugnabilidad*: finalmente, en un mercado perfectamente impugnable, solo una configuración sostenible puede ser de equilibrio. De aquí se derivan cuatro propiedades de cualquier mercado impugnable:

- *Beneficio nulo*: cada empresa fija $p = \text{Cme}(x_i)$, porque cualquier beneficio atraería la entrada.

- *Eficiencia productiva*: la industria obtiene su producción al mínimo coste total, ya que una configuración más cara dejaría margen a un entrante.

- *Precio igual al coste marginal*: con dos o más empresas, si $p > \text{Cmg}$, un entrante podría producir algo más que una instalada a un precio algo menor. Solo un monopolio natural puede mantener $p = \text{Cme} > \text{Cmg}$.

- *Ausencia de subvenciones cruzadas*: en la empresa multiproducto, ningún producto financia a otro. Además, bajo ciertas condiciones, los precios de Ramsey-Boiteux son sostenibles (tema A20, apartado 2.1.3).

Gráficamente, el equilibrio del mercado impugnable se representa en el plano cantidad-precio (figura A15.4), en un monopolio natural con coste medio decreciente:

1. *Demanda e ingreso marginal*, $D(X)$ e $\text{Img}(X)$: ambos decrecen, y el ingreso marginal queda por debajo de la demanda porque vender una unidad más exige bajar el precio de todas.

2. *Costes*, $\text{Cme}(X)$ y $\text{Cmg}(X)$: el coste medio decrece en todo el tramo relevante y el marginal queda por debajo, de modo que una sola empresa produce a menor coste que varias.

3. *Equilibrio*:

- *Monopolio sin amenaza de entrada* (punto 0): produce X_M, donde $\text{Img}(X) = \text{Cmg}(X)$, y cobra p_M, por encima del coste medio.

▪ *Mercado impugnable* (punto 2): la amenaza de entrada lleva el precio al coste medio, p_2, con beneficio nulo. Ese precio es el *second best*, el mejor que cubre costes sin subvención.

▪ *Primer óptimo* (punto 1): con $p_1 = \text{Cmg}$, la cantidad sería la eficiente, X_1, pero el coste fijo exigiría una subvención. Frente a él, el mercado impugnable solo pierde el área sombreada.

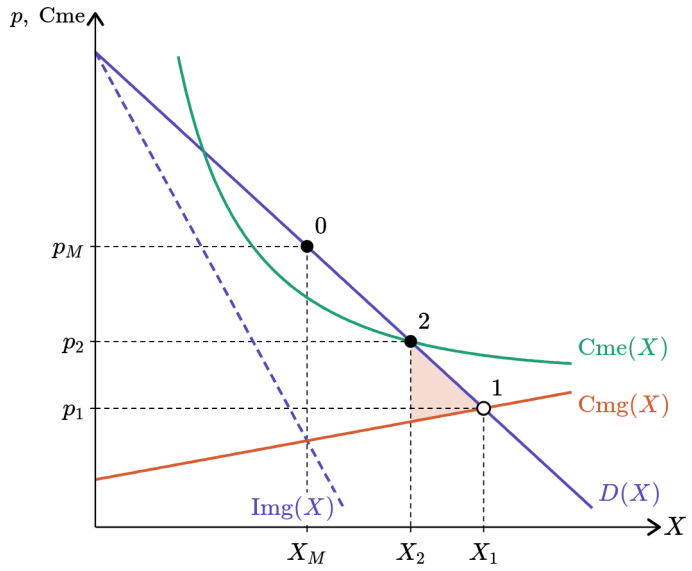


Figura A15.4: Monopolio natural en un mercado impugnable. Sin amenaza de entrada, el monopolista produce donde $\text{Img}(X) = \text{Cmg}(X)$ y cobra p_M (punto 0). La amenaza de entrada lleva el precio al coste medio, con beneficio nulo (punto 2), y frente al primer óptimo, $p = \text{Cmg}$ (punto 1), solo queda la pérdida irrecuperable sombreada.

Si el coste medio tiene forma de U y la demanda lo corta más allá de la escala mínima eficiente, puede no existir ningún precio sostenible aunque el monopolio sea natural (tema A17, apartado 2.2.2).

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el concepto es teóricamente poderoso e invierte la carga de la prueba del paradigma ECR. Además, la teoría ha influido en la desregulación de industrias como el transporte aéreo o las telecomunicaciones.

▪ *Limitaciones*: sus supuestos son muy restrictivos, en especial la ausencia total de costes hundidos, ya que en la práctica la mayoría de las industrias los presenta en magnitud significativa.

2.2.3. Mercados de varias caras (Rochet y Tirole, 2003)

Origen: Jean-Charles Rochet y Jean Tirole (*Platform Competition in Two-Sided Markets*, 2003) formalizaron los mercados de dos caras a partir del análisis de las tarjetas de pago.

Idea: los *mercados de dos (o varias) caras* son aquellos en los que una plataforma pone en contacto a dos grupos de usuarios entre los que existen *externalidades cruzadas de red*. El valor de la plataforma para un lado depende del número de participantes del otro (tarjetas de pago

entre comercios y titulares, sistemas operativos entre desarrolladores y usuarios, mercados en línea entre vendedores y compradores).

Razonamiento: Rochet y Tirole (2003) demostraron que en estos mercados la estructura de precios no es neutral, es decir, no solo importa el nivel agregado de precios, sino su reparto entre los dos lados. De ahí que suela resultar óptimo subvencionar al lado más sensible al precio (o al que genera mayor externalidad) cobrando al otro, incluso fijando precios nulos o negativos.

Como el precio óptimo de cada lado depende de las externalidades cruzadas, precios por debajo del coste en un lado no son, por sí mismos, evidencia de predación. Ello obliga a analizar el mercado relevante y el poder de mercado considerando ambos lados conjuntamente y a redefinir las pruebas de abuso en las plataformas digitales.

> Un modelo estilizado de plataforma con dos grupos, con el índice de Lerner de cada lado ajustado por la externalidad cruzada, se desarrolla en el tema A20, apartado 2.4.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica estructuras de precios que el análisis de un solo mercado juzgaría anómalas, como los servicios gratuitos o subvencionados para uno de los lados, y ofrece el marco con el que hoy se analizan las plataformas digitales y los sistemas de pago.

- *Limitaciones*: los resultados dependen mucho de la intensidad de las externalidades cruzadas y de que los usuarios operen en una o en varias plataformas, por lo que el modelo ofrece pocas reglas generales y su aplicación exige un análisis caso por caso.

2.2.4. Predación y política de competencia (Areeda y Turner, 1975)

Origen: Areeda y Turner (1975) propusieron el primer criterio operativo para distinguir los precios predatorios de la competencia agresiva. La escuela de Chicago (McGee, 1958) sostenía, en cambio, que la predación es irracional e improbable.

Idea: la *predación* sacrifica beneficios presentes mediante precios bajos para expulsar a un rival y recuperar el sacrificio después con precios más altos. Como los precios bajos son también el resultado deseable de la competencia, se necesita una regla que identifique el sacrificio sin castigar la eficiencia.

Razonamiento: la *regla de Areeda-Turner* toma el coste marginal como referencia y, por su difícil medición, lo aproxima por el coste variable medio. Un precio inferior a este se presume predatorio y uno superior se presume lícito, pues ninguna empresa igualmente eficiente sería expulsada por él. Sin embargo, la regla es demasiado permisiva, porque la predación por reputación o financiera puede ser racional con precios por encima del coste variable, y demasiado estática, porque ignora si la recuperación de las pérdidas es factible. Bolton, Brodley y Riordan (2000) sistematizan esta línea en una regla en dos fases:

1. *Plausibilidad de la recuperación*: la estructura del mercado, las barreras a la entrada y la capacidad financiera deben hacer creíble un esquema de predación conforme a la teoría moderna, como exige la jurisprudencia estadounidense desde *Brooke Group* (1993).

2. *Prueba de costes*: solo si se supera la primera fase, se examinan los precios por debajo del coste y la ausencia de justificación de eficiencia.

En la doctrina europea, la sentencia *AKZO* (1991) del Tribunal de Justicia fijó un test en dos tramos. Los precios inferiores al coste variable medio se presumen abusivos, y los situados entre el coste variable medio y el coste total medio son abusivos solo si se prueba que forman parte de un plan para eliminar a un competidor. A diferencia de la práctica estadounidense, no se exige demostrar la posibilidad de recuperación (*Tetra Pak II*, 1996; *France Télécom*, 2009). El contraste entre el estándar estadounidense (recuperación exigida) y el europeo (intención suficiente) refleja distintos pesos de los errores de tipo I y II. Los modelos estratégicos de predación se desarrollan en el tema A19, apartado 3.2.3, y su encaje en el abuso de posición dominante, en el tema B39, apartado 3.2.2.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: las reglas de costes ofrecen seguridad jurídica, y las reglas en dos fases incorporan la teoría estratégica.

- *Limitaciones*: las reglas de costes solo capturan la predación más burda, y las reglas en dos fases conllevan mayor complejidad probatoria.

2.3. Regulación

Cuando una sola empresa es la estructura eficiente, la tarea pasa a ser regularla, y el obstáculo es la información que la empresa tiene y el regulador no. Las tres respuestas que siguen consisten en subastar el derecho a servir el mercado, comparar a la empresa con otras similares y ofrecerle un menú de contratos de incentivos.

2.3.1. Competencia por el mercado (Demsetz, 1968)

Origen: Harold Demsetz (1968) propuso sustituir la regulación tradicional del monopolio natural por la competencia por el mercado.

Idea: cuando la subaditividad hace ineficiente la competencia en el mercado, basta subastar periódicamente el derecho exclusivo a servirlo (*franchise bidding*).

Razonamiento: si la licitación es competitiva, las ofertas convergen al precio igual al coste medio y se replica el resultado de una regulación de beneficio nulo sin necesidad de un regulador permanente.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: muestra que el poder de mercado del monopolio natural puede disciplinarse con competencia *ex ante*, sin que el regulador necesite conocer los costes de la empresa.

- *Limitaciones*: Williamson (1976) señaló que los contratos de concesión son inevitablemente incompletos y exigen renegociación ante contingencias. Añadió que los activos específicos generan problemas de reversión y valoración al final de la concesión, y que el incumbente acumula ventajas informativas que erosionan la competencia en las relicitaciones.

2.3.2. Competencia por comparación (Shleifer, 1985)

Origen: Andrei Shleifer (1985) propuso la competencia por comparación (*yardstick competition*).

Idea: el regulador fija el precio de cada empresa en función de los costes de empresas comparables que operan en otros mercados (p. ej. distribuidoras regionales), lo que rompe la dependencia informativa del regulador respecto de la empresa regulada.

Razonamiento: fijar el precio en función de los costes declarados por la propia empresa destruye los incentivos a reducirlos. Con la comparación, en cambio, sus reducciones de costes no afectan a su precio regulado, de modo que cada empresa se beneficia íntegramente de ellas y el conjunto converge al comportamiento eficiente.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: logra incentivos a la eficiencia sin que el regulador conozca los costes de cada empresa, porque aprovecha la información que generan las demás.

- *Limitaciones*: exige comparadores genuinamente similares (o la corrección econométrica de sus diferencias) y la ausencia de colusión entre las empresas comparadas.

2.3.3. Regulación a través de incentivos (Laffont y Tirole, 1986)

> El modelo reaparece en el tema A13, apartado 3.4.3, como aplicación del mecanismo de autoselección, y en el tema A20, apartado 2.2.2, con sus implicaciones para la política regulatoria y el efecto trinquete (apartado 2.2.3).

Origen: Jean-Jacques Laffont y Jean Tirole desarrollaron el modelo canónico de regulación óptima cuando el regulador (principal) no conoce la eficiencia real de la empresa regulada (agente), programa de investigación que valdría a Tirole el Nobel en 2014[11].

Idea: el regulador ofrece un menú de contratos entre los que la empresa se autoselecciona, revelando su eficiencia a cambio de una renta informacional.

Supuestos:

- *Entorno*: el regulador observa los costes realizados CT, pero no puede distinguir si unos costes bajos se deben a la eficiencia intrínseca o al esfuerzo, así que el problema combina selección adversa y riesgo moral.

- *Agentes*: el esfuerzo, e, genera una desutilidad $\psi(e)$ al monopolista, con $\psi' > 0$ y $\psi'' > 0$. Existe un coste sombra de los fondos públicos $\lambda > 0$, es decir, transferir un euro al monopolista cuesta $1 + \lambda$ a la sociedad (por la distorsión de los impuestos que lo financian).

- *Tecnología*: un monopolio natural produce un bien con función de costes $\mathrm{CT}(x) = (\varphi - e)\, x + F$, donde φ es un parámetro de eficiencia intrínseca (el "tipo" de la empresa, no observable), e es el esfuerzo reductor de costes (no observable) y F son los costes fijos.

Planteamiento: el regulador maximiza el bienestar social esperado sujeto a dos restricciones:

1. *Restricción de participación*: el monopolista debe obtener al menos su utilidad de reserva.

[11] Laffont falleció en 2004, por lo que no pudo compartir el galardón.

2. *Restricción de compatibilidad de incentivos*: cada tipo de empresa debe preferir el contrato diseñado para ella, es decir, revelar verazmente su tipo.

Con la producción normalizada a una unidad y sin costes fijos, el coste observado es $C = \varphi - e$. El regulador reembolsa ese coste y paga además una transferencia neta t, y la renta de la empresa es $U = t - \psi(e)$. Por el principio de revelación (Myerson, 1979), basta con buscar el mecanismo directo $\{t(\varphi), e(\varphi)\}$ que resuelve

$$\max_{\{t(\varphi),\, e(\varphi)\}} \int_{\underline{\varphi}}^{\bar{\varphi}} W(t(\varphi), e(\varphi); \varphi)\, g(\varphi)\, d\varphi$$

$$\text{s.a.:} \begin{cases} U(\varphi) = t(\varphi) - \psi(e(\varphi)) \geq 0 & \text{(participación)} \\ U(\varphi) \geq t(\hat{\varphi}) - \psi(\varphi - C(\hat{\varphi})) & \text{(incentivos)} \end{cases}$$

donde $W(\cdot)$ es el bienestar social que genera el tipo φ[12], $\varphi \in [\underline{\varphi}, \bar{\varphi}]$ el tipo de la empresa, con función de distribución $G(\varphi)$ y densidad $g(\varphi) > 0$ conocidas por el regulador, $\hat{\varphi}$ el tipo que anuncia y $C(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi} - e(\hat{\varphi})$ el coste asignado a ese tipo. La restricción de participación (con la utilidad de reserva normalizada a cero) ha de cumplirse para todo tipo φ, y la de compatibilidad de incentivos, para todo tipo φ y todo anuncio $\hat{\varphi}$. Para imitar el coste $C(\hat{\varphi})$, el tipo φ ha de esforzarse $\varphi - C(\hat{\varphi})$, y esa imitación no debe compensarle.

CPO: la compatibilidad de incentivos fija la renta que hay que dejar a cada tipo (renta informacional), y la condición de primer orden respecto del esfuerzo de cada tipo iguala su beneficio marginal a su coste marginal[13]:

$$\underbrace{1}_{\text{ahorro marginal}} = \underbrace{\left.\frac{d\psi}{de}\right|_{e(\varphi)}}_{\text{desutilidad marginal}} + \underbrace{\frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{G(\varphi)}{g(\varphi)} \cdot \left.\frac{d^2\psi}{de^2}\right|_{e(\varphi)}}_{\text{coste marginal de la renta}}$$

Un poco más de esfuerzo del tipo φ ahorra una unidad de coste. Con información completa, el regulador lo exigiría hasta que la desutilidad marginal igualase ese ahorro, $d\psi/de = 1$ (*first best*). Con información asimétrica, sin embargo, aparece un tercer término. Si el regulador pide más esfuerzo al tipo φ, el contrato de ese tipo se vuelve más atractivo para todos los tipos más eficientes, que podrían imitarlo con menos esfuerzo, y hay que subirles la renta para que no lo hagan. Esos tipos tienen masa $G(\varphi)$, y cada euro de renta cuesta λ, frente al valor social $1 + \lambda$ del ahorro de coste, de ahí el factor $\lambda/(1 + \lambda)$. Por eso el regulador distorsiona el esfuerzo a la baja ($\psi' < 1$), tanto más cuanto mayor es λ y cuantos más tipos eficientes hay por debajo de φ. Como $G(\underline{\varphi}) = 0$, no hay distorsión en la cima, es decir, el tipo más eficiente ejerce el esfuerzo de *first best*.

[12] El bienestar social agrega el excedente bruto del consumo S, el coste social de la producción y de las transferencias (valorando cada euro de fondos públicos en $1 + \lambda$) y la renta del monopolista: $W = S - (1 + \lambda)(t(\varphi) + C(\varphi)) + U(\varphi)$. Sustituyendo $t = U + \psi(e)$, $W = S - (1 + \lambda)[\varphi - e(\varphi) + \psi(e(\varphi))] - \lambda\, U(\varphi)$, de modo que cada euro de renta cedida a la empresa cuesta λ a la sociedad.

[13] Por el teorema de la envolvente, la compatibilidad de incentivos equivale a $dU(\varphi)/d\varphi = -\psi'(e(\varphi))$ con un coste $C(\varphi)$ no decreciente. Como la renta decrece con φ, la participación solo se satura para el tipo menos eficiente, $U(\bar{\varphi}) = 0$, y la renta informacional de cada tipo es $U(\varphi) = \int_{\varphi}^{\bar{\varphi}} \psi'(e(\tilde{\varphi}))\, d\tilde{\varphi}$. Integrando por partes, la renta esperada es $E[U] = E[\psi'(e(\varphi)) \cdot G(\varphi)/g(\varphi)]$. Llevándola a la expresión de W de la nota anterior y maximizando punto a punto respecto de $e(\varphi)$ se obtiene $(1+\lambda)[1-\psi'(e)] = \lambda\, \psi''(e)\, G(\varphi)/g(\varphi)$, que, dividida por $1 + \lambda$, es la CPO del texto.

CSO: basta con dos condiciones de regularidad[14]. Con ellas, el objetivo es cóncavo en el esfuerzo y el esfuerzo pedido decrece con φ, de modo que el coste asignado crece con el tipo y la solución de la CPO es globalmente compatible con los incentivos[15].

Solución: el mecanismo óptimo se implementa con un *menú de contratos* lineales en el coste realizado, entre los que la empresa se autoselecciona:

$$t(\hat{\varphi}, C) = \underbrace{a(\hat{\varphi})}_{\text{pago fijo por la eficiencia revelada}} - \underbrace{b(\hat{\varphi}) \cdot [C - C^*(\hat{\varphi})]}_{\text{penalización por sobrecoste}}$$

donde t es la transferencia neta que recibe la empresa, $\hat{\varphi}$ el tipo que revela al elegir contrato, C el coste realizado, $a(\hat{\varphi})$ el pago fijo del contrato elegido, $C^*(\hat{\varphi})$ su coste objetivo y $b(\hat{\varphi}) \in [0, 1]$ la fracción del sobrecoste que recae sobre la empresa, es decir, la potencia del contrato.

Cada contrato funciona como un sistema de premios y penalizaciones en torno al coste objetivo. Cabe distinguir dos casos:

1. *Cumplimiento del objetivo* ($C = C^*$): la empresa cobra el pago fijo, que retribuye el esfuerzo previsto e incluye la renta informacional del tipo revelado.

2. *Desviación del objetivo* ($C \neq C^*$): si el coste realizado supera el objetivo, la transferencia se reduce en la fracción b del sobrecoste y, si queda por debajo, aumenta en la fracción b del ahorro.

Con $b = 1$ el contrato es de precio fijo, porque la empresa soporta todo el sobrecoste y retiene todo el ahorro, y con $b = 0$, de coste más margen, porque la transferencia no depende del coste.

Ante este menú, cada empresa decide qué contrato elige y cuánto se esfuerza. Dentro de un contrato, la empresa reduce costes hasta que la desutilidad marginal del esfuerzo iguala la fracción del ahorro que retiene, $\psi'(e) = b$, de modo que el regulador induce el esfuerzo óptimo de cada tipo con $b(\hat{\varphi}) = \psi'(e(\hat{\varphi}))$. Por la CPO y la CSO, $b(\underline{\varphi}) = 1$ y b decrece con φ. La elección entre contratos separa así a los tipos:

1. *Empresa eficiente* (φ bajo): elige un contrato de precio fijo (*fixed-price*), con el que asume todo el riesgo de costes, pero retiene íntegramente el ahorro de su esfuerzo, por lo que su incentivo a reducir costes es máximo. A cambio, percibe una *renta informacional*, el pago extra necesario para que no le compense hacerse pasar por ineficiente.

2. *Empresa ineficiente* (φ alto): elige el contrato de menor potencia del menú, el más próximo al de coste más margen (*cost-plus*). El regulador absorbe una parte elevada de los sobrecostes, y la empresa conserva un incentivo débil al esfuerzo (distorsionado a la baja respecto del *first best*, aunque no nulo), pero no recibe renta informacional.

3. *Tipos intermedios*: contratos lineales que combinan un componente fijo y un reparto parcial de los sobrecostes.

[14] Las dos condiciones son que la desutilidad del esfuerzo sea cada vez más convexa, $\psi''' \geq 0$, y que la razón de riesgo sea monótona, $d[G(\varphi)/g(\varphi)]/d\varphi \geq 0$.

[15] Diferenciando la CPO, $de/d\varphi = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\,\psi''\,\frac{d}{d\varphi}[G/g]\big/[\psi'' + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\frac{G}{g}\,\psi''']$, que es no positiva con las dos condiciones. La primera asegura además que la segunda derivada del objetivo respecto del esfuerzo, $-(1+\lambda)\psi'' - \lambda\,\psi'''\,G/g$, sea negativa. Un coste asignado $C(\varphi) = \varphi - e(\varphi)$ creciente hace que la compatibilidad local de incentivos implique la global.

El menú óptimo materializa el *trade-off* fundamental de la regulación con información asimétrica entre la *eficiencia* (incentivar el esfuerzo con contratos de alta potencia) y la *extracción de rentas* (minimizar las rentas informacionales cedidas a la empresa).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*:

  - *Fundamento de la regulación por incentivos*: el modelo da base teórica a los sistemas de este tipo utilizados en la práctica (la regulación *price-cap* en telecomunicaciones, agua o electricidad, frente a la tradicional regulación por tasa de retorno, de tipo *cost-plus*).

  - *Nobel 2014*: la Real Academia Sueca de Ciencias premió a Tirole "por su análisis del poder de mercado y la regulación", con la lección central de que la regulación óptima no puede ser uniforme, sino adaptada a las características informativas y tecnológicas de cada industria.

- *Limitaciones*:

  - *Exigencia informativa*: el menú óptimo exige del regulador un conocimiento detallado de la distribución de tipos y de la tecnología, que rara vez posee.

  - *Compromiso intertemporal*: el marco es estático. Si el regulador utiliza la información revelada hoy para endurecer la regulación mañana (efecto trinquete o *ratchet effect*), la empresa anticipará esa conducta y dejará de revelar su tipo.

  - *Captura del regulador*: como la industria regulada puede capturar al regulador, el análisis ha de incorporar el diseño institucional del propio regulador.

2.4. Conclusiones

La teoría del mercado ha pasado de tomar la estructura como un dato a explicarla. Las barreras a la entrada, los costes hundidos y la impugnabilidad precisan cuándo la concentración es inocua y cuándo lesiva. Un precio inferior al coste no prueba por sí solo un abuso en los mercados de varias caras, y en la predación las reglas modernas añaden a la prueba de costes la recuperación o un plan de exclusión. La regulación ha pasado, por su parte, de fijar precios a resolver el problema informativo del regulador. Todas estas respuestas exigen medir el poder de mercado en industrias concretas, tarea de la NEIO (sección 3).

3. Nueva teoría de la organización industrial empírica

La **nueva organización industrial empírica** (NEIO, por sus siglas en inglés; Bresnahan, 1989) sustituyó las regresiones entre industrias del paradigma ECR (rentabilidad sobre concentración) por el análisis estructural de industrias concretas. El análisis estructural consiste en especificar el modelo de demanda y de conducta y en estimar directamente el poder de mercado. Sus herramientas son hoy el instrumental básico de las autoridades de competencia. La sección delimita el mercado relevante, expone la medición del poder de mercado y repasa la evidencia empírica.

Antecedente: los estudios de beneficio y concentración: el programa empírico de Harvard arranca con Bain (1951). Para 42 industrias manufactureras estadounidenses del periodo 1936-1940, Bain encuentra que aquellas en las que las ocho mayores empresas concentran más del 70 % de las ventas obtienen tasas de beneficio significativamente superiores. Para la lectura estructuralista, la concentración facilita la colusión y esta eleva los márgenes, de modo que la correlación mide poder de mercado y justifica una política activa contra la concentración.

Demsetz (1973) objetó que, si la correlación reflejase colusión, todas las empresas de la industria concentrada se beneficiarían del precio elevado, pero solo las grandes obtienen rentabilidades superiores. Ese patrón, propio de la hipótesis de eficiencia de Chicago (apartado 2.1.2), hace de la lectura de Demsetz la transición entre ambas escuelas. La disputa no podía zanjarse con regresiones entre industrias, porque concentración y beneficio son resultados endógenos de la tecnología y la conducta.

Del paradigma ECR al parámetro de conducta: la NEIO resuelve el problema de identificación estimando la conducta directamente. Con las variaciones conjeturales del apartado 1.4.1, el margen precio-coste de una industria se escribe $(p-\text{Cmg})/p = \theta/(n\,|\varepsilon_{Xp}|)$, donde $\theta = 1+(n-1)v$ es el *parámetro de conducta*. El valor $\theta = 0$ corresponde al comportamiento competitivo, $\theta = 1$ al de Cournot y $\theta = n$ (dos en el duopolio) al cártel. Estimando conjuntamente la demanda y la relación de oferta con datos de precios y cantidades de una sola industria, Bresnahan (1982) y Lau (1982) muestran que θ está identificado si la demanda sufre rotaciones exógenas. Con ello, el grado de competencia pasa a ser un parámetro estimable y no un supuesto. Así puede distinguirse la concentración que refleja eficiencia de la que refleja colusión.

3.1. Delimitación del mercado relevante

El análisis empírico de cualquier industria parte de la delimitación del **mercado relevante**, en su doble dimensión de producto y geográfica, mediante el test del monopolista hipotético (SSNIP), que el tema A20, apartado 3.1, desarrolla en detalle. Solo dentro de ese mercado tienen sentido los índices siguientes.

3.2. Medición del poder de mercado

El poder de mercado se mide con índices de poder de mercado, de posición y de concentración, de los más directos a los más estructurales. Su aplicación en la política de competencia se estudia en el tema A20, apartados 1.1 y 3.2.

3.2.1. Índices de poder de mercado

Índice de Lerner: mide el poder de mercado de la empresa i por el margen relativo entre su precio y su coste marginal.

$$I_{L,i} = \frac{p - \text{Cmg}_i}{p}, \qquad I_{L,i} \in [0, 1]$$

Toma valores entre 0 (competencia perfecta) y 1 (coste marginal nulo), y en el monopolio iguala la inversa de la elasticidad de la demanda (tema A17). Con n empresas que compiten a la Cournot, $I_{L,i} = s_i/|\varepsilon_{Xp}|$, donde s_i es su cuota (apartado 1.4.1, con $v_i = 0$). El índice de la industria, media ponderada por las cuotas, es la suma de los cuadrados de las cuotas, el índice de Herfindahl-Hirschman en tanto por uno, dividida por la elasticidad (Cowling y Waterson, 1976).

$$I_L = \sum_{i=1}^{n} s_i \, I_{L,i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}{|\varepsilon_{Xp}|} = \frac{\text{HHI}}{10\,000\,|\varepsilon_{Xp}|} \in [0, 1]$$

En la práctica el coste marginal no se observa. Por eso el índice se aproxima con el *margen precio-coste* contable, (ingresos − CV)/ingresos, o se estima con los métodos de la NEIO.

Ratio *q* de Tobin: relaciona el valor de mercado de la empresa con el coste de reposición de sus activos.

$$q = \frac{\text{valor de mercado de la empresa}}{\text{coste de reposición de sus activos}}$$

Con libre entrada, q tiende a 1, y un valor persistentemente superior indica rentas que la competencia no erosiona. Lindenberg y Ross (1981) lo proponen como cota superior de las rentas de monopolio. No exige conocer el coste marginal, pero omite los activos intangibles, lo que lo sesga al alza (tema A34, apartado 2.2.2).

3.2.2. Índices de posición

La **cuota de mercado**, $s_i = x_i/X$, es el índice de posición básico y va de 0 a 1 (monopolio). En el derecho de la Unión Europea, una cuota del 50 % o superior permite presumir, salvo circunstancias excepcionales, una posición dominante (*AKZO*, 1991; apartado 2.2.4). Con todo, su lectura depende de la delimitación del mercado relevante, y una cuota alta puede reflejar eficiencia y no poder de mercado (Demsetz, 1973).

3.2.3. Índices de concentración

Ratio de concentración: mide la cuota conjunta de las k mayores empresas, ordenadas de mayor a menor cuota.

$$\text{CR}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i$$

Toma valores entre k/n (cuotas iguales) y 1. Esta ratio es el indicador más sencillo (Bain, 1951, utilizó el CR_8), pero ignora cómo se reparten las cuotas dentro y fuera de las k mayores.

Índice de Herfindahl-Hirschman (HHI): la suma de los cuadrados de las cuotas de todas las empresas, que pondera cada una por su propio tamaño.

$$\mathrm{HHI} = \sum_{i=1}^{n} (100\, s_i)^2 \in \left[\frac{10\,000}{n},\ 10\,000\right], \qquad s_i \in [0,1]$$

Con cuotas en porcentaje, la escala de las autoridades de competencia, toma valores entre $10\,000/n$ (empresas iguales) y $10\,000$ (monopolio). Con cuotas en tanto por uno, $\sum_i s_i^2 \in [1/n, 1]$, y su inversa es el *número equivalente de empresas* de igual tamaño. Una fusión que sume las cuotas de i y j lo eleva en $\Delta\mathrm{HHI} = 2\,(100\, s_i)(100\, s_j)$. El nivel posterior y la variación son los filtros del control de concentraciones:

- *Unión Europea* (Directrices sobre concentraciones horizontales, 2004): la Comisión considera improbables los problemas de competencia con un HHI posterior a la fusión inferior a 1000, entre 1000 y 2000 con un ΔHHI inferior a 250, o superior a 2000 con un ΔHHI inferior a 150, salvo circunstancias especiales.

- *Estados Unidos* (*Merger Guidelines*, 2023): un HHI superior a 1800 indica un mercado muy concentrado, y se presume que reduce sustancialmente la competencia la fusión que lo crea o lo refuerza con un ΔHHI superior a 100.

3.3. Evidencia empírica

Los estudios siguientes aplican estas herramientas a cárteles, economías pequeñas, promociones comerciales, adquisiciones farmacéuticas y mercados de dos caras.

3.3.1. Medición del índice de Lerner

Porter (1983): estima, con datos de 1880 a 1886, la demanda y la relación de oferta del Joint Executive Committee, el cártel que fijaba las tarifas del transporte ferroviario de grano de Chicago a la costa este de EE. UU. De esas estimaciones deduce el parámetro de conducta y, con la elasticidad de la demanda, el índice de Lerner. En los periodos colusivos el margen se acerca al de Cournot, y las guerras de precios aparecen como castigos temporales que sostenían la colusión (Green y Porter, 1984; tema A19, apartado 2.2).

Ellison (1994): con un modelo más rico, estima una demanda más elástica y un margen colusivo más cercano al de monopolio, además de indicios de rebajas secretas de precios. Sus resultados apoyan, aunque débilmente, la teoría de Green y Porter frente a la de Rotemberg y Saloner (1986).

3.3.2. Medición de la cuota de mercado

Gal (2003): muestra que los umbrales de cuota y concentración no son trasladables mecánicamente entre jurisdicciones. En las economías pequeñas, la EME elevada en relación con el mercado hace que niveles de concentración altos sean inevitables e incluso eficientes, por lo que la política de competencia debe adaptar sus presunciones estructurales.

3.3.3. Otros estudios

Busse, Silva-Risso y Zettelmeyer (2006): el comprador de un automóvil retiene entre el 70 y el 90 % de un descuento del fabricante ofrecido al cliente. Del ofrecido al concesionario, por el contrario, solo retiene entre el 30 y el 40 %, porque el cliente conoce el primero y no el segundo.

Cunningham, Ederer y Ma (2021): en la industria farmacéutica, entre el 5,3 y el 7,4 % de las adquisiciones de la muestra son *killer acquisitions*, es decir, buscan interrumpir un proyecto que compite con los del comprador. Además, las adquisiciones de este tipo se concentran justo por debajo de los umbrales de notificación de las fusiones.

Rysman (2004): estima externalidades cruzadas entre lectores y anunciantes de las guías telefónicas, propias de los mercados de dos caras (apartado 2.2.3), y concluye que una estructura más competitiva es preferible al monopolio.

Conclusiones

La teoría de la organización industrial abre las dos cajas negras de la microeconomía tradicional. Por un lado, la empresa deja de ser una función de producción para entenderse como una estructura de contratos que economiza costes de transacción. Los límites de la empresa dependen de la especificidad de los activos y de los derechos de control, y en su seno los conflictos de agencia condicionan el objetivo. Por otro lado, la estructura del mercado deja de ser un dato y resulta de la tecnología, de las barreras a la entrada y de la impugnabilidad, con los costes hundidos como barrera genuina e instrumento de compromiso a la vez. La regulación se convierte en un problema de diseño de mecanismos con información asimétrica, y la NEIO sustituye las correlaciones entre industrias por la estimación de la conducta en mercados concretos.

La organización industrial se apoya en la teoría de los costes, que define la subaditividad y las economías de escala y de alcance (tema A12), y en la teoría de juegos, que da forma al compromiso y a la disuasión de la entrada (tema A14). Sus nociones ordenan, a su vez, el análisis de las estructuras de mercado, del monopolio a la competencia monopolística y al oligopolio, donde la colusión tácita completa el estudio de la conducta (temas A17, A18 y A19). La regulación con información asimétrica y los índices de poder de mercado se convierten en política aplicada, tanto en la regulación sectorial (tema A20) como en la política de competencia de la Unión Europea (tema B39). Por último, la relación entre competencia e innovación enlaza con el crecimiento schumpeteriano, en el que la renta de monopolio es el premio a innovar (tema A44).

En la medición del poder de mercado agregado, De Loecker, Eeckhout y Unger (2020) estiman que el margen medio de las empresas cotizadas estadounidenses sobre el coste marginal casi se triplicó entre 1980 y 2016, impulsado por las empresas de mayor margen. El resultado reabre el debate entre Harvard (más poder de mercado) y Chicago (expansión de las empresas más eficientes). En los mercados digitales, las plataformas de varias caras, las adquisiciones que eliminan la innovación rival (Cunningham, Ederer y Ma, 2021) y los algoritmos de precios capaces de aprender a coludir sin comunicarse (Calvano et al., 2020) desafían los instrumentos basados en cuotas y precios. Por ello, la Unión Europea ha impuesto obligaciones *ex ante* con el Reglamento de Mercados Digitales (DMA, 2022).

A16. Competencia perfecta

Análisis de mercados (I). El modelo de competencia perfecta. Análisis de equilibrio parcial: corto y largo plazo; dinámicas de ajuste y estabilidad del equilibrio. Análisis de eficiencia y bienestar.

Introducción

> **Introducción común.** Los temas A15 a A21 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A15**. Ordena los mercados en cuatro estructuras según el poder de mercado (competencia perfecta, competencia monopolística, oligopolio y monopolio) y resume la evolución de su análisis, de Cournot y Marshall a la nueva organización industrial y la teoría de la regulación.

La **competencia perfecta** es el modelo de referencia de la teoría de los mercados. Con muchos compradores y vendedores, un producto homogéneo, información perfecta y libre entrada y salida, ninguna empresa puede influir en el precio, y cada una produce la cantidad con la que su coste marginal iguala el precio de mercado. Solo en esta estructura existe una curva de oferta propiamente dicha, ya que en ella la cantidad ofrecida depende únicamente del precio.

El modelo procede del equilibrio parcial de Marshall (1890), que estudió cada mercado por separado y distinguió los plazos de ajuste. A muy corto plazo la oferta está dada y el precio lo fija la demanda. A corto plazo las empresas ajustan la producción con la planta que tienen, y producen aunque tengan pérdidas mientras el precio cubra el coste variable medio, por lo que su curva de oferta es el tramo de la curva de coste marginal situado por encima del mínimo de ese coste. A largo plazo entran o salen empresas, y la estabilidad del equilibrio depende de cómo reaccionan los precios o las cantidades fuera de él. El modelo tiene, además, un gran interés normativo. A largo plazo, la libre entrada lleva el beneficio extraordinario a cero y el precio al mínimo del coste medio, de modo que el equilibrio competitivo es eficiente en el sentido de Pareto y maximiza la suma de los excedentes, resultado que el primer teorema fundamental del bienestar generaliza a toda la economía (temas A21 y A22).

Sin embargo, ningún mercado real cumple todos sus supuestos. Por eso el modelo sirve, sobre todo, como patrón con el que se miden el poder de mercado y las pérdidas de eficiencia de las demás estructuras (temas A17 a A19) y como referencia de la política de defensa de la competencia. Sus extensiones relajan supuestos como la constancia de los precios de los factores, de la que dependen las industrias de costes constantes, crecientes o decrecientes, y analizan cómo se forma el precio cuando nadie lo fija, el problema del subastador walrasiano.

Este tema recorre el modelo de competencia perfecta en tres pasos sucesivos:

- *Fundamentos*: los supuestos del modelo marshalliano, la demanda y la decisión de la empresa.

- *Análisis temporal*: el equilibrio en cada horizonte, las dinámicas de ajuste y la estabilidad, y sus propiedades, con el análisis de eficiencia y bienestar.

- *Extensiones*: la relajación de sus supuestos.

1. Fundamentos del modelo marshalliano

La formalización del equilibrio parcial competitivo nace con Marshall (*Principles of Economics*, 1890) y se completa con Hicks, Allen y Pigou.

1.1. Supuestos

Los supuestos del modelo canónico de competencia perfecta se pueden agrupar en cinco bloques:

Metodología: el equilibrio competitivo y su eficiencia se analizan en equilibrio parcial[1], con dos bienes. Uno es el bien final, que producen las empresas y demandan los consumidores, y el otro, un bien compuesto[2] que engloba los de los demás mercados, actúa como numerario[3]. La simplificación permite tratar el mercado como aislado y representar gráficamente su oferta y su demanda.

Entorno: no existen fallos de mercado. No hay externalidades, bienes públicos, poder de mercado, información imperfecta (la información es completa y simétrica) ni costes de transacción.

Agentes: sin sector público, solo hay consumidores racionales con preferencias de buen comportamiento, que maximizan su utilidad, y empresas racionales dirigidas por sus propietarios (sin conflicto de agencia), que maximizan el beneficio económico. Unos y otros se encuentran en gran número, de modo que el mercado está atomizado.

De este bloque se deduce que los agentes son precio-aceptantes, es decir, que actúan paramétricamente en precios ($\partial p/\partial x_i^s = \partial p/\partial x_i^d = 0$). Por ello, cada uno puede comprar o vender cuanto quiera al precio de mercado, y la curva de oferta o de demanda que afronta es perfectamente elástica.

Tecnología: el modelo parte de cuatro supuestos:

- *Producto homogéneo*: la producción es monoproducto o unisectorial, $x = f(\mathbf{z})$. Todas las empresas producen un único bien normal, no numerario, idéntico y homogéneo ($\sigma_{ji} = \infty, \forall i \neq j$), perfectamente divisible, a partir de varios factores normales.

- *Divisibilidad de los factores*: es perfecta, lo que permite suponer que las funciones de producción y de costes son continuas.

- *Rendimientos mixtos*: a corto plazo (en el factor variable) y a largo plazo (en la escala de producción) la función de producción tiene forma de S y la de costes medios, forma de U, de modo que existe una dimensión óptima de planta.

- *Homogeneidad tecnológica*: todas las empresas tienen la misma tecnología[4] y el mismo acceso al mercado de factores.

[1] No se producen efectos renta en la demanda de otros productos ni retroalimentación entre mercados.

[2] Grupo de bienes con precios relativos invariantes (teorema del bien compuesto de Hicks) o, alternativamente, respecto del cual la función de utilidad es débilmente separable con una subutilidad homotética, de modo que el grupo puede tratarse con un único índice de precios.

[3] Preferencias cuasilineales: $u(m, x) = m + u_x(x)$, con $u'_x > 0$, $u''_x < 0$.

[4] No idénticas, pues se diferencian por tamaño (aleatorio, depende del espíritu empresarial, Koutsoyiannis, 1979, p. 159).

De los supuestos de entorno y tecnología se deriva la *ley del precio único*, según la cual bienes idénticos tienen precios idénticos[5].

Mercado de factores: es también perfecto y grande en relación con el del bien final. Las empresas, precio-aceptantes también en él ($\partial p_i^z / \partial z_i = 0$), contratan o alquilan cuantos factores quieran al precio de mercado. No hay (des)economías de escala externas[6].

1.2. Demanda de mercado

Definición: la curva de demanda de mercado, que procede del comportamiento optimizador de los consumidores en la teoría neoclásica del consumo, es la suma horizontal de las demandas individuales de los H consumidores del mercado:

$$D_x(p_x) = \sum_{h=1}^{H} d_x^h(p_x, p_0, M_0) \rightarrow D_x(p_x) = \sum_{h=1}^{H} d_x^h(p_x)$$

La curva muestra la cantidad demandada del bien en función de su precio, con los demás parámetros (renta, preferencias, precios de otros bienes) constantes.

Propiedades: la suma horizontal no garantiza que la demanda de mercado conserve todas las propiedades de las individuales.

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: hereda de las demandas individuales la continuidad, aunque puede no ser diferenciable (presenta quiebros) en los precios a los que un consumidor entra en el mercado o sale de él (véase la figura del tema A08, apartado 2.3.3).

2. *Transformaciones*: hereda también la homogeneidad de grado cero en precios y renta (ausencia de ilusión monetaria).

3. *Inclinación*: tiene pendiente negativa en el plano (X, p) si la tienen las demandas individuales (bien normal y, por tanto, ordinario), condición suficiente pero no necesaria.

4. *Forma*: la teoría no restringe su curvatura, igual que ocurre con las demandas individuales.

5. *Otras propiedades*:

- *Agotamiento de la renta*: el gasto de todos los consumidores en el bien y en el numerario iguala la suma de sus rentas, de modo que se cumple la ley de Walras agregada (tema A08, apartado 2.3.3).

- *Integrabilidad*: en general no hereda la simetría de los efectos sustitución ni la ley de la demanda compensada, por lo que no puede tratarse como la demanda de un consumidor representativo. Solo puede expresarse en función de la renta agregada, con independencia de su distribución, si las curvas de Engel de todos los consumidores son rectas paralelas (Gorman, 1953). Las preferencias cuasilineales supuestas cumplen esa condición, y con ellas, en soluciones interiores, la demanda del bien ni siquiera depende de la renta.

- *Observabilidad*: es observable en los datos de mercado, a partir de los cuales puede estimarse.

[5] Inherente al arbitraje sin coste.

[6] Este supuesto define una industria de "costes constantes", en la que $\mathbf{p}^z$ no varía con la producción agregada (apartado 3.2).

Las condiciones de agregación de las demandas individuales y la noción de consumidor representativo se desarrollan en el tema A08, apartados 2.3.3 y 3.1.2. Aquí se recoge solo su consecuencia para la demanda de mercado.

1.3. Oferta: la decisión de la empresa

La **curva de oferta de mercado** se construye a partir de la maximización del beneficio de la empresa racional. El **beneficio económico** es la diferencia entre el ingreso total (el valor de mercado de lo producido y vendido) y el coste total, que depende de la cantidad a través de la función de costes del tema A12:

$$\pi(x) = \mathrm{IT}(x) - \mathrm{CT}(x)$$

Ingreso: el ingreso total es $\mathrm{IT}(x) = p(x) \cdot x$. De él se derivan el ingreso marginal (la contribución de la última unidad vendida), $\mathrm{Img}(x) = \partial \mathrm{IT}/\partial x = p + (\partial p/\partial x) \cdot x = p\,(1 + 1/\varepsilon_{xp})$, y el ingreso medio (el ingreso por unidad), $\mathrm{Ime}(x) = \mathrm{IT}/x = p(x)$.

El ingreso medio es la curva de ventas o curva de demanda de la empresa, es decir, la cantidad que puede vender a cada precio. Como la empresa es precio-aceptante, el precio no depende de su producción ($\partial p/\partial x = 0$), de modo que $\mathrm{Img} = \mathrm{Ime} = p$ y la curva de ventas es perfectamente elástica. Por encima del precio de mercado no vende nada.

Coste: el coste total, $\mathrm{CT}(x)$, es la función de costes obtenida al minimizar el gasto para cada nivel de producción. De los rendimientos mixtos se derivan la forma de U del coste medio y un coste marginal creciente en el tramo relevante. A corto plazo, el coste total se descompone en costes fijos y variables, mientras que a largo plazo todos son variables.

El programa de maximización del beneficio puede escribirse de dos formas[7]:

- *Enfoque de mercado*: la empresa elige el nivel de producción, lo que sirve para estudiar la relación entre producción y beneficio.

- *Enfoque de la producción*: la empresa elige las cantidades de factores, lo que sirve para estudiar la relación entre factores y beneficio.

1.3.1. Equilibrio: enfoque de mercado

Planteamiento: en el enfoque de mercado, el programa de maximización es:

$$\max_x \ \pi = p \cdot x - \mathrm{CT}(x) \quad \text{s.a.: } x \geq 0$$

donde x es la cantidad producida, p el precio de mercado, que la empresa toma como dado, $\mathrm{CT}(x)$ su función de costes y π el beneficio.

CPO: derivando y operando se obtiene la condición de primer orden del problema

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = p - \frac{\partial \mathrm{CT}}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow \ p = \mathrm{Cmg}(x)$$

[7] En cualquiera de los casos, es un problema de maximización sin más restricción explícita que la de no negatividad, ya que las demás están implícitas. La curva de ventas determina la función de ingresos y la función de producción (junto con los precios de los factores) determina la función de costes.

La empresa produce hasta que el coste marginal alcanza al ingreso marginal, que en competencia perfecta coincide con el precio[8]. Con $p > \text{Cmg}$ conviene ampliar la producción, porque la última unidad deja más ingreso del que cuesta, y con $p < \text{Cmg}$ conviene recortarla.

CSO: $\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} < 0 \;\rightarrow\; \dfrac{\partial \text{Cmg}}{\partial x} > 0$

El coste marginal debe ser estrictamente creciente en el óptimo[9]. La maximización se produce en el tramo creciente de la curva de coste marginal[10], porque en el tramo decreciente la empresa siempre podría aumentar su beneficio produciendo una unidad más.

Esta condición, junto con la de beneficio no negativo a largo plazo ($p \geq \text{Cme}$), hace incompatibles la competencia perfecta y los rendimientos crecientes (apartado 3.1).

1.3.2. Equilibrio: enfoque de la producción

Planteamiento: análogamente, el programa de maximización puede escribirse desde el punto de vista de la producción

$$\max_{\mathbf{z}} \; \pi = p \cdot f(\mathbf{z}) - \mathbf{p}^z \cdot \mathbf{z} \quad \text{s.a.: } \mathbf{z} \geq 0$$

donde $\mathbf{z}$ es el vector de cantidades de factores, $f(\mathbf{z})$ la función de producción, p el precio del producto, $\mathbf{p}^z$ el vector de precios de los factores y π el beneficio.

CPO (condiciones de primer orden):

$$\text{RMST}_{ji} = \frac{\partial f / \partial z_i}{\partial f / \partial z_j} = \frac{p_i^z}{p_j^z} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f / \partial z_i}{p_i^z} = \lambda = \frac{1}{\text{Cmg}} \quad \forall i \tag{2}$$

$$\text{VPmg}_i \equiv p \cdot \frac{\partial f}{\partial z_i} = p_i^z \tag{3}$$

$$p = \frac{p_i^z}{\partial f / \partial z_i} = \text{Cmg} \tag{4}$$

Las cuatro condiciones se leen como sigue:

1. *Minimización del coste*: (1) establece que la relación marginal de sustitución técnica iguala al precio relativo de los factores, de modo que la empresa produce al mínimo coste (eficiencia económica, no solo técnica).

2. *Igualdad de productividades ponderadas*: (2) reformula la anterior en términos de productividad marginal por euro gastado, que ha de ser igual para todos los factores.

[8] Condición ya derivada por Cournot (1838) para el caso de "competencia ilimitada".

[9] Teorema del máximo local-global: un máximo local es global si la función objetivo es estrictamente cuasicóncava (o cóncava) y el conjunto de restricciones es convexo. Con rendimientos mixtos, la función objetivo $\pi(x)$ no es necesariamente cuasicóncava, de ahí la necesidad de la CSO.

[10] Implícitamente, la pendiente de Cmg debe ser superior a la de Img (= 0 en competencia perfecta).

3. *Maximización del beneficio*: (3) establece que cada factor se contrata hasta que el valor de su productividad marginal iguala a su precio.

4. *Regla de precios*: (4) muestra que el precio del producto iguala al coste marginal sin margen alguno, consecuencia de que la empresa sea precio-aceptante.

CSO: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$, junto con $f_{11} < 0$, es decir, la función de producción debe ser estrictamente cóncava en el tramo relevante. Ello no equivale a rendimientos decrecientes a escala, sino a rendimientos marginales decrecientes con efectos cruzados acotados.

1.3.3. Funciones de oferta y demanda de factores

De la resolución del problema se pueden obtener:

Demanda incondicionada de factores: es la cantidad óptima de factores productivos demandados en función del precio del bien final y de los precios de los factores, admitiendo fluctuaciones en el nivel de producción (de ahí el nombre), $z_i^d = d_i^z(p, \mathbf{p}^z)$. Sus propiedades son las siguientes:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: son continuas y diferenciables en el precio del bien y en los precios de los factores cuando la función de producción es estrictamente cóncava, lo que permite el análisis de estática comparativa.

2. *Transformaciones*: son homogéneas de grado cero en el precio del bien y en los precios de los factores, de modo que la inflación pura no altera las elecciones de factores (ausencia de ilusión monetaria).

3. *Inclinación*: el efecto precio propio es no positivo, $\partial d_i^z/\partial p_i^z \leq 0$, efecto mayor en valor absoluto que el de la demanda condicionada (lema de Shephard), porque incluye el efecto producción (Gravelle y Rees, 2004). En cambio, el efecto cruzado es indeterminado. Con dos factores, su signo es el opuesto al de f_{12}, y así, si los factores son complementarios en la producción, $f_{12} > 0$, la subida del precio de uno reduce la demanda del otro. Por el lema de Hotelling y el teorema de Schwarz, los efectos cruzados son simétricos, $\partial d_i^z/\partial p_j^z = \partial d_j^z/\partial p_i^z$. Por la misma razón, el efecto del precio de un factor sobre la oferta es el opuesto al del precio del bien sobre la demanda de ese factor, $\partial s/\partial p_i^z = -\partial d_i^z/\partial p$ (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995, prop. 5.C.1).

4. *Forma*: la teoría no restringe su curvatura respecto a los precios. La restricción de segundo orden recae sobre la función de máximo beneficio, convexa en precios, de la que las demandas derivan por el lema de Hotelling.

5. *Otras propiedades*:

- *Envolvente* (*lema de Hotelling*): se obtienen de la función de máximo beneficio, $z_i^d = -\partial\Pi/\partial p_i^z$.

- *Dualidad*: coinciden con las demandas condicionadas evaluadas en la producción que maximiza el beneficio, $d_i^z(p, \mathbf{p}^z) = d_i^c(\mathbf{p}^z, s(p, \mathbf{p}^z))$, con d_i^c la demanda condicionada del tema A12, apartado 1.4.2. La empresa que maximiza el beneficio minimiza también el coste de lo que produce (condición (1)), y un ejemplo posterior lo comprueba con una Cobb-Douglas.

- *Integrabilidad*: junto con la oferta, permiten recuperar la función de máximo beneficio si, además de ser todas homogéneas de grado cero, forman un sistema de ofertas netas cuya matriz de derivadas respecto a los precios es simétrica y semidefinida positiva. En ese sistema la oferta del bien entra con signo positivo y las demandas de factores con signo negativo.

- *Observabilidad*: son observables y estimables a partir de datos de precios y de cantidades de factores.

Oferta individual del bien final: sustituyendo las demandas de factores en la función de producción se obtiene la cantidad óptima ofrecida como función del precio del bien y de los precios de los factores, $x^s = s(p, \mathbf{p}^z)$. Geométricamente, es el tramo creciente de la curva de coste marginal situado por encima del precio de cierre, como se desarrolla en el apartado 2. Sus propiedades son las siguientes:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en el precio del bien y en los precios de los factores salvo en el umbral de cierre (precio igual al mínimo del coste variable medio, que depende de los precios de los factores), y es diferenciable por tramos. En ese umbral salta de cero al *output* que minimiza el coste variable medio.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado cero en el precio del bien y en los precios de los factores, por lo que la inflación pura no altera la cantidad ofrecida (ausencia de ilusión monetaria).

3. *Inclinación*: no decreciente en el precio del bien ($\partial s/\partial p \geq 0$, por la convexidad de la función de beneficio).

4. *Forma*: la teoría tampoco restringe su curvatura. La restricción de segundo orden recae, como en las demandas de factores, sobre la función de máximo beneficio, convexa en precios.

5. *Otras propiedades*:

- *Envolvente* (*lema de Hotelling*): se obtiene de la función de máximo beneficio, $x^s = \partial\Pi/\partial p$.

- *Integrabilidad*: junto con las demandas de factores, permite recuperar la función de máximo beneficio, con la condición indicada para estas.

- *Observabilidad*: es observable y estimable a partir de datos de precios y cantidades producidas.

1.3.4. Función de valor: la función de máximo beneficio

Definición: de la resolución de ambos problemas se obtiene la función de valor óptimo, la *función de máximo beneficio*, que recoge el beneficio máximo para cada nivel de precios del bien y de los factores:

$$\pi^* = \Pi(p, \mathbf{p}^z)$$

Propiedades[11]:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en el precio del producto y en los precios de los factores, y diferenciable en ellos cuando la oferta y las demandas de factores son únicas, lo que permite aplicar el teorema de la envolvente.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado uno en el precio del producto y en los precios de los factores, $\Pi(\lambda p, \lambda \mathbf{p}^z) = \lambda\,\Pi(p, \mathbf{p}^z)$. Por ello, un aumento equiproporcional de todos los precios aumenta el beneficio máximo en la misma proporción sin alterar las decisiones de la empresa (ausencia de ilusión monetaria). Además, es una función cardinal, medida en unidades monetarias.

[11] Derivan de la hipótesis de maximización, sin axiomas adicionales (Varian, 1992, cap. 3).

3. *Inclinación*: no decreciente en el precio del producto ($\partial\Pi/\partial p \geq 0$) y no creciente en el precio de cada factor ($\partial\Pi/\partial p_i^z \leq 0$).

4. *Forma*: convexa en todos los precios, lo que, con el lema de Hotelling, hace que la oferta no disminuya con el precio del bien ni la demanda incondicionada de un factor aumente con su precio.

- *Respecto al precio del producto*: $\partial^2\Pi/\partial p^2 \geq 0$. Al subir el precio, el beneficio crece a un ritmo cada vez mayor, porque la empresa reajusta su producción.

- *Respecto al precio de los factores*: $\partial^2\Pi/\partial (p_i^z)^2 \geq 0$. Al subir el precio de un factor, el beneficio cae a un ritmo cada vez menor, porque la empresa lo sustituye y reajusta su producción.

5. *Otras propiedades*:

- *Envolvente* (*lema de Hotelling*): las derivadas de la función recuperan las funciones de comportamiento de la empresa, como hacen la identidad de Roy y el lema de Shephard con las funciones indirecta de utilidad y de gasto del consumidor (tema A09):

$$x^s = \frac{\partial \Pi}{\partial p} \qquad z_i^d = -\frac{\partial \Pi}{\partial p_i^z}$$

- *Dualidad*: es el beneficio del enfoque de mercado evaluado en la oferta óptima, $\Pi(p, \mathbf{p}^z) = p \cdot s(p, \mathbf{p}^z) - c(\mathbf{p}^z, s(p, \mathbf{p}^z))$, con $\mathrm{CT}(x) = c(\mathbf{p}^z, x)$ la función de costes del tema A12, apartado 1.4.4, de modo que los enfoques de mercado y de la producción llevan al mismo beneficio máximo.

- *Integrabilidad*: recíprocamente, toda función continua, homogénea de grado uno y convexa en precios, no decreciente en el precio del producto y no creciente en los de los factores, es la función de máximo beneficio de alguna tecnología. Si la tecnología es convexa, puede reconstruirse a partir de la función de máximo beneficio (en otro caso, se recupera su envolvente convexa).

- *Observabilidad*: es observable, porque se miden sus argumentos (los precios del producto y de los factores) y su valor (el beneficio). Estimada con esos datos, permite obtener, por el lema de Hotelling, la oferta y las demandas de factores sin estimar directamente la tecnología (enfoque dual).

Ejemplo: oferta y función de beneficio con una Cobb-Douglas

Con la tecnología $x = L^{1/4}K^{1/4}$ y $\mathbf{p}^z = (w, r)$, la función de costes del tema A12 es $\mathrm{CT}(x) = 2x^2(wr)^{1/2}$, con $\mathrm{Cmg} = 4x(wr)^{1/2}$ estrictamente creciente (se cumple la CSO). La CPO $p = \mathrm{Cmg}$ da la oferta y, sustituyéndola en $\pi = px - \mathrm{CT}(x)$, la función de máximo beneficio:

$$x^s = \frac{p}{4(wr)^{1/2}} \qquad \Pi(p, w, r) = \frac{p^2}{8(wr)^{1/2}}$$

Se verifica el lema de Hotelling, pues $\partial\Pi/\partial p = p/(4(wr)^{1/2}) = x^s$, y $-\partial\Pi/\partial w = p^2/(16\, w^{3/2} r^{1/2})$, la demanda incondicionada de trabajo, coincide con la condicionada de A12 evaluada en x^s, $(x^s)^2(r/w)^{1/2}$. Además, Π es homogénea de grado uno y convexa en p, y x^s, homogénea de grado cero. Sin costes fijos, el $\mathrm{CVme} = 2x(wr)^{1/2}$ alcanza su mínimo, 0, en $x = 0$, de modo que el precio de cierre es nulo y la oferta es toda la curva de Cmg.

1.4. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo marshalliano de competencia perfecta es la referencia normativa de la teoría de mercados. Bajo sus supuestos, la maximización del beneficio da funciones de oferta y de demanda de factores con propiedades análogas a las del consumidor (continuidad, homogeneidad de grado cero, signo de las derivadas), y el equilibrio resultante es eficiente en el sentido de Pareto (tema A22).

Limitaciones: los supuestos (atomicidad, homogeneidad, información perfecta, libre entrada) son exigentes y rara vez se cumplen conjuntamente. Además, el modelo es estático y de equilibrio parcial, de modo que el ajuste temporal, las interdependencias entre mercados y la conducta estratégica exigen los desarrollos de los apartados 2 y 3 y de los temas A17 a A21.

2. Análisis temporal del modelo

Siguiendo a Marshall, el modelo se estudia en tres horizontes temporales, que se distinguen por la capacidad de ajuste de cada empresa ante los cambios de la demanda. Esa capacidad da a la oferta individual y a la de mercado una forma distinta en cada horizonte y decide si la empresa puede tener beneficios o pérdidas. Después se estudian las dinámicas de ajuste de esos equilibrios y sus propiedades, positivas (existencia, unicidad y estabilidad) y normativas (eficiencia y bienestar).

2.1. Muy corto plazo: subastas

El horizonte más breve es aquel en que la producción ya está dada y solo el precio puede ajustarse para repartir las existencias entre los compradores.

2.1.1. Supuestos

Marshall llamó "**periodo de mercado**" al horizonte de muy corto plazo. En él las empresas son siempre las mismas (no pueden entrar ni salir del mercado), y lo que ofrecen es una cantidad dada (p. ej. un *stock* de bienes perecederos ya producido). La demanda de mercado es decreciente en el precio del bien.

2.1.2. Modelo

Oferta individual y de mercado: con la producción ya hecha y sin posibilidad de ajustarla, cada empresa ofrece lo mismo sea cual sea el precio. Su curva de oferta es, pues, vertical (elasticidad nula), y la de mercado, suma de las individuales, es igual de rígida.

Equilibrio: el precio lo fija solo la demanda. Como en una subasta, la única función del precio es la de racionamiento, pues reparte las existencias entre los demandantes para que el mercado se vacíe, sin señalar todavía nada a los productores.

La empresa, precio-aceptante (apartado 1.1)[12] y sin poder ajustar la oferta a las condiciones de demanda, puede encontrarse en una situación de beneficios o de pérdidas.

Desarrollo gráfico: el equilibrio a muy corto plazo se representa en el plano cantidad-precio, para la industria y para la empresa (figura A16.1):

1. *Oferta*: la de mercado, $S(X)$, es vertical en la cantidad dada, $\bar{X}$, porque las existencias ya están producidas, y la de cada empresa, $s_i(x)$, lo es en $\bar{x}$.

2. *Demanda*: la de mercado, $D_0(X)$, es decreciente, como las individuales (apartado 1.2). En cambio, la de la empresa, $d_0(x)$, es horizontal al precio de mercado, porque la empresa es precio-aceptante.

3. *Equilibrio*: el corte de $D_0(X)$ con $S(X)$ fija el precio p_0 (punto 0), al que cada empresa vende $\bar{x}$.

[12] En competencia perfecta el precio es la variable independiente y la cantidad la dependiente. Se sigue a Marshall en la representación (cantidad en abscisas) y a Walras en el razonamiento.

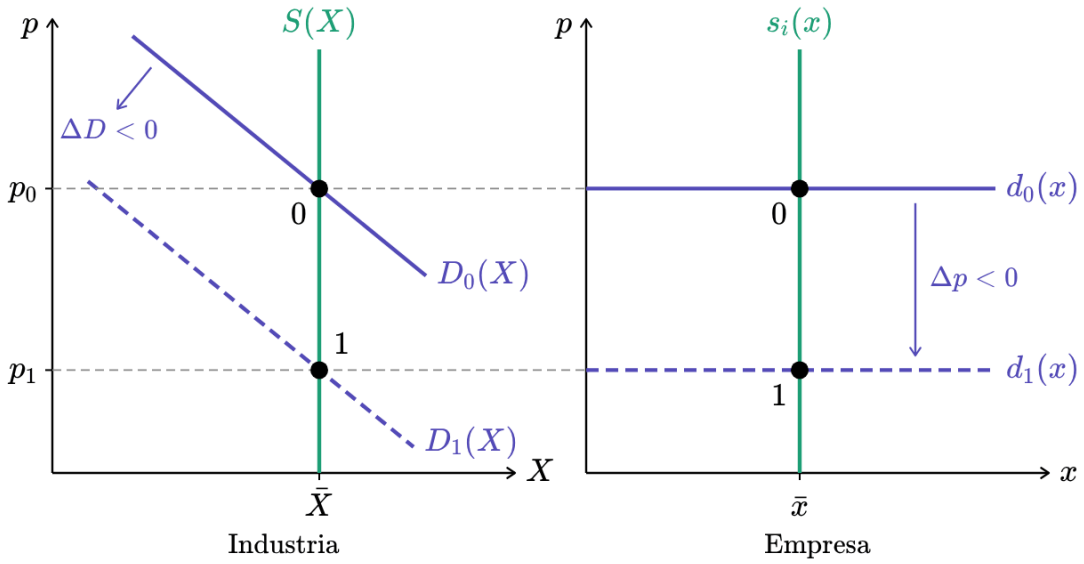


Figura A16.1: Muy corto plazo. Con la oferta rígida en $\bar{X}$, una caída de la demanda ($\Delta D < 0$) se traslada íntegramente al precio, que baja de p_0 a p_1. La empresa, precio-aceptante, sigue vendiendo $\bar{x}$ a un precio menor.

Estática comparativa: como en los horizontes siguientes, las perturbaciones se agrupan según desplacen la demanda o la oferta:

▪ *Perturbaciones de demanda*: como la oferta es rígida, un desplazamiento de la demanda se traslada íntegramente al precio, en su mismo sentido, sin alterar la cantidad intercambiada, $\bar{X}$, ni la de cada empresa, $\bar{x}$. En la figura A16.1, una caída de la demanda de $D_0(X)$ a $D_1(X)$ baja el precio de p_0 a p_1 (del punto 0 al 1), y la demanda de la empresa pasa de $d_0(x)$ a $d_1(x)$. Para un mismo desplazamiento horizontal de la demanda, la variación del precio es tanto mayor cuanto menos elástica (más inclinada en el plano (X, p)) es la demanda.

▪ *Perturbaciones de oferta*: en el periodo de mercado la oferta solo cambia si lo hacen las existencias disponibles (p. ej. por la pérdida de parte del *stock*), y no con los precios de los factores o la tecnología, que solo afectan a la producción futura. Una reducción de las existencias desplaza hacia la izquierda la oferta rígida, de modo que la cantidad intercambiada cae en toda la cuantía del choque y el precio sube, tanto más cuanto menos elástica es la demanda.

2.2. Corto plazo: posibilidad de pérdidas

El periodo de mercado es el punto de partida de los horizontes siguientes, en los que la oferta va ganando capacidad de respuesta al precio.

2.2.1. Supuestos

El número de empresas sigue siendo fijo, pero la producción ya no lo es. Cada empresa dispone de al menos un factor fijo, de modo que sus costes se dividen en fijos y variables, y elige la cantidad que produce con el factor variable. Además, los precios de los factores se suponen constantes (la industria es pequeña en relación con los mercados de factores).

2.2.2. Modelo

Oferta individual: del lado del coste, por la CPO y la CSO (apartado 1.3.1), la empresa produce en el tramo creciente de la Cmg_{CP}. Del lado del precio, puede vender cuanto produzca al precio de mercado, y una condición de viabilidad económica distingue tres situaciones según dónde se sitúe ese precio:

1. *Precios bajos* ($p < \text{CVme}(x_{\text{ME}})$): si el precio de mercado queda por debajo del mínimo del coste variable medio, el ingreso total no cubre siquiera los costes variables. La empresa prefiere cerrar, porque al producir perdería más que los costes fijos, lo único que pierde si cierra.

2. *Precios medios* ($p \in [\text{CVme}(x_{\text{ME}}), \text{Cme}(x_{\text{OE}}))$): entre el mínimo y el óptimo de explotación, el precio no baja del coste variable medio. La empresa pierde dinero, pero le conviene producir, porque con lo que ingresa atiende la totalidad del coste variable y, por encima del mínimo de explotación, una fracción del fijo (en el mínimo exacto le es indiferente producir o cerrar).

3. *Precios altos* ($p \geq \text{Cme}(x_{\text{OE}})$): en el óptimo de explotación la empresa cubre exactamente todos sus costes (beneficio extraordinario nulo) y, por encima de él, obtiene beneficios extraordinarios.

La función de oferta a corto plazo es, por tanto, discontinua:

$$x^s_{\text{CP}} = \begin{cases} s(p, \mathbf{p}^z_0) & \text{si } p \geq \text{CVme}(x_{\text{ME}}) \\ 0 & \text{si } p < \text{CVme}(x_{\text{ME}}) \end{cases}$$

Oferta de mercado: con precios de los factores constantes y número de empresas dado, a corto plazo se obtiene por suma horizontal de las ofertas individuales[13]. Hereda por ello las propiedades de las curvas individuales:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es discontinua en el precio de cierre de cada empresa, aunque con muchas empresas de costes distintos la agregación la suaviza.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado cero en el precio del bien y en los precios de los factores, como cada oferta individual.

3. *Inclinación*: es no decreciente en el precio del bien, como cada oferta individual, y su elasticidad es la media de las elasticidades individuales ponderada por las cuotas de producción.

4. *Forma*: la teoría no restringe su curvatura, igual que ocurre con las ofertas individuales.

5. *Otras propiedades*:

[13] Las empresas con la misma tecnología pero distinto tamaño tienen ofertas individuales distintas.

▪ *Envolvente* (*lema de Hotelling*): es la derivada respecto al precio del bien de la suma de las funciones de máximo beneficio de las empresas. A diferencia de la demanda de mercado (apartado 1.2), se comporta por ello como la oferta de un único productor precio-aceptante que maximizase el beneficio agregado.

▪ *Observabilidad*: como la demanda de mercado, es observable en los datos de mercado, a partir de los cuales puede estimarse.

Equilibrio: se produce en la intersección de las curvas de demanda y de oferta de mercado, que actúan simultáneamente (la *cruz marshalliana*). Marshall comparó esa simultaneidad con una tijera, de la que no puede decirse qué hoja corta, como tampoco si el precio lo fija la oferta o la demanda. En el periodo de mercado lo fijaba solo la demanda, y a corto plazo lo fijan ambas. El precio cumple así una doble función, pues raciona la demanda y señala a las empresas cuánto producir.

Desarrollo gráfico: el equilibrio a corto plazo se representa en el plano cantidad-precio de la industria y en el plano cantidad-coste de la empresa (figura A16.2):

1. *Oferta de mercado*, $S(X) = \sum s_i(x)$: es la suma horizontal de las ofertas individuales y crece con el precio. Parte del eje de precios en el precio de cierre, p_c, el mínimo de $\text{CVme}(x)$, por debajo del cual ninguna empresa produce. A precios inferiores, la oferta coincide, por tanto, con el eje de precios.

2. *Demanda de mercado*, $D(X)$: es la suma de las demandas individuales y decrece con el precio.

3. *Curvas de costes de la empresa*, $\text{Cmg}(x)$, $\text{Cme}(x)$ y $\text{CVme}(x)$: la oferta individual, $s_i(x)$, es el tramo de $\text{Cmg}(x)$ por encima del mínimo de explotación, x_{ME}. Por debajo del precio de cierre, la empresa no produce y su oferta coincide con el eje de precios, de modo que la curva de oferta tiene un salto en ese precio. El óptimo de explotación, x_{OE}, es el mínimo de $\text{Cme}(x)$.

4. *Equilibrio*: el corte de $D(X)$ y $S(X)$ fija el precio p_0 y la cantidad X_0 (punto 0 de la industria). A ese precio la empresa produce x_0, donde $p_0 = \text{Cmg}(x_0)$ (punto 0 de la empresa). Como x_0 supera a x_{OE}, el precio supera al coste medio y la empresa obtiene beneficios extraordinarios.

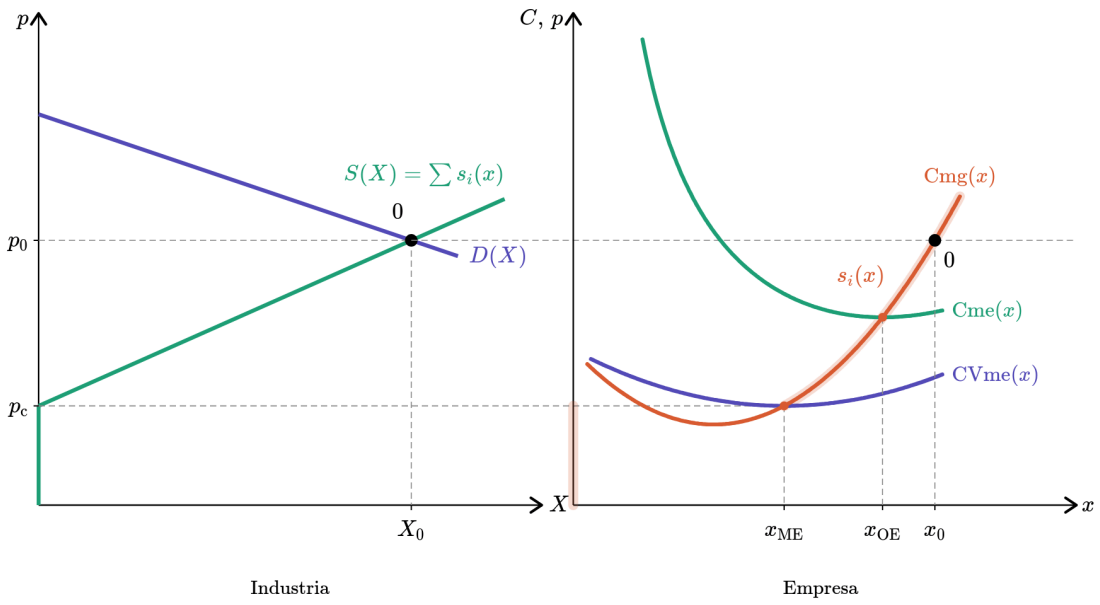


Figura A16.2: Equilibrio de la industria y de la empresa a corto plazo. La empresa puede obtener beneficios o pérdidas extraordinarias.

Estática comparativa: los desplazamientos de las curvas de mercado se agrupan según su origen. Las perturbaciones de demanda mueven el precio y la cantidad de equilibrio en el mismo sentido, y las de oferta, en sentidos opuestos.

▪ *Perturbaciones de demanda*: nacen de variaciones en las preferencias, en la renta o en lo que cuestan los bienes relacionados (sustitutivos y complementarios), y de los impuestos que pagan los compradores.

- *Aumento de la demanda*: eleva el precio y la cantidad de equilibrio. Con el número de empresas fijo, cada empresa amplía su producción a lo largo de su Cmg_{CP} y aumenta su beneficio (o reduce sus pérdidas). La subida del precio es tanto mayor, y la de la cantidad tanto menor, cuanto menos elástica es la oferta a corto plazo.

- *Impuesto sobre los compradores*: un *impuesto específico* de t euros por unidad[14] cuyo sujeto pasivo legal es el comprador desplaza la curva de demanda hacia abajo en la cuantía del impuesto. Tiene los mismos efectos que el impuesto sobre los vendedores, porque la incidencia económica no depende de quién sea el sujeto pasivo legal.

▪ *Perturbaciones de oferta*: las provocan los cambios técnicos, el encarecimiento o abaratamiento de los factores, las variaciones del número de productores y los impuestos que pagan los vendedores.

- *Impuesto sobre los vendedores*: el mismo impuesto, cobrado al vendedor, desplaza la curva de oferta hacia arriba en la cuantía del impuesto, con tres efectos. Primero, la cantidad de equilibrio disminuye. Segundo, aparece una *cuña fiscal*, pues el precio que pagan los consumidores, p_d, supera al que reciben los productores, p_s, en el impuesto, $p_d - p_s = t$. Tercero, se produce la *traslación parcial* del impuesto, es decir, la carga se reparte entre

[14] En competencia perfecta, un impuesto *ad valorem* de igual recaudación tiene los mismos efectos.

ambos. De ello resulta una pérdida neta de bienestar, el *exceso de gravamen*[15], pues la pérdida conjunta de excedentes supera a la recaudación. Según la *ley de Dalton*[16], la incidencia económica se reparte según las elasticidades:

$$\frac{\partial p_d}{\partial t} = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_S + |\varepsilon_D|} \qquad \frac{\partial p_s}{\partial t} = -\frac{|\varepsilon_D|}{\varepsilon_S + |\varepsilon_D|}$$

La carga recae más sobre quien es más inelástico. La misma lógica de la cuña sirve para analizar los costes de transacción (apartado 3.3.2).

- *Aumento de coste fijo*[17]: desplaza CFme_{CP} y Cme_{CP}, pero no CVme_{CP} ni Cmg_{CP}. No altera el equilibrio a corto plazo (CP), porque la decisión de producir solo depende de que el precio cubra el CVme, que no cambia.

- *Aumento del coste variable*[18]: eleva a la vez el coste marginal, el variable medio y el total medio, y contrae las ofertas individuales y la agregada. Como a corto plazo no entra ni sale ninguna empresa, cada empresa produce menos, la industria también y el precio sube[19], con la carga repartida, como en el impuesto, según las elasticidades.

2.3. Largo plazo: condición de beneficio nulo

Que coexistan empresas con beneficios y con pérdidas es un resultado de corto plazo, que la libre entrada y salida de empresas elimina a largo plazo al imponer la condición de beneficio nulo.

2.3.1. Supuestos

En el largo plazo todos los factores son variables y existe libre entrada y salida de empresas[20], de modo que el número de empresas pasa a ser una variable que el mercado determina. Por tanto, junto a $p = \text{Cmg}$, que maximiza el beneficio, rige la **condición de beneficio nulo**, $p = \text{Cme}$. Ninguna empresa la persigue, sino que se cumple como consecuencia institucional de la libre entrada.

2.3.2. Modelo

Oferta individual: a largo plazo se obtiene como la del corto plazo, con una diferencia del lado del coste. Como todo el coste es variable, el umbral de la oferta es el mínimo del coste medio a largo plazo, que define la dimensión óptima de planta.

$$x^s_{\text{LP}} = \begin{cases} s(p, \mathbf{p}^z_0) & \text{si } p \geq \text{Cme}_{\text{LP}}(x_{\text{OE}}) \\ 0 & \text{si } p < \text{Cme}_{\text{LP}}(x_{\text{OE}}) \end{cases}$$

[15] Pérdida neta respecto a un impuesto de suma fija de igual cuantía.
[16] Formulada por Hugh Dalton (1922).
[17] Impuesto de suma fija, sobre beneficios o aumento de alquiler son equivalentes (Koutsoyiannis, 1979, p. 168).
[18] Aumento de salario, impuesto específico o *ad valorem*.
[19] La magnitud depende del formato de contrato del factor fijo (Gravelle y Rees, 2004).
[20] En LP, la libre salida garantiza que el beneficio no sea negativo, pues la empresa puede no producir y evitar así todos sus costes. La libre entrada es la que impide que sea positivo. El beneficio nulo requiere, por tanto, ambas.

La condición de viabilidad a largo plazo es que el ingreso cubra el coste total, $\text{IT} \geq \text{CT}_{\text{LP}}$, es decir, $p \geq \text{Cme}_{\text{LP}}$. La empresa solo produce si cubre todos sus costes, porque a largo plazo puede evitarlos todos cerrando.

El *teorema de Le Châtelier-Samuelson* (1947) (tema A12) garantiza que, donde se cortan, la oferta de largo plazo responde al precio al menos tanto como la de corto, porque con todos los factores ajustables la empresa se adapta mejor. La diferencia crece con el número de factores que la empresa no puede ajustar a corto plazo.

Oferta de mercado: a largo plazo no es la simple suma de las ofertas individuales, porque la entrada de empresas nuevas y la salida de las existentes cambian su número hasta que se cumple la condición de beneficio nulo.

Equilibrio: todas las empresas activas operan en su dimensión óptima ($\text{Cme}_{\text{CP}} = \text{Cmg}_{\text{CP}} = \text{Cmg}_{\text{LP}} = \text{Cme}_{\text{LP}}$), con beneficio económico nulo. El precio cumple una tercera función, la de asignar los recursos entre industrias, pues es la señal que provoca la entrada y la salida.

Desarrollo gráfico: el equilibrio a largo plazo se representa en el plano cantidad-precio de la industria y en el plano cantidad-coste de la empresa (figura A16.3):

1. *Demanda y oferta a corto plazo de la industria*, $D_0(X)$ y $S_0(X)$: la oferta a corto plazo es la suma de las ofertas de las empresas activas, de modo que se desplaza cuando cambia su número. Con empresas idénticas, la entrada multiplica la cantidad ofrecida a cada precio, y la curva gira hacia la derecha alrededor de su corte con el eje de precios.

2. *Curvas de costes de la empresa*: a corto plazo, $\text{Cmg}_{\text{CP}}(x)$ y $\text{Cme}_{\text{CP}}(x)$, y a largo plazo, $\text{Cmg}_{\text{LP}}(x)$ y $\text{Cme}_{\text{LP}}(x)$, que coinciden en el mínimo de $\text{Cme}_{\text{LP}}(x)$.

3. *Oferta de mercado a largo plazo*, $S_{\text{LP}}(X)$: une los sucesivos equilibrios a largo plazo. Es perfectamente elástica (horizontal al nivel del mínimo de $\text{Cme}_{\text{LP}}(x)$), porque la cantidad se ajusta por variación del número de empresas.

4. *Equilibrio*: la industria parte del equilibrio a largo plazo (X_0, p_0), punto 0, en el que cada empresa produce x_0 en el mínimo de su coste medio, con beneficio nulo.

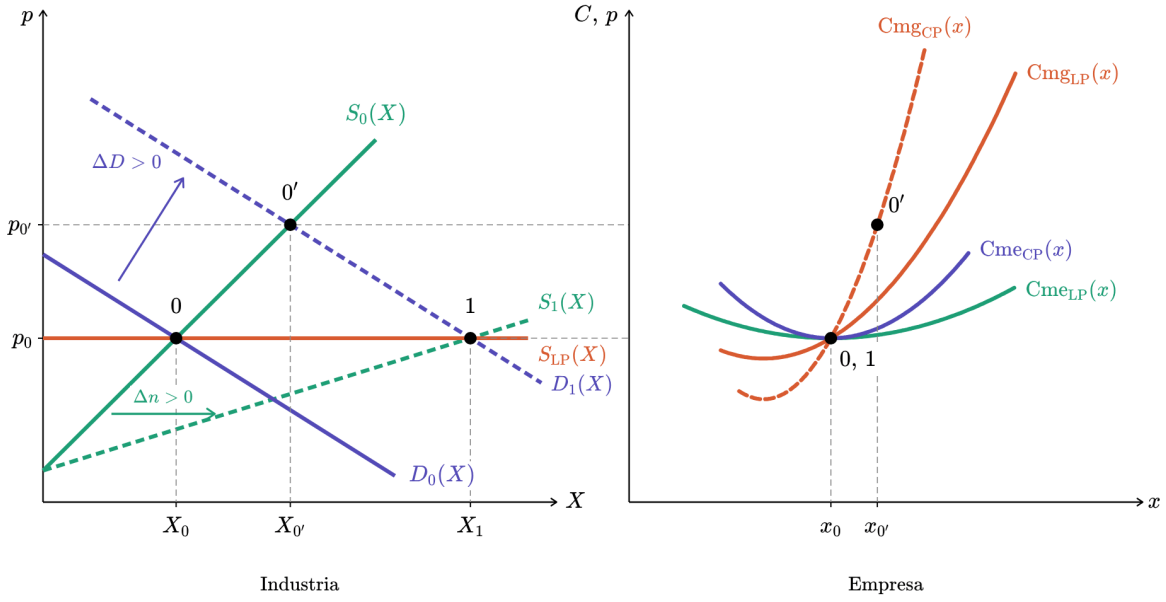


Figura A16.3: Equilibrio a largo plazo. La entrada y salida de empresas lleva el precio al mínimo del coste medio a largo plazo y anula el beneficio extraordinario.

Estática comparativa: con precios de los factores constantes, la oferta a largo plazo es horizontal, de modo que el precio solo depende de los costes y la demanda determina únicamente la cantidad.

▪ *Perturbaciones de demanda*: un aumento permanente de la demanda no altera el precio a largo plazo. En la figura A16.3, la demanda pasa de $D_0(X)$ a $D_1(X)$ y, a corto plazo, el mercado se desplaza al punto $0'$, con precio $p_{0'}$ y beneficios extraordinarios, pues cada empresa amplía su producción hasta $x_{0'}$. Esos beneficios atraen nuevos entrantes ($\Delta n > 0$), que desplazan la oferta a corto plazo de $S_0(X)$ a $S_1(X)$ hasta que el precio vuelve a p_0 (punto 1). La cantidad sube a X_1 por la entrada de empresas, cada una de las cuales produce lo mismo que antes. Sin embargo, si la expansión altera los precios de los factores, el precio sí varía (apartado 3.2).

▪ *Perturbaciones de oferta*: los cambios en los costes desplazan el mínimo del coste medio a largo plazo y, con él, el precio.

- *Aumento de CF permanente*: desplaza Cme_{LP} hacia arriba. Las empresas con pérdidas abandonan: $\downarrow n$, $\uparrow x$ (por empresa que se queda), $\uparrow p$, $\downarrow X$[21]. La incidencia se traslada totalmente a los consumidores, porque la oferta a largo plazo (LP) es perfectamente elástica.

- *Aumento de CV*: sube el precio ($\uparrow p$) y cae la cantidad ($\downarrow X$), mientras que el efecto sobre x y n es indeterminado (la empresa opera en el nuevo mínimo de Cme).

2.4. Dinámicas de ajuste

El corte de la oferta y la demanda no dice cómo llega el mercado al equilibrio ni si vuelve a él tras una perturbación. Ambas cuestiones dependen de la dinámica de ajuste, es decir, de qué

[21] Con tecnologías idénticas queda indeterminado qué empresas salen, una crítica habitual al modelo.

variable responde al desequilibrio. Cada dinámica tiene su propia condición de convergencia, y el equilibrio es estable cuando esa condición se cumple. La estabilidad se recoge después entre las propiedades positivas del equilibrio (apartado 2.5.1).

La dinámica puede ser la de Walras, en la que se ajusta el precio, la de Marshall, en la que se ajusta la cantidad, o la de la telaraña, en la que la oferta responde con retraso. En lo que sigue, $D(p)$ y $S(p)$ son la demanda y la oferta de mercado del bien. Sus inversas, $p_d(X)$ y $p_s(X)$, son el **precio de demanda** (el precio al que los consumidores comprarían exactamente la cantidad X) y el **precio de oferta** (el precio al que los productores ofrecerían exactamente esa cantidad).

2.4.1. Ajuste walrasiano: el precio responde al exceso de demanda

Origen: Léon Walras (1874) describió el ajuste como un tanteo (*tâtonnement*) en el que, antes de que se produzca ningún intercambio, el precio sube cuando hay exceso de demanda y baja cuando hay exceso de oferta. La tradición posterior lo personificó en un subastador ficticio, y Samuelson (1947) lo formalizó como un sistema dinámico.

Idea: el precio varía en proporción al exceso de demanda:

$$\frac{dp}{dt} = \kappa_p \left[D(p) - S(p)\right]$$

donde p es el precio, t el tiempo, $D(p)$ y $S(p)$ las cantidades demandada y ofrecida a ese precio y $\kappa_p > 0$ la velocidad de ajuste del precio. Solo se intercambia al precio de equilibrio, p^*, en el que $D(p^*) = S(p^*)$.

Razonamiento: en torno a p^*, la desviación del precio evoluciona según $d(p - p^*)/dt \approx \kappa_p \left[D'(p^*) - S'(p^*)\right](p - p^*)$, y se corrige si el exceso de demanda decrece con el precio:

$$D'(p^*) - S'(p^*) < 0$$

donde $D'(p^*)$ y $S'(p^*)$ son las derivadas de la demanda y de la oferta respecto al precio en el equilibrio. En el plano (X, p), la oferta ha de quedar a la derecha de la demanda por encima de p^* (exceso de oferta, que hace bajar el precio) y a su izquierda por debajo (exceso de demanda, que lo hace subir). Con demanda decreciente y oferta creciente, la condición se cumple siempre, y el precio converge desde cualquier valor inicial si el exceso de demanda solo cambia de signo en p^*.

Por el **principio de correspondencia** de Samuelson (1947), la condición de estabilidad da signo a la estática comparativa. Así, si la demanda aumenta en ΔD a cada precio, el precio de equilibrio sube aproximadamente en $\Delta D/[S'(p^*) - D'(p^*)]$, cantidad positiva justamente porque el equilibrio es estable.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el ajuste walrasiano se adapta bien a los mercados en los que el precio se forma antes de intercambiar, como los de capitales.

- *Limitaciones*: con varios mercados interdependientes, la estabilidad del tanteo deja de estar garantizada, aunque la asegura, por ejemplo, la sustituibilidad bruta (tema A21, apartado 2.1.3).

2.4.2. Ajuste marshalliano: la cantidad responde al exceso del precio de demanda

Origen: Alfred Marshall (1890) razonaba con la cantidad como variable independiente. Los productores amplían la producción cuando el precio que los consumidores están dispuestos a pagar supera al que los productores necesitan para ofrecerla, y la reducen en el caso contrario.

Idea: la cantidad varía en proporción a la diferencia entre el precio de demanda y el de oferta:

$$\frac{dX}{dt} = \kappa_X \left[p_d(X) - p_s(X)\right]$$

donde X es la cantidad de mercado, $p_d(X)$ y $p_s(X)$ los precios de demanda y de oferta de esa cantidad y $\kappa_X > 0$ la velocidad de ajuste de la cantidad. A diferencia del tanteo walrasiano, se intercambia fuera del equilibrio.

Razonamiento: en torno a X^*, la desviación evoluciona según $d(X-X^*)/dt \approx \kappa_X \left[p'_d(X^*) - p'_s(X^*)\right](X-X^*)$, y se corrige si

$$p'_s(X^*) > p'_d(X^*)$$

donde $p'_d(X^*)$ y $p'_s(X^*)$ son las pendientes de las curvas de demanda y de oferta en el plano (X, p). La oferta ha de cortar a la demanda desde abajo. La cantidad converge desde cualquier valor inicial si el precio de oferta supera al de demanda a la derecha de X^* y es inferior a su izquierda.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el ajuste marshalliano se adapta bien a los mercados industriales, en los que la producción se decide antes de conocer el precio y se corrige de forma gradual.

- *Limitaciones*: da por hecho que lo producido se coloca siempre a su precio de demanda, con un mercado que se vacía en cada instante, y deja sin explicar cómo se llega a ese precio.

2.4.3. Ajuste con oferta rezagada: el modelo de la telaraña (Kaldor, 1934)

Origen: Nicholas Kaldor (1934) dio el nombre de *cobweb* al modelo con el que Ricci, Schultz y Tinbergen habían formalizado de forma independiente en 1930 las oscilaciones de los mercados agrarios.

Idea: con información imperfecta, el mercado puede tardar en ajustarse, porque a los productores les lleva tiempo adaptar lo que producen a los nuevos precios (cosechas, construcción, ganado). La oferta de cada periodo responde entonces al precio del periodo anterior, que era el conocido cuando se decidió cuánto producir, y no al vigente cuando se vende.

Razonamiento: con oferta rezagada, $X_t^s = S(p_{t-1})$, y demanda contemporánea, $X_t^d = D(p_t)$, el precio de cada periodo vacía el mercado para la cantidad decidida con el precio anterior. La secuencia de precios describe así una telaraña en torno al equilibrio, cuya forma depende de las elasticidades relativas:

- *Oferta relativamente rígida*: si la oferta es menos elástica que la demanda (más inclinada que ella en el plano (X, p)), las fluctuaciones se reducen y el precio converge al equilibrio en espiral.

- *Oferta relativamente elástica*: si es más elástica, las fluctuaciones se amplifican y el precio se aleja.

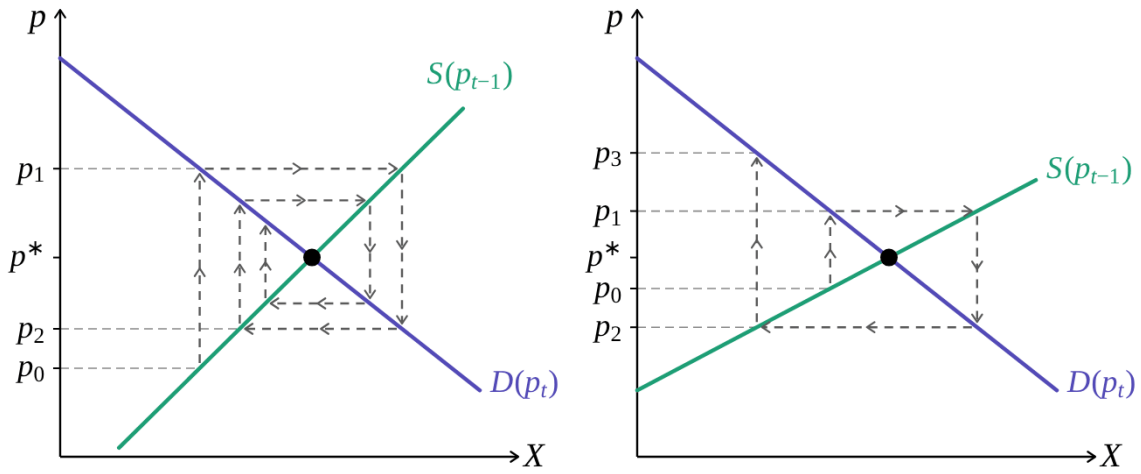
▪ *Elasticidades iguales*: si la oferta es tan elástica como la demanda, el precio oscila indefinidamente con la misma amplitud.

Desarrollo gráfico: el modelo de la telaraña se representa en el plano cantidad-precio (figura A16.4):

1. *Demanda*, $D(p_t)$: decrece con el precio corriente, al que se vende la cantidad ya producida.

2. *Oferta rezagada*, $S(p_{t-1})$: crece con el precio del periodo anterior, con el que se decidió cuánto producir.

3. *Equilibrio*: el corte de ambas curvas fija p^*. A su alrededor, la sucesión de precios $p_0, p_1, p_2, ...$ dibuja la telaraña, que converge cuando la oferta es más inclinada que la demanda (panel a) y diverge en el caso contrario (panel b).



(a) Oferta menos elástica: convergencia

(b) Oferta más elástica: divergencia

Figura A16.4: Modelo de la telaraña. Con la oferta rezagada, $S(p_{t-1})$, el precio oscila en torno a p^* $(p_0, p_1, p_2, ...)$. Si la oferta es menos elástica que la demanda (más inclinada en el plano (X, p)), las oscilaciones se amortiguan y el precio converge (panel a). Si es más elástica, se amplifican y el precio se aleja del equilibrio (panel b).

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el modelo es una primera aproximación a las fluctuaciones de los mercados en los que la cantidad ha de decidirse antes de observar el precio.

▪ *Limitaciones*: supone expectativas ingenuas (los productores esperan que se repita el precio pasado), lo que la hipótesis de expectativas racionales ha superado, pues si los productores anticipan el ciclo, lo eliminan (tema A06).

2.4.4. Comparación de los mecanismos

Los criterios de Walras y de Marshall pueden escribirse con las pendientes del plano (X, p), porque las derivadas de la demanda y de la oferta respecto al precio son las inversas de las pendientes de sus curvas, $D'(p) = 1/p'_d(X)$ y $S'(p) = 1/p'_s(X)$. La condición walrasiana equivale así a $(p'_s - p'_d)/(p'_d\,p'_s) < 0$ y la marshalliana a $p'_s - p'_d > 0$, y su relación depende del signo de las pendientes:

- *Signos contrarios*:

  - *Demanda decreciente y oferta creciente*: $p'_d\,p'_s < 0$ y ambos criterios se cumplen a la vez (el caso normal).

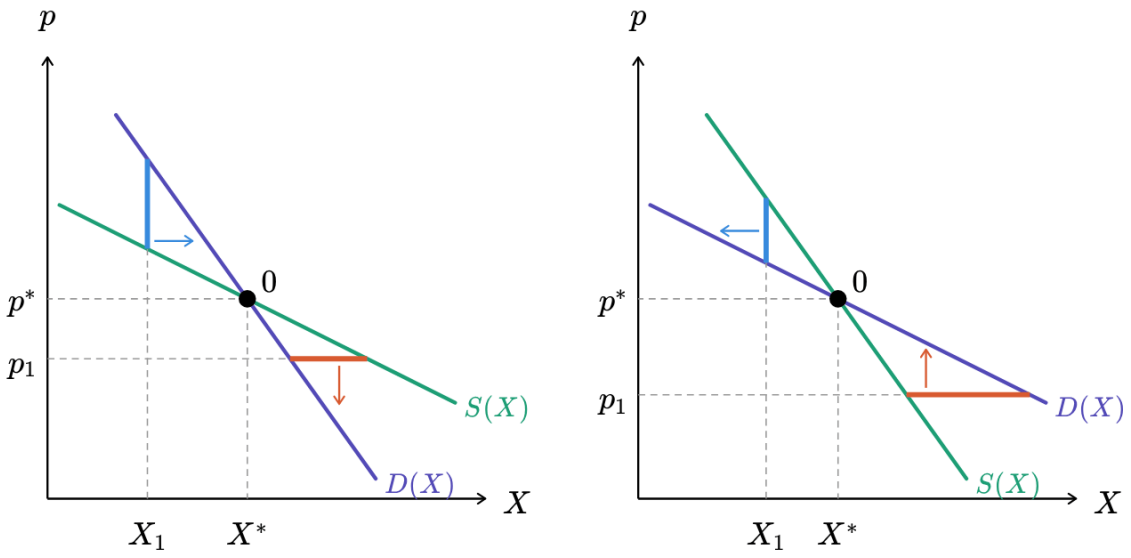
  - *Demanda creciente y oferta decreciente*: ambos fallarían y no existiría un equilibrio estable.

- *Mismo signo*:

  - *Ambas pendientes negativas*: $p'_d\,p'_s > 0$ y los criterios se excluyen, de modo que el equilibrio estable para Marshall es inestable para Walras y al revés.

    Así ocurre con la oferta decreciente de una industria con economías externas (apartado 3.2) o con el tramo que se vuelve hacia atrás de la oferta de trabajo. El equilibrio es estable para Marshall si la oferta es menos inclinada que la demanda y para Walras si lo es más (figura A16.5).

  - *Ambas pendientes positivas* (como con la demanda creciente de un bien Giffen): los criterios también se excluyen, pero con la lectura inversa, es decir, Marshall exige una oferta más inclinada que la demanda y Walras, menos inclinada.



(a) Oferta menos inclinada que la demanda
Marshall estable Walras inestable

(b) Oferta más inclinada que la demanda
Marshall inestable Walras estable

Figura A16.5: Estabilidad de Walras y de Marshall con oferta y demanda decrecientes. Si la oferta es menos inclinada que la demanda (panel a), el exceso de oferta a $p_1 < p^*$ hace bajar el precio y lo aleja de p^* (flecha vertical). En cambio, en $X_1 < X^*$ el precio de demanda supera al de oferta y la cantidad crece hacia X^* (flecha horizontal), de modo que el equilibrio es estable para Marshall e inestable para Walras. Si es más inclinada (panel b), ocurre lo contrario.

La discrepancia no es una paradoja, porque cada criterio describe una conducta distinta ante el desequilibrio, y cuál es relevante depende de cómo funcione cada mercado. El modelo de la telaraña es un tercer mecanismo, en tiempo discreto, con la oferta rezagada un periodo, cuya estabilidad también depende de las pendientes relativas, pues el precio converge cuando la oferta es más inclinada que la demanda.

2.5. Propiedades del equilibrio competitivo

Del análisis de los tres horizontes temporales y de las dinámicas de ajuste se deducen las propiedades generales del equilibrio competitivo, unas positivas (relativas a su existencia, su unicidad y su estabilidad) y otras normativas (relativas a su eficiencia).

2.5.1. Propiedades positivas

Un **equilibrio competitivo** es un precio y una asignación de cantidades tales que el precio es no negativo, cada consumidor maximiza su utilidad al precio dado, cada empresa maximiza su beneficio al precio dado, el mercado se vacía (la cantidad demandada iguala a la ofrecida) y, a largo plazo, la libre entrada y salida ha eliminado los beneficios extraordinarios.

Sobre esa definición se plantean tres cuestiones, la de si el equilibrio existe, la de si es único y la de si es estable.

1. *Existencia*: la cuestión es bajo qué condiciones hay al menos un precio que vacía el mercado, dadas las curvas de oferta y de demanda, que recogen la conducta óptima de los agentes precio-aceptantes.

Basta con que la oferta y la demanda de mercado sean continuas en el tramo relevante y con que la cantidad demandada supere a la ofrecida a precios bajos y quede por debajo de ella a precios altos. En ese caso, las dos curvas se cortan al menos una vez. Formalmente, el *exceso de demanda*, $Z_x(p_x) = D_x(p_x) - S_x(p_x)$, es entonces una función continua que cambia de signo y, por tanto, se anula en algún precio (teorema del valor intermedio de Bolzano)[22].

La continuidad, sin embargo, no está garantizada. La oferta de cada empresa tiene un salto en el precio de cierre, por debajo del cual la empresa no produce y su curva de oferta coincide con el eje de precios. Con muchas empresas pequeñas, el salto de cada una apenas se nota en la oferta de mercado, pero con pocas empresas grandes la demanda puede pasar por el hueco. Otro caso de no existencia es el del bien cuyo coste medio mínimo supera la disposición máxima a pagar de los consumidores. En él, oferta y demanda no se cortan para cantidades positivas y el bien no se produce.

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A16.6), si la oferta, S_x, y la demanda, D_x, son continuas, se cortan en el punto de equilibrio, con precio p_x^* y cantidad X^* (panel a). En cambio, si la oferta tiene un salto en $\hat{p}_x$, por debajo del cual no se ofrece nada y a partir del cual se ofrece al menos $\hat{X}$, la demanda puede pasar por el hueco sin cortarla. A precios inferiores a $\hat{p}_x$ hay entonces exceso de demanda y, desde $\hat{p}_x$, exceso de oferta, de modo que ningún precio vacía el mercado (panel b).

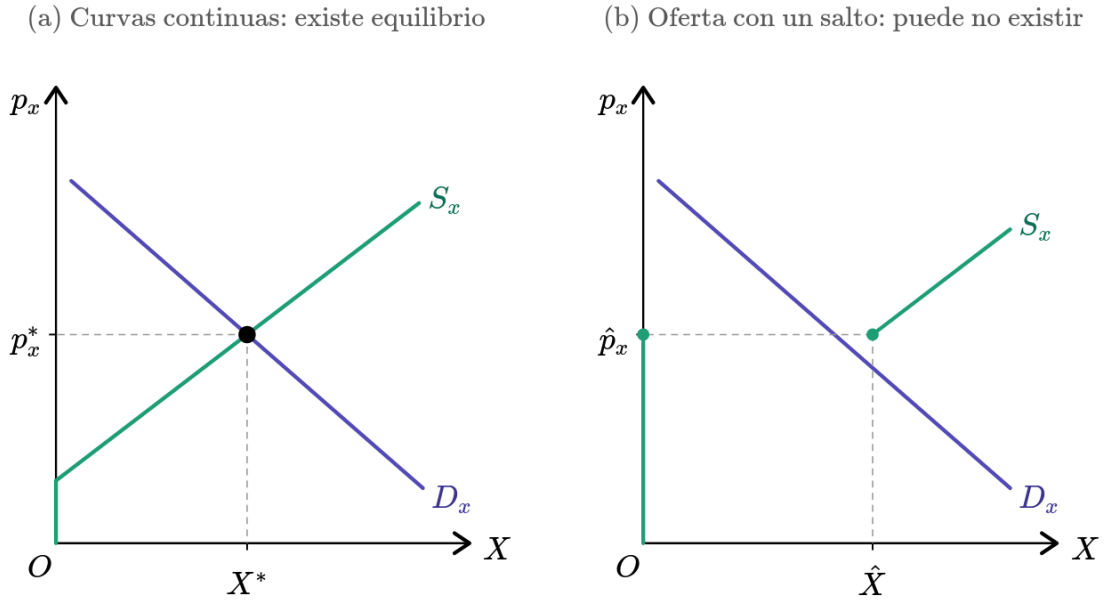


Figura A16.6: Existencia del equilibrio en un mercado. Si la oferta, S_x, y la demanda, D_x, son continuas, se cortan en el precio p_x^* y la cantidad X^* (panel a). Si la oferta tiene un salto en $\hat{p}_x$, de cero a $\hat{X}$, la demanda puede pasar por el hueco sin cortarla, y el equilibrio no existe (panel b).

[22] En el caso general de n mercados interdependientes, la demostración formal recurre al teorema del punto fijo de Brouwer.

2. *Unicidad*: en un solo mercado, basta con que la demanda sea decreciente y la oferta creciente en todo el tramo relevante, porque dos curvas monótonas de pendiente opuesta se cortan como mucho una vez. Con varios mercados, es demostrable si el exceso de demanda agregado cumple la propiedad de sustitutivos brutos. No obstante, la unicidad puede no darse, como en el mercado de trabajo neoclásico, que puede tener varios equilibrios porque, a partir de un salario alto, la oferta de trabajo se vuelve hacia atrás (*backward-bending*) cuando el efecto renta domina al efecto sustitución. Otro caso de no unicidad es el de los costes lineales, mientras que los rendimientos crecientes a escala (tecnología no convexa) comprometen la propia existencia del equilibrio competitivo (apartado 3.1).

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A16.7), una demanda decreciente y una oferta creciente se cortan una sola vez, y el equilibrio es único (panel a). Si la oferta no es monótona, porque se vuelve hacia atrás a partir de cierto precio, puede cortar a la demanda varias veces, en $p^*_{x,1}$, $p^*_{x,2}$ y $p^*_{x,3}$ (panel b).

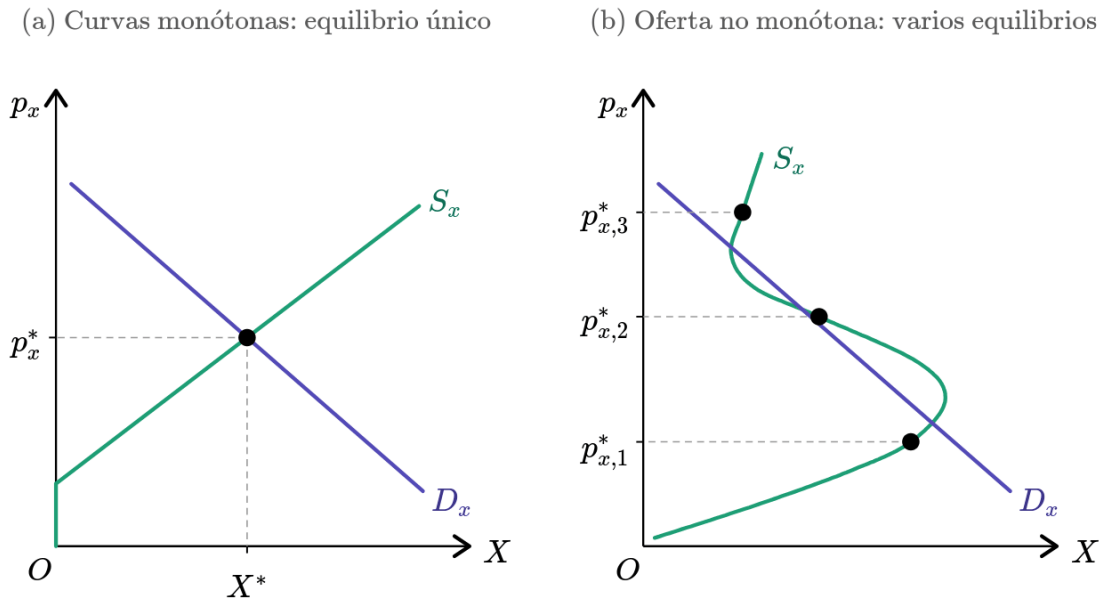


Figura A16.7: Unicidad del equilibrio en un mercado. Una demanda decreciente, D_x, y una oferta creciente, S_x, se cortan una sola vez y el equilibrio es único (panel a). Si la oferta no es monótona, como la que se vuelve hacia atrás, puede cortar a la demanda varias veces, en $p^*_{x,1}$, $p^*_{x,2}$ y $p^*_{x,3}$ (panel b).

3. *Estabilidad*: un equilibrio es **estable** si, cuando el mercado se separa de él, su dinámica de ajuste lo devuelve a esa posición. La estabilidad es *local* si solo se garantiza en un entorno del equilibrio y *global* si se cumple desde cualquier posición inicial.

La condición de estabilidad depende de la dinámica de ajuste (apartado 2.4). Con el ajuste walrasiano, el exceso de demanda ha de decrecer con el precio, $D'(p^*) - S'(p^*) < 0$. Con el ajuste marshalliano, la oferta ha de cortar a la demanda desde abajo, $p'_s(X^*) > p'_d(X^*)$. Con la oferta rezagada de la telaraña, la oferta ha de ser menos elástica que la demanda. Las dos primeras condiciones se cumplen siempre con una demanda decreciente y una oferta creciente, y solo se excluyen entre sí cuando las dos curvas tienen pendiente del mismo signo (figura A16.5).

La estabilidad importa, además, para la estática comparativa. Por el principio de correspondencia, la condición de estabilidad da signo al efecto de una perturbación. En un equilibrio inestable, en cambio, la estática comparativa pierde sentido, porque el mercado no se desplaza al nuevo equilibrio.

2.5.2. Propiedades normativas: teoremas fundamentales del bienestar

Excedente total: el análisis marshalliano del bienestar demuestra que en competencia perfecta la suma del excedente del consumidor y del productor se maximiza en la cantidad X^* en la que el precio de demanda iguala al coste marginal, $p_d(X^*) = \text{Cmg}(X^*)$. Esa cantidad es la del equilibrio competitivo. Con una cantidad menor se dejan de producir unidades que los consumidores valoran por encima de su coste, y con una mayor, las unidades adicionales cuestan más de lo que valen para ellos.

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A16.8), el excedente del consumidor (EC) es el área entre la demanda, $D(X)$, y el precio p^*, y el del productor (EP), el área entre p^* y la oferta, $S(X) = \text{Cmg}(X)$. Su suma es máxima en X^* (panel a). Con $X' < X^*$, se pierde el triángulo comprendido entre ambas curvas desde X' hasta X^* (panel b).

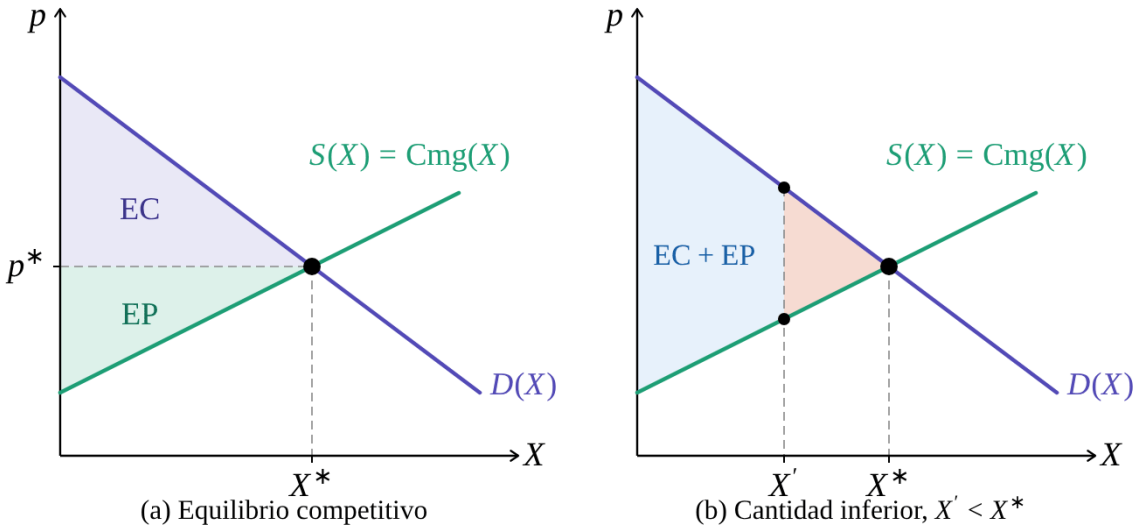


Figura A16.8: Excedente total. En el equilibrio competitivo, X^*, la suma del excedente del consumidor (EC) y del productor (EP) es máxima (panel a). Con una cantidad menor, X', se pierde el triángulo rojo comprendido entre la demanda y la oferta (panel b).

Primer teorema (1TFEB): con preferencias localmente no saciables y sin fallos de mercado, todo equilibrio competitivo (p^*, x^*) es una asignación eficiente en el sentido de Pareto.

El teorema se ha visto como la formalización de la mano invisible de Adam Smith, si bien referida a la optimalidad paretiana y no necesariamente a la optimalidad social. De él se siguen cuatro corolarios:

1. *No desperdicio de recursos*: el equilibrio competitivo es eficiente, aunque no sea necesariamente equitativo.

2. *Guía de política económica*: la competencia perfecta garantiza la eficiencia y sirve de referencia a los decisores públicos.

3. *Economiza información*: cada agente solo necesita conocer los precios para tomar sus decisiones y alcanzar el óptimo.

4. *Intervención estatal*: el incumplimiento de las condiciones del teorema (los fallos de mercado) justifica la intervención del Estado por motivos de eficiencia.

Segundo teorema (2TFEB): bajo ciertas condiciones (convexidad de preferencias y tecnologías), cualquier óptimo de Pareto puede alcanzarse como equilibrio competitivo tras una redistribución adecuada de las dotaciones iniciales mediante transferencias de suma fija.

Su corolario central es que pueden separarse la eficiencia y la equidad, ya que un planificador benevolente puede corregir la distribución con transferencias de suma fija y dejar después que el mercado asigne eficientemente. Sin embargo, en la práctica, la separación choca con la falta de transferencias que no distorsionen (tema A22, apartado 2.2, con su representación en la caja de Edgeworth).

2.6. Conclusiones

La capacidad de ajuste de la oferta decide qué lado del mercado fija el precio en cada horizonte. En el periodo de mercado lo fija la demanda y a corto plazo, la oferta y la demanda. A largo plazo, con precios de los factores constantes, el precio depende solo de los costes, y la demanda determina la cantidad mediante la entrada y la salida de empresas. La estática comparativa de esos equilibrios solo tiene sentido si son estables, y los criterios de Walras y de Marshall, que coinciden en el caso normal, se excluyen cuando las dos pendientes tienen el mismo signo. Con la oferta rezagada de la telaraña, el precio converge solo si la oferta es menos elástica que la demanda. La continuidad de la oferta y la demanda en el tramo relevante, con exceso de demanda a precios bajos y exceso de oferta a precios altos, asegura la existencia del equilibrio, y una demanda decreciente con una oferta creciente, su unicidad. Ese equilibrio maximiza el excedente total y, sin fallos de mercado, es eficiente en el sentido de Pareto. El apartado 3 relaja los supuestos en que descansan estos resultados.

3. Extensiones

Los resultados anteriores descansan en supuestos sobre la tecnología, los precios de los factores y el funcionamiento del mecanismo de precios. Las extensiones siguientes los relajan por ese orden, y la última reúne otros desarrollos.

3.1. Tecnología: ausencia de rendimientos mixtos

Las primeras extensiones consideran otros tipos de rendimientos a escala, con competencia perfecta en el mercado de factores productivos (precios de los factores constantes) y tecnología homogénea.

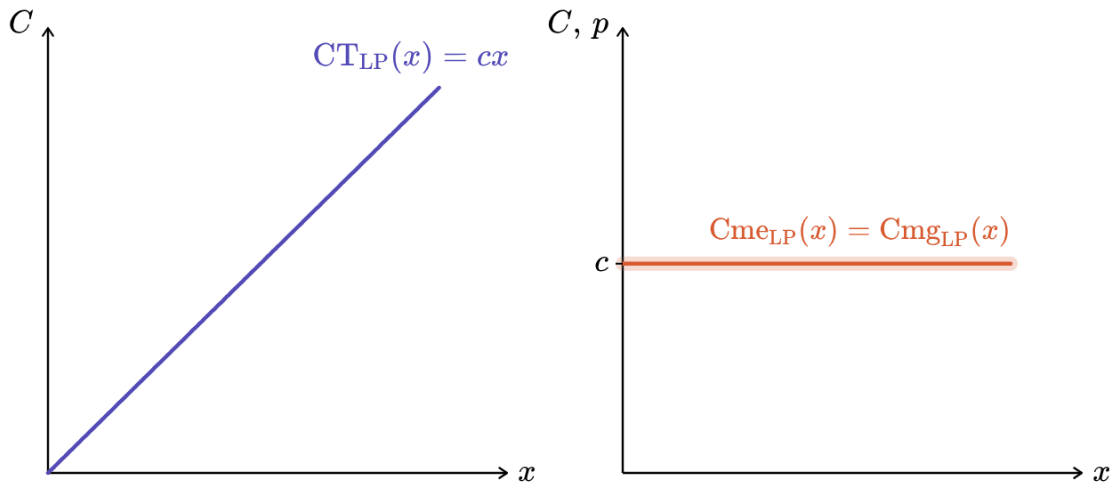
Rendimientos constantes: la curva $\mathrm{CT}_{\mathrm{LP}}$ es ascendente y recta en el plano (x, C) (p. ej. $\mathrm{CT}(x) = cx$).

Las curvas $\mathrm{Cme}_{\mathrm{LP}}$ y $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{LP}}$ son horizontales (perfectamente elásticas), rectas y superpuestas, pues no existen ni economías ni deseconomías de escala ($\varepsilon_{Cx} = 1$).

Las curvas de coste a corto plazo mantienen su habitual forma de U, y las de oferta a corto plazo son imperfectamente elásticas, ascendentes y convexas.

A largo plazo, en cambio, la curva de oferta es infinitamente elástica. Por ello, caben múltiples equilibrios, equivalentes para el excedente de los consumidores y los beneficios individuales, y el modelo deja indeterminados el tamaño de cada empresa y cuántas operan, aunque todas compartan tecnología.

Gráficamente, en los planos cantidad-coste total y cantidad-coste unitario (figura A16.9), $\mathrm{CT}_{\mathrm{LP}}(x)$ es una recta que parte del origen, y $\mathrm{Cme}_{\mathrm{LP}}(x)$ y $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{LP}}(x)$ coinciden en una horizontal de altura c, que es a la vez la oferta de la empresa.



(a) Coste total

(b) Costes medio y marginal

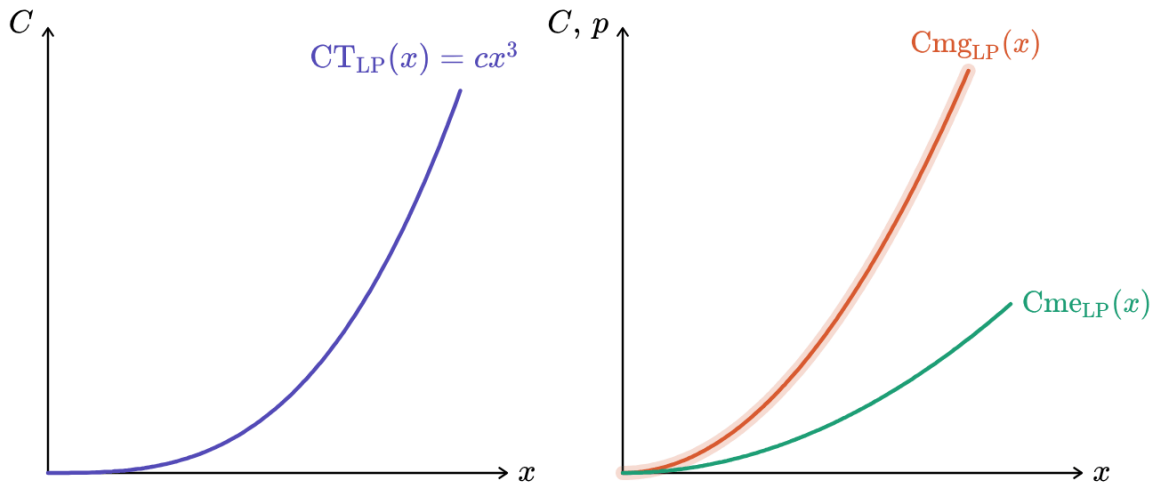
Figura A16.9: Rendimientos constantes a escala. El coste total a largo plazo es una recta que parte del origen (panel a), y los costes medio y marginal coinciden en una horizontal de altura c, que es la oferta de la empresa (panel b).

Rendimientos decrecientes: la curva $\mathrm{CT}_{\mathrm{LP}}$ es ascendente y convexa (p. ej. $\mathrm{CT}(x) = cx^3$).

Las curvas $\mathrm{Cme}_{\mathrm{LP}}$ y $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{LP}}$ son ascendentes, con $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{LP}}$ siempre por encima de $\mathrm{Cme}_{\mathrm{LP}}$, es decir, existen deseconomías de escala ($\varepsilon_{Cx} > 1$). La curva de oferta a largo plazo de la empresa es, por tanto, imperfectamente elástica y ascendente.

Como el coste marginal está siempre por encima del medio, la regla competitiva $p = \mathrm{Cmg}(x)$ genera beneficios y atrae entrantes sin límite. Por ello, en equilibrio operan infinitas empresas, cada una con producción infinitesimal, y la asignación es un óptimo de Pareto.

Gráficamente, en los planos cantidad-coste total y cantidad-coste unitario (figura A16.10), $\mathrm{CT}_{\mathrm{LP}}(x)$ es convexa, y el coste marginal crece desde el origen por encima del medio. La oferta de la empresa es toda la curva $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{LP}}(x)$.



(a) Coste total

(b) Costes medio y marginal

Figura A16.10: Rendimientos decrecientes a escala. El coste total a largo plazo es convexo (panel a), y el coste marginal crece por encima del coste medio, de modo que la oferta de la empresa es toda la curva de coste marginal (panel b).

Rendimientos crecientes: la curva $\mathrm{CT}_{\mathrm{LP}}$ es ascendente y cóncava (p. ej. $\mathrm{CT}(x) = cx^{1/2}$).

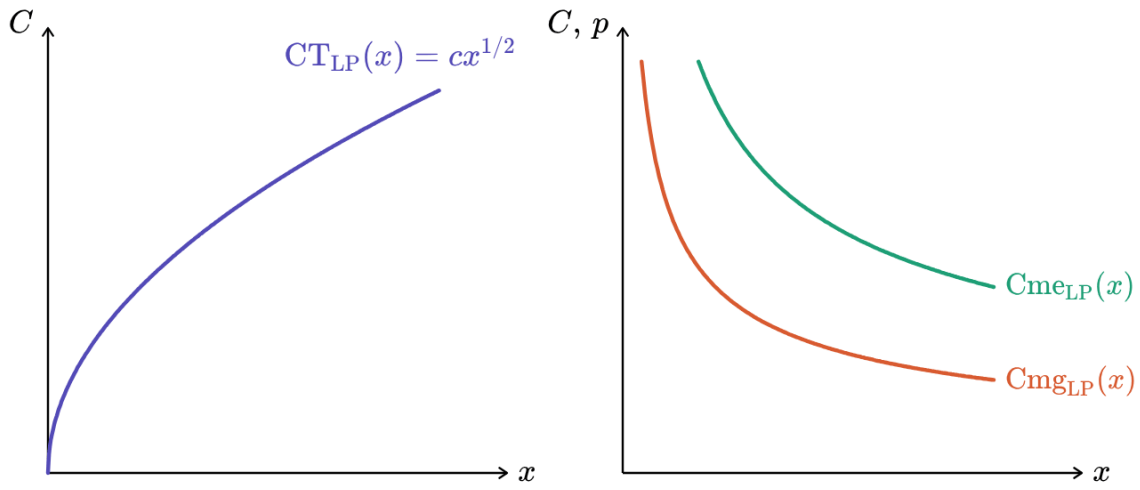
Las curvas $\mathrm{Cme}_{\mathrm{LP}}$ y $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{LP}}$ son decrecientes y convexas, con $\mathrm{Cme}_{\mathrm{LP}}$ siempre por encima de $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{LP}}$, lo que equivale a economías de escala ($\varepsilon_{Cx} < 1$).

En este caso no se cumple la CSO del problema competitivo[23], porque el equilibrio no se da en el tramo creciente del coste marginal. Además, aplicar la regla competitiva $p = \mathrm{Cmg}(x)$ conlleva pérdidas, por lo que las empresas irán abandonando el mercado hasta que solo permanezca un productor (monopolio natural) con capacidad para subir el precio al menos hasta el coste medio.

El resultado es una ineficiencia asignativa (se produce menos y a un mayor precio que con la regla $p = \mathrm{Cmg}$), acompañada de explotación monopolística de los factores productivos (que se retribuyen por debajo del valor de su productividad marginal).

Gráficamente, en los planos cantidad-coste total y cantidad-coste unitario (figura A16.11), $\mathrm{CT}_{\mathrm{LP}}(x)$ es cóncava, y los costes medio y marginal decrecen, con el marginal siempre por debajo del medio. Al no haber tramo creciente de $\mathrm{Cmg}_{\mathrm{LP}}(x)$, no existe curva de oferta competitiva.

[23] En el caso no competitivo sí se puede cumplir, ya que la CSO únicamente exige que la pendiente de la curva Cmg sea superior a la de Img, lo cual se puede dar para tramos en los que la curva Cmg es decreciente.



(a) Coste total

(b) Costes medio y marginal

Figura A16.11: Rendimientos crecientes a escala. El coste total a largo plazo es cóncavo (panel a), y los costes medio y marginal decrecen, con el marginal siempre por debajo del medio (panel b). No hay tramo creciente del coste marginal que sirva de oferta.

3.2. Precios de factores variables: externalidades pecuniarias

Si la producción agregada altera los precios de los factores[24], caben dos casos:

Deseconomías de escala externas: externas a la empresa pero internas a la industria, consisten en el aumento del coste medio de las empresas conforme aumenta la producción agregada.

Se producen por la escasez de factores productivos, cuyo precio sube con la producción agregada (externalidad pecuniaria), por externalidades tecnológicas negativas como la saturación de infraestructuras (congestión en las cadenas de suministro) o por la contaminación[25].

Gráficamente, en el plano cantidad-precio de la industria y en el plano cantidad-coste de la empresa (figura A16.12), el ajuste sigue tres pasos:

1. *Corto plazo*: una subida de la demanda de mercado, de $D_0(X)$ a $D_1(X)$, eleva el precio de p_0 a $p_{0'}$ y la cantidad ofertada en el mercado de X_0 a $X_{0'}$. El mercado pasa del punto inicial 0, con beneficios nulos, a un nuevo equilibrio en el punto $0'$, con beneficios extraordinarios.

2. *Transición*: los beneficios extraordinarios atraen entrantes ($\uparrow n$), que elevan la demanda de factores ($\uparrow D_z$) y su precio ($\uparrow p^z$). Las curvas de costes de la empresa se desplazan hacia arriba, de $\mathrm{Cme}_0(x)$ y $\mathrm{Cmg}_0(x)$ a $\mathrm{Cme}_1(x)$ y $\mathrm{Cmg}_1(x)$.

[24] Viner (1931) distinguió entre economías y deseconomías externas tecnológicas y pecuniarias.
[25] No la contaminación *per se*, sino los impuestos, multas y regulaciones que genera.

3. *Largo plazo*: la entrada de empresas desplaza hacia la derecha la curva de oferta de mercado a corto plazo, de $S_0(X)$ a $S_1(X)$, pese a la subida de los costes, hasta el punto 1. En ese punto el precio de equilibrio, p_1, coincide con el mínimo del nuevo coste medio, $\text{Cme}_1(x)$, y solo existen beneficios nulos. La dimensión óptima resultante puede ser mayor, menor o igual que la de partida. La curva de oferta LP de la industria, $S_{\text{LP}}(X)$, que une los puntos 0 y 1, tiene, por tanto, pendiente positiva en el plano (X, p).

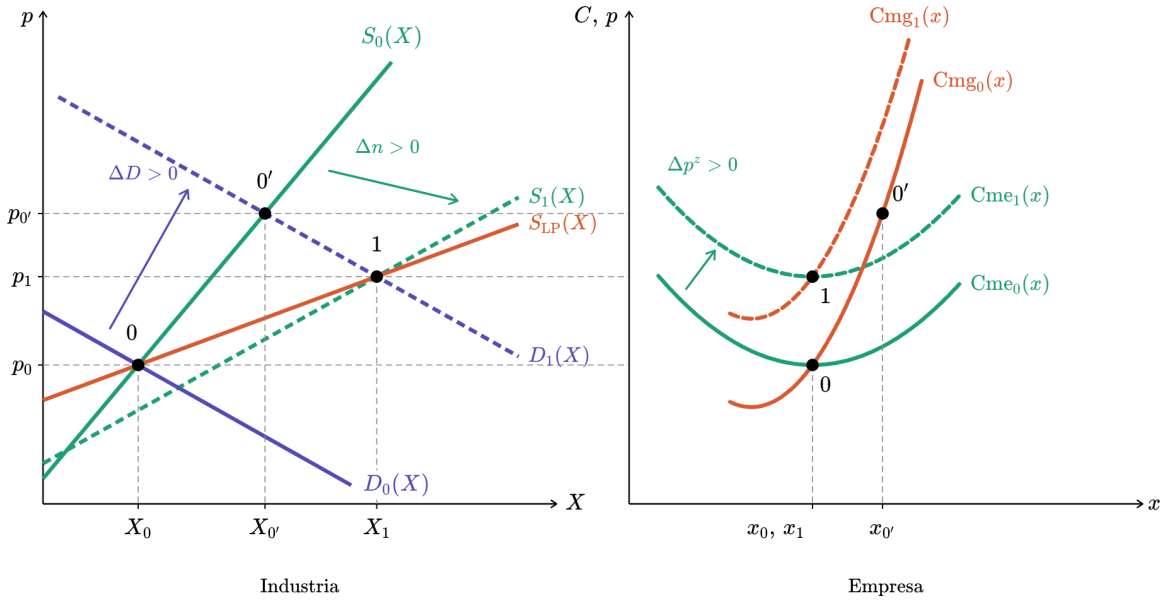


Figura A16.12: Industria de costes crecientes. Al crecer la industria se encarecen sus factores y la oferta a largo plazo resulta creciente.

Economías de escala externas: externas a la empresa, aunque internas a la industria, aparecen si el coste medio de las empresas de la industria se reduce al aumentar la producción agregada. Suelen deberse a la proximidad espacial de las empresas (economías de aglomeración), porque un clúster permite ahorrar costes de transporte, almacenamiento y suministro y aprovechar el desbordamiento de conocimientos.

Gráficamente, en el plano cantidad-precio de la industria y en el plano cantidad-coste de la empresa (figura A16.13), el razonamiento es el inverso. La entrada de empresas ($\Delta n > 0$) abarata los factores ($\Delta p^z < 0$), las curvas de costes se desplazan hacia abajo, de $\text{Cmg}_0(x)$ y $\text{Cme}_0(x)$ a $\text{Cmg}_1(x)$ y $\text{Cme}_1(x)$, y el nuevo equilibrio a largo plazo (punto 1) tiene un precio p_1 inferior al inicial, p_0. Por tanto, la curva de oferta LP, $S_{\text{LP}}(X)$, es decreciente. De ahí el argumento de la industria naciente, que propone proteger a la industria nacional hasta que su expansión reduzca sus costes medios al nivel internacional.

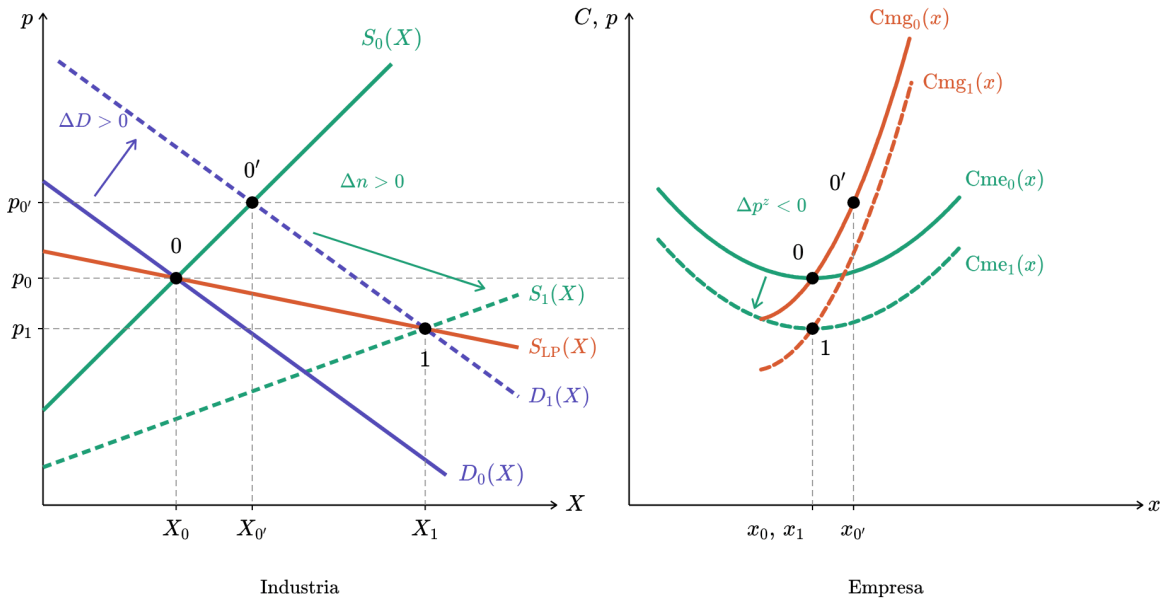


Figura A16.13: Industria de costes decrecientes. Con economías externas, la producción de cada empresa se abarata y la oferta a largo plazo resulta decreciente.

En resumen, la pendiente de la oferta LP depende de la capacidad de la industria para alterar el precio de los factores productivos:

- *Sin capacidad para alterarlo*: la oferta LP tendrá pendiente nula (horizontal).
- *Capacidad para aumentarlo* (deseconomías externas): la oferta LP tendrá pendiente positiva.
- *Capacidad para disminuirlo* (economías externas): la oferta LP tendrá pendiente negativa. Las economías externas son, además, mucho más difíciles de medir, y por ello de regular, que las internas.

3.3. Mecanismo de precios

El modelo supone que el precio se forma libremente y transmite sin fricción toda la información relevante. Las extensiones siguientes relajan ese supuesto en tres direcciones: la intervención sobre el precio, los costes de usar el mercado y la información asimétrica.

3.3.1. Controles de precios

Origen: el análisis de los controles de precios es la primera aplicación clásica del modelo de oferta y demanda en la tradición marshalliana.

Idea: el sector público puede impedir que el precio se forme libremente fijando un *precio máximo* por debajo del de equilibrio (alquileres, bienes básicos en tiempos de escasez) o un *precio mínimo* por encima (salario mínimo, precios de garantía agrarios). En ambos casos el precio deja de cumplir su función de vaciado.

Razonamiento:

- *Precio máximo*: con un precio máximo, $p_{\max}$, inferior al de equilibrio, p^*, aparece un exceso de demanda, $D(p_{\max}) - S(p_{\max})$, que el precio no puede eliminar. La cantidad intercambiada es la ofrecida a ese precio, $S(p_{\max})$, menor que la de equilibrio, y el bien se raciona por otras vías: colas, asignación administrativa, deterioro de la calidad o mercados negros.

- *Precio mínimo*: con un precio mínimo, $p_{\min}$, superior a p^*, el razonamiento es simétrico. Los consumidores compran solo $D(p_{\min})$, y el exceso de oferta, $S(p_{\min}) - D(p_{\min})$, ha de absorberse con compras públicas, cuotas de producción o, si el bien es el trabajo, desempleo.

En ambos casos la pérdida de bienestar es, como mínimo, el triángulo entre demanda y oferta comprendido entre la nueva cantidad y la de equilibrio, como en el impuesto, pero sin recaudación.

El control de precios sustituye el racionamiento por precio por otro mecanismo menos eficiente y no necesariamente más equitativo, pues el bien no va a quien más lo valora sino a quien llega antes. La intervención puede justificarse por razones distributivas, pero el modelo fija el coste de eficiencia que la intervención ha de compensar (tema A20).

Desarrollo gráfico: los controles de precios se representan en el plano cantidad-precio (figura A16.14):

1. *Demanda y oferta*, $D(X)$ y $S(X)$: sin control, se cortan en el punto 0, el equilibrio (X^*, p^*).

2. *Precio máximo*, $p_{\max}$ (panel a): es una recta horizontal por debajo de p^*. La distancia entre $S(p_{\max})$ y $D(p_{\max})$ es el exceso de demanda.

3. *Precio mínimo*, $p_{\min}$ (panel b): es una recta horizontal por encima de p^*. La distancia entre $D(p_{\min})$ y $S(p_{\min})$ es el exceso de oferta.

4. *Equilibrio*: con el control se intercambia la cantidad del lado corto del mercado (punto 1), $S(p_{\max})$ en el panel a y $D(p_{\min})$ en el panel b. El triángulo rojo entre la demanda y la oferta, desde esa cantidad hasta X^*, es la pérdida de bienestar.

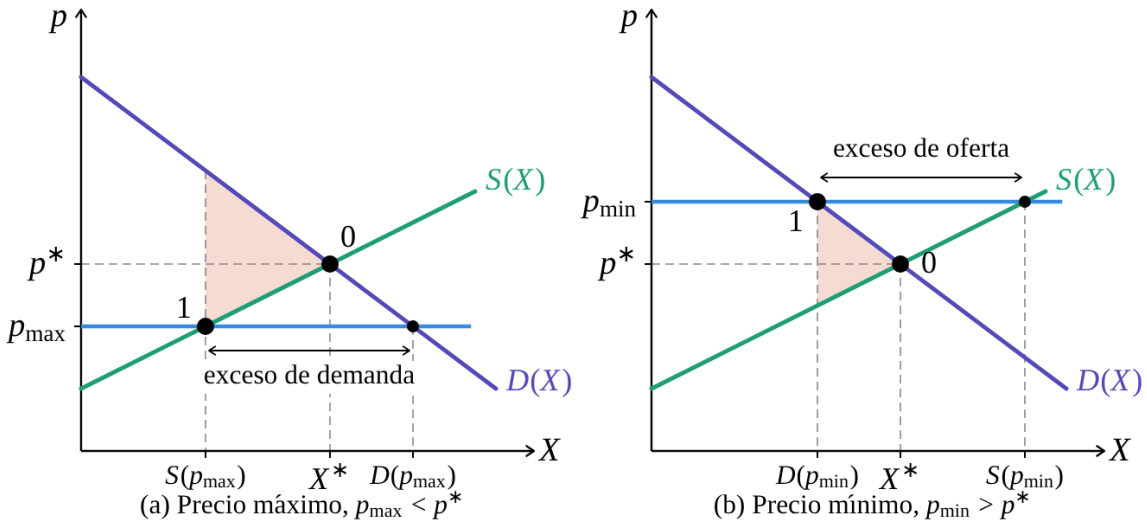


Figura A16.14: Controles de precios. Un precio máximo, $p_{\max} < p^*$, crea un exceso de demanda y reduce la cantidad intercambiada a $S(p_{\max})$ (panel a). Un precio mínimo, $p_{\min} > p^*$, crea un exceso de oferta y reduce la cantidad comprada a $D(p_{\min})$ (panel b). Los triángulos rojos son la pérdida de bienestar.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: con el instrumental básico de oferta y demanda, el modelo predice la escasez o el excedente que genera el control y las formas de racionamiento que lo acompañan, y cuantifica su coste de eficiencia.

▪ *Limitaciones*: supone competencia perfecta y equilibrio parcial. Con poder de mercado del lado de la demanda, como el monopsonio en el mercado de trabajo, un precio mínimo moderado puede aumentar la cantidad intercambiada (tema A17, apartado 3.1). Además, el triángulo no recoge los recursos que consume el racionamiento, como el tiempo de las colas.

3.3.2. Costes de transacción (Coase, 1937)

Origen: el concepto procede de Coase (*The Nature of the Firm*, 1937), que lo usó para explicar la existencia de la empresa. En la teoría de mercados se incorpora como una cuña entre precios.

Idea: usar el mercado no es gratuito, sino que comprar y vender exige buscar a la contraparte, informarse, negociar y asegurar el cumplimiento, y cada paso consume recursos, mientras que el modelo básico supone nulos esos costes.

Razonamiento: cuando existen, los costes de transacción abren una cuña entre el precio que paga el comprador y el que recibe el vendedor, como un impuesto específico. Así, la cantidad intercambiada se reduce, la carga se reparte según las elasticidades y la pérdida de bienestar tiene la misma forma triangular.

La diferencia está, sin embargo, en el destino de la cuña. El impuesto es una transferencia, mientras que el coste de transacción es un consumo real de recursos o la remuneración de un intermediario.

Los costes de transacción explican la existencia de intermediarios, que cobran la cuña a cambio de reducirla, como en los mercados financieros. Explican también la existencia de la empresa, que organiza dentro de sí las transacciones que el mercado haría más costosas (tema A15), y la ausencia de mercados para bienes cuyos costes de transacción superan las ganancias del intercambio (tema A23).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: incorpora al modelo de oferta y demanda, con el mismo instrumental que el impuesto, un concepto procedente de la teoría de la empresa, y separa con claridad la cuña que es una transferencia de la que consume recursos reales.

- *Limitaciones*: trata el coste de transacción como una cuña exógena y proporcional a la cantidad, cuando muchos de estos costes son fijos por operación o dependen de las instituciones y de la forma de los contratos. Además, su medición directa es difícil.

3.3.3. Información asimétrica: el racionamiento del crédito (Stiglitz y Weiss, 1981)

Origen: Joseph Stiglitz y Andrew Weiss (1981) mostraron que con información asimétrica el precio puede dejar de señalar el valor marginal del bien, y que el mercado puede entonces no vaciarse por decisión de los propios oferentes.

Idea: en el mercado de crédito el tipo de interés es el precio, pero también informa al prestamista sobre la calidad de los prestatarios. Subirlo expulsa a los proyectos seguros (selección adversa) y empuja a los prestatarios restantes hacia proyectos más arriesgados (riesgo moral), de modo que a partir de cierto nivel el rendimiento esperado del banco disminuye al subir el tipo.

Razonamiento: el banco prefiere racionar el crédito a un tipo inferior al que vaciaría el mercado antes que subirlo, y existe un equilibrio con exceso de demanda de crédito (temas A13 y B26, y figura del tema A42, apartado 2.3.1).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica que un mercado no se vacíe en equilibrio sin recurrir a rigideces de precios, porque el propio tipo de interés empeora la calidad media de los préstamos, y da un fundamento microeconómico al canal del crédito de la política monetaria.

- *Limitaciones*: el racionamiento depende de que los bancos no puedan discriminar entre prestatarios, cuando en la práctica exigen garantías que revelan parcialmente su riesgo y atenúan la asimetría. Además, es un modelo estático de equilibrio parcial, cuyas consecuencias macroeconómicas se estudian en el tema A42, apartado 2.3.1.

3.4. Otras extensiones

Barreras a la entrada a largo plazo: si existen, la empresa sigue igualando el precio al coste marginal, pero, como a corto plazo, pueden persistir beneficios extraordinarios (las pérdidas, solo si hay además barreras de salida). De ahí parten las estructuras con poder de mercado (temas A15 y A17).

Poder de mercado: cuando la empresa no es precio-aceptante puede fijar un margen (*mark-up*) sobre el coste marginal, medido por el índice de Lerner, cualquiera que sea la estructura de mercado en la que lo ejerza (temas A17 a A19).

Renta ricardiana (Ricardo, 1817): el excedente sobre su coste de oportunidad que obtienen los propietarios de recursos escasos o únicos.

El ejemplo paradigmático es la propiedad de la tierra. La curva de oferta tiene pendiente positiva en el plano (X, p), porque a precios bajos solo se cultivan las tierras fértiles, de menor coste, y al subir el precio resulta rentable cultivar también las pobres. La libre entrada no erosiona la renta de los propietarios, pues poseen un recurso único.

Economía abierta: el modelo muestra cómo los obstáculos al libre comercio (aranceles, cuotas y restricciones no cuantitativas) reducen las transacciones mutuamente beneficiosas y redistribuyen renta entre las partes. En particular, las restricciones no cuantitativas (inspecciones, requisitos de calidad) imponen costes y retrasos que actúan como un "arancel implícito" sobre las importaciones (temas B07 y B08).

Equilibrio general: trata los mercados interrelacionados y complementa el enfoque parcial. Resulta más adecuado para el mercado de trabajo, con efectos sobre muchos otros mercados, mientras que el parcial basta para las medidas antimonopolio (tema A21).

Conclusiones

La competencia perfecta es el caso de referencia de la teoría de mercados. Con agentes precio-aceptantes, la decisión de la empresa se reduce a igualar el precio al coste marginal (eficiencia asignativa), y la función de beneficio resume, por el lema de Hotelling, su oferta y sus demandas de factores. El análisis temporal muestra cómo cambia el papel del precio a medida que la oferta gana capacidad de respuesta. En concreto, el precio pasa de racionar una cantidad dada en el periodo de mercado a orientar la producción a corto plazo y, con libre entrada, a asignar los recursos entre industrias hasta que el beneficio se anula en el mínimo del coste medio (eficiencia productiva). El equilibrio es eficiente en el sentido de Pareto, y, con preferencias y tecnologías convexas, cualquier óptimo puede alcanzarse con transferencias de suma fija. Aunque es una estructura ideal, la competencia perfecta se aproxima bien a mercados como los de *commodities* o los de valores y sirve de patrón para las demás estructuras y para la política de competencia.

La competencia perfecta reúne la demanda de mercado, que procede de la teoría del consumidor y de la dualidad (temas A08 y A09), y la oferta, a la que dan forma la tecnología y los costes (temas A11 y A12). Su valor como referencia se aprecia al relajar sus supuestos. Los rendimientos crecientes y las barreras a la entrada conducen al monopolio (tema A17), la diferenciación del producto a la competencia monopolística (tema A18) y la interdependencia estratégica al oligopolio (tema A19). En sentido opuesto, el equilibrio general extiende a todos los mercados el análisis de la existencia y la estabilidad (tema A21), y los teoremas del bienestar precisan cuándo la competencia es eficiente y cuándo falla (temas A22 y A23).

El supuesto de precio-aceptación es hoy objeto de debate empírico. De Loecker, Eeckhout y Unger (2020) estiman con datos de empresas cotizadas que los márgenes sobre el coste marginal han aumentado en Estados Unidos desde 1980, sobre todo en las empresas con márgenes más altos. Medir esos márgenes exige, no obstante, supuestos discutidos (Basu, 2019). En el mercado de factores, la literatura reciente sobre el monopsonio sostiene que muchas empresas se enfrentan a ofertas de trabajo de elasticidad finita (Manning, 2021), lo que cambia el análisis del salario mínimo (apartado 3.3.1).

Anexo. Ejemplos resueltos

Ejemplo: oferta de la empresa y del mercado a corto y a largo plazo

Cada empresa tiene la función de costes $\mathrm{CT}(x) = 16 + x^2$. A corto plazo, el coste de 16 es fijo y hundido, de modo que $\mathrm{Cmg} = 2x$ y $\mathrm{CVme} = x$. El mínimo de explotación está en $x_{\mathrm{ME}} = 0$, el precio de cierre es nulo y la oferta individual es $x^s = p/2$ para todo $p \geq 0$. A largo plazo todos los costes son evitables, y el $\mathrm{Cme} = 16/x + x$ alcanza su mínimo, el óptimo de explotación, en $x_{\mathrm{OE}} = 4$, con $\mathrm{Cme} = 8$. La empresa solo ofrece a largo plazo si $p \geq 8$.

Con la demanda de mercado $D(p) = 400 - 20p$, el equilibrio de largo plazo exige $p = \mathrm{Cmg} = \mathrm{Cme} = 8$. Se demandan $X = 240$ unidades y, como cada empresa produce 4, hay $n = 60$ empresas. Si la demanda aumenta a $D(p) = 520 - 20p$, a corto plazo el número de empresas es fijo y la oferta de mercado es la suma horizontal $S(p) = 60 \cdot p/2 = 30p$. El equilibrio, $520 - 20p = 30p$, da $p = 10{,}4$, $X = 312$ y $x = 5{,}2$ por empresa, con un beneficio de $10{,}4 \cdot 5{,}2 - (16 + 5{,}2^2) = 11{,}04$.

Ese beneficio atrae la entrada, que desplaza la oferta de corto plazo hasta que el precio vuelve a 8. En el nuevo equilibrio de largo plazo se venden $X = 520 - 160 = 360$ unidades y hay $n = 90$ empresas, cada una en su óptimo de explotación. Con precios de los factores constantes, la oferta de largo plazo de la industria es horizontal en $p = 8$, y el aumento de la demanda solo cambia la cantidad (apartado 2.3.2).

A17. Monopolio

Análisis de mercados (II). Teoría del monopolio. Discriminación de precios. Monopolio natural. Producción conjunta. Análisis de eficiencia y bienestar. Monopsonio. Monopolio bilateral.

Introducción

> **Introducción común.** Los temas A15 a A21 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A15**. Ordena los mercados en cuatro estructuras según el poder de mercado (competencia perfecta, competencia monopolística, oligopolio y monopolio) y resume la evolución de su análisis, de Cournot y Marshall a la nueva organización industrial y la teoría de la regulación.

El **monopolio**, con un único vendedor protegido por barreras a la entrada, es la referencia opuesta a la competencia perfecta (tema A16). Aquí la empresa ya no toma el precio como dado, sino que es el mercado y fija un precio superior al coste marginal a costa de restringir la producción.

Cournot (1838) resolvió por primera vez el problema del monopolista, que elige la cantidad o el precio que maximiza su beneficio sabiendo que se enfrenta a toda la demanda del mercado. El margen sobre el coste marginal depende de la elasticidad de esa demanda, y el **índice de Lerner** mide con él el poder de mercado. El monopolio surge de **barreras a la entrada** legales, como las patentes y las concesiones, técnicas, como las economías de escala que hacen de una sola empresa la opción más barata (el **monopolio natural**), o estratégicas.

Su coste social tiene dos partes. La primera es la **pérdida irrecuperable de eficiencia**, el triángulo de Harberger, que corresponde a los intercambios que dejan de hacerse porque el precio supera el coste marginal. La segunda, que señalaron Tullock (1967) y Posner (1975), es la **búsqueda de rentas**, los recursos que las empresas gastan en obtener o defender su posición de monopolio. Ambas justifican la política de defensa de la competencia y la regulación de sectores como la energía, el agua o las telecomunicaciones.

La **discriminación de precios**, que cobra precios distintos según la disposición a pagar de cada consumidor, permite además al monopolista apropiarse de parte del excedente del consumidor y, en su forma perfecta o de primer grado, elimina la pérdida de eficiencia a costa de quedarse con todo el excedente.

El tema se organiza en torno a tres preguntas:

- *Equilibrio y eficiencia*: cómo se determina el equilibrio del monopolista y cuál es la pérdida de eficiencia que provoca (apartado 1).

- *Discriminación y monopolio natural*: cómo modifica ese resultado la discriminación de precios, con la que el monopolista extrae el excedente del consumidor, cuándo el monopolio es natural y cómo debe regularse (apartado 2 y, para la regulación, tema A20).

- *Otros monopolios*: cómo se traslada el modelo al lado de la demanda (monopsonio), al mercado con un único vendedor y un único comprador (monopolio bilateral) y al monopolista con varios productos (producción conjunta) o varias plantas (apartado 3).

1. El monopolio de oferta

El estudio del monopolio de oferta parte de sus causas, de los supuestos del modelo y de la demanda a la que se enfrenta, y sigue con la decisión del monopolista y el análisis de su equilibrio, positivo y normativo.

1.1. Concepto, causas y supuestos

El **monopolio de oferta** es la estructura de mercado en la que un único vendedor abastece a toda la demanda de un bien sin sustitutivos cercanos. Su rasgo definitorio no es solo la ausencia de rivales actuales, sino también la de rivales potenciales, pues el monopolio solo persiste si existen **barreras a la entrada**. Sin ellas, sus beneficios extraordinarios atraerían a nuevas empresas hasta desaparecer.

Conviene, por ello, entender el origen de estas barreras, porque de él depende el tipo de regulación aplicable. Son **naturales o estructurales** cuando derivan de la tecnología y la demanda del sector, y **artificiales** cuando las crean las instaladas (estratégicas) o el Estado (legales). Su definición y su taxonomía se estudian en el tema A15, apartado 2.2.1.

1. *Barreras naturales o estructurales*: una sola empresa abastece toda la demanda a menor coste que varias (subaditividad de costes), típicamente porque la escala mínima eficiente es grande en relación con el mercado. Esta ventaja solo protege al monopolista si la entrada exige costes hundidos. Sin ellos, el mercado es impugnable y el precio tiende al coste medio (Baumol y Willig, 1981). Estas barreras son las del monopolio natural (apartado 2.2.1), cuya regulación se centra en el control de precios, en la financiación como complemento de ese control y, rara vez, en la producción pública.

2. *Barreras estratégicas*: conductas de la instalada para disuadir la entrada (precio límite, inversión en capacidad, proliferación de marcas o publicidad) o para expulsar a rivales ya presentes (precios predatorios). Estas conductas solo disuaden si son creíbles. Por ejemplo, una amenaza de guerra de precios que no conviene cumplir tras la entrada solo lo es con un compromiso irreversible previo (Dixit, 1980) o con información incompleta que permita construir una reputación (Kreps y Wilson, 1982; Milgrom y Roberts, 1982b). Ambos mecanismos se estudian en los temas A14 y A19. La defensa de la competencia es aquí cautelosa, porque un precio bajo puede ser simple competencia y porque prácticas como la integración vertical o la exclusividad pueden ganar eficiencia, al eliminar la doble marginalización o proteger inversiones específicas (tema A15).

3. *Barreras legales*: privilegios concedidos por el Estado (patentes, licencias, concesiones, derechos exclusivos). En licencias y concesiones, la regulación controla los precios y revisa periódicamente el privilegio. En las patentes, el poder de mercado temporal es el precio de incentivar la innovación, y la política se centra en su duración y su alcance (tema B34, apartado 2.3.1).

Supuestos:

- *Entorno*: la información es perfecta y no existen costes de transacción, como en competencia perfecta. La diferencia está en la existencia de barreras a la entrada, que hacen que una sola empresa acapare toda la producción del mercado.

- *Agentes*: el monopolista maximiza beneficio y concentra todo el poder de mercado, mientras que los consumidores maximizan utilidad tomando los precios como dados. La demanda de mercado tiene pendiente negativa y, por simplicidad, es lineal.

- *Tecnología*: un único bien normal, producido con rendimientos mixtos (costes en U).
- *Mercado de factores*: perfecto, de modo que los precios de los factores son exógenos p_0^z[1].

Estos supuestos tienen tres implicaciones fundamentales: la empresa es el mercado ($x = X$), su demanda no es perfectamente elástica y puede dejar de cumplirse la ley del precio único (discriminación de precios, apartado 2.1).

1.2. Demanda de mercado

Como en competencia perfecta, la demanda de mercado resulta de la agregación horizontal de las demandas individuales y comparte sus propiedades. La diferencia es que el monopolista se enfrenta a toda ella, de modo que su demanda es la del mercado y cada cantidad que decide vender determina el precio al que puede venderla.

> La definición de la demanda de mercado y sus propiedades se encuentran en el tema A16, apartado 1.2.

Por simplicidad, se supone una demanda lineal, $p(X) = a - bX$, con dos implicaciones para el modelo[2]:

- *Ingreso marginal*: también es lineal, $\text{Img}(X) = a - 2bX$, con la misma ordenada en el origen que la demanda y el doble de pendiente[3], de modo que se sitúa siempre por debajo del precio.
- *Elasticidad variable*: la elasticidad-precio, $|\varepsilon_{Xp}| = p/(a-p)$, no es constante. Crece a lo largo de la recta desde cero, en $X = a/b$, hasta infinito, en $X = 0$, y vale uno en el punto medio, donde el ingreso marginal se anula. Como el monopolista solo produce donde la demanda es elástica, elige siempre en la mitad superior de la recta.

1.3. Oferta de mercado: la decisión del monopolista

La decisión del monopolista, desde el mercado y desde la producción, permite entender el lado de la oferta en esta estructura de mercado. A diferencia de la competencia perfecta, el monopolio carece de curva de oferta.

1.3.1. Equilibrio: enfoque de mercado

Planteamiento: la empresa monopolista tiene por objetivo maximizar el beneficio, la diferencia entre el ingreso (el valor de mercado de la cantidad vendida) y el coste total. Sin embargo, a diferencia de la empresa competitiva, que toma el precio como dado, el monopolista se enfrenta a toda la demanda del mercado. Por ello, en esta estructura resulta equivalente elegir precio o cantidad, pues ambos están relacionados de forma única a través de la función de demanda. En lo que sigue se supone que la empresa elige la cantidad:

[1] Es decir, el monopolista no tiene poder de compra en esos mercados (a diferencia del monopsonista del apartado 3.1), de modo que su demanda de factores no altera sus precios.

[2] Con otras formas de la demanda los resultados cuantitativos cambian (apartado 1.4.3). En general, la traslación de un aumento del coste marginal al precio es mayor cuanto más convexa es la demanda (Bulow y Pfleiderer, 1983).

[3] Se obtiene derivando el ingreso total, $\text{IT}(X) = p(X) \cdot X = aX - bX^2$.

$$\max_X \ \pi = p(X) \cdot X - \mathrm{CT}(X)$$

donde X es la cantidad producida por el monopolista, que coincide con la del mercado, $p(X)$ la función de demanda inversa, $\mathrm{CT}(X)$ su función de costes y π el beneficio.

CPO:

$$\frac{d\pi}{dX} = \underbrace{\frac{dp}{dX} \cdot X + p}_{\mathrm{Img}(X)} - \underbrace{\frac{d\mathrm{CT}}{dX}}_{\mathrm{Cmg}(X)} = 0$$

$$\mathrm{Img}(X) = \mathrm{Cmg}(X) \tag{1}$$

$$p = \underbrace{\frac{1}{1 - 1/|\varepsilon_{Xp}|}}_{1+\mu} \cdot \mathrm{Cmg}(X) \tag{2}$$

$$I_L \equiv \frac{p - \mathrm{Cmg}(X)}{p} = \frac{1}{|\varepsilon_{Xp}|} \in (0, 1] \tag{3}$$

Como en competencia perfecta, el monopolista iguala el ingreso marginal al coste marginal para maximizar el beneficio (1). Las diferencias aparecen en las expresiones (2) y (3):

▪ *El margen sobre el coste marginal* (2): el ingreso marginal del monopolista equivale al precio al que vende la unidad adicional, p, menos la pérdida de ingresos sobre las unidades ya vendidas, que ahora se venden más baratas. Esa pérdida es la variación del precio que provoca la venta de esa unidad, $\partial p/\partial X$, ponderada por el número de unidades ya vendidas, X.

Operando se obtiene (2), según la cual el monopolista fija un margen $\mu > 0$ sobre su coste marginal y, con ello, un precio por encima del coste marginal sin perder todos sus clientes. Ese margen existe porque la elasticidad de su demanda es finita. En cambio, si su curva de ventas fuese perfectamente elástica, como en competencia perfecta, subidas infinitesimales del precio provocarían la pérdida de todas las ventas.

De (2) se deduce que, para maximizar beneficios, la empresa debe operar en el tramo elástico de la curva de demanda ($|\varepsilon_{Xp}| > 1$). En el tramo inelástico, por el contrario, una reducción de la cantidad eleva el precio en mayor proporción de lo que reduce las ventas, de modo que el ingreso total aumenta al producir menos.

La empresa tampoco produce donde $|\varepsilon_{Xp}| = 1$, porque allí el ingreso marginal es nulo. Solo lo haría si el coste marginal fuese nulo, caso en el que maximizar el beneficio equivale a maximizar el ingreso total[4].

▪ *El margen relativo: el índice de Lerner* (1934) (3): la capacidad de fijar un precio superior al coste marginal se mide con el *índice de Lerner*, la ratio entre el margen $p - \mathrm{Cmg}$ y el precio, que resulta inversamente proporcional a la elasticidad de la demanda. Cuanto mayor es la elasticidad, menor es el índice[5], de modo que el poder de mercado disminuye conforme los consumidores disponen de alternativas.

[4] Todo el coste es fijo (patente, coste de reproducción nulo), como ocurre en las empresas digitales.

[5] Con demanda isoelástica ($X = k \cdot p^{-|\varepsilon_{Xp}|}$), I_L es constante, de modo que, ante un *shock* de Cmg, el monopolista ajusta p manteniendo el margen relativo (Tirole, 1988, p. 66).

El índice vale cero en competencia perfecta (elasticidad infinita) y tiende a uno cuando la elasticidad se aproxima a la unidad. En el oligopolio de Cournot con producto homogéneo, el índice de cada empresa es $I_{L,i} = s_i/|\varepsilon_{Xp}|$, donde $s_i = x_i/X$ es su cuota de mercado, expresión que enlaza con la medición del poder de mercado del tema A20.

CSO:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial X^2} < 0 \rightarrow \frac{\partial \text{Img}}{\partial X} < \frac{\partial \text{Cmg}}{\partial X}$$

A diferencia de la competencia perfecta (donde la CSO exige Cmg creciente porque Img tiene pendiente nula), el monopolista puede maximizar tanto en el tramo creciente como en el decreciente de Cmg (en este último, siempre que el Cmg sea más plano que el Img). De ahí que el monopolio admita rendimientos crecientes a escala en el rango de producción relevante.

Desarrollo gráfico: el equilibrio del monopolista se representa en el plano cantidad-precio, con el ingreso total en el panel inferior (figura A17.1):

1. *Demanda*, $D(X)$: recoge el precio al que puede venderse cada cantidad (el ingreso medio del monopolista). Es decreciente, y su elasticidad va de infinita en el eje de precios a nula en el de cantidades, con valor unitario en su punto medio.

2. *Ingreso marginal*, $\text{Img}(X)$: queda por debajo de la demanda, porque para vender una unidad más el monopolista ha de bajar el precio de todas. El ingreso marginal se anula donde $|\varepsilon_{Xp}| = 1$, la cantidad que maximiza el ingreso total, $\text{IT}(X)$, del panel inferior.

3. *Coste marginal*, $\text{Cmg}(X)$: recoge lo que cuesta producir la última unidad y es creciente en el gráfico, por los rendimientos mixtos supuestos.

4. *Equilibrio*: el monopolista produce X_M, donde $\text{Img}(X) = \text{Cmg}(X)$, a la izquierda del punto de elasticidad unitaria, y fija sobre la demanda el precio p_M (punto 0), superior al coste marginal y al precio competitivo, p_C, que corresponde a X_C (punto 1).

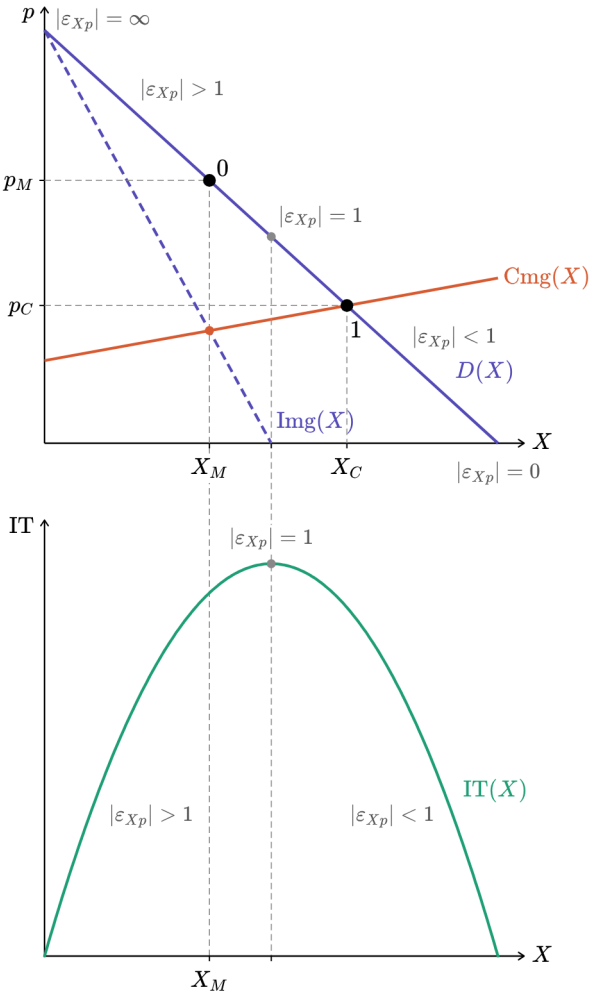


Figura A17.1: Equilibrio del monopolio, enfoque de mercado. El monopolista produce donde el ingreso marginal iguala al coste marginal y fija el precio sobre la curva de demanda.

1.3.2. Equilibrio: enfoque de la producción

Planteamiento: la decisión del monopolista puede analizarse también desde el punto de vista de la producción, lo que ofrece un desglose más pormenorizado de la contratación de factores productivos:

$$\max_{\mathbf{z}} \ \pi = p(X) \cdot f(\mathbf{z}) - \mathbf{p}^z \cdot \mathbf{z} \quad \text{s.a.: } \mathbf{z} \geq 0$$

donde $\mathbf{z}$ es el vector de cantidades de factores, $f(\mathbf{z}) = X$ la función de producción, $p(X)$ la demanda inversa, $\mathbf{p}^z$ el vector de precios de los factores, exógenos por ser perfecto su mercado, y π el beneficio.

CPO (condiciones de primer orden):

$$\text{RMST}_{ji} = \frac{\partial f / \partial z_i}{\partial f / \partial z_j} = \frac{p_i^z}{p_j^z} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f/\partial z_i}{p_i^z} = \lambda = \frac{1}{\text{Cmg}} \quad \forall i \tag{5}$$

$$\underbrace{p\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{Xp}|}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial z_i}}_{\text{IPmg}_i} = p_i^z \tag{6}$$

$$p = \frac{1}{1 - 1/|\varepsilon_{Xp}|} \cdot \frac{p_i^z}{\partial f/\partial z_i} \tag{7}$$

Las cuatro condiciones se leen como sigue. (4) es la condición de minimización del coste, idéntica a la de la empresa competitiva. La relación marginal de sustitución técnica iguala al precio relativo de los factores, de modo que el monopolista produce al mínimo coste (eficiencia productiva o económica, no solo técnica) cualquier cantidad que decida producir. (5) reformula la condición (4) en términos de productividades marginales por euro gastado, que han de ser iguales para todos los factores. La diferencia con la competencia perfecta aparece en (6), la condición de maximización del beneficio, según la cual cada factor se contrata hasta que el ingreso de su productividad marginal, $\text{IPmg}_i = \text{Img} \cdot \partial f/\partial z_i$, iguala a su precio.

Como el ingreso marginal es inferior al precio del producto, cada factor cobra menos que el valor de su productividad marginal, $p \cdot \partial f/\partial z_i$, lo que cobraría en competencia (explotación monopolística). (7) es, de nuevo, la regla de fijación del precio con margen sobre el coste marginal. En suma, mientras maximice el beneficio, el monopolista es eficiente en cómo produce, pero no en cuánto produce, es decir, cumple la eficiencia productiva y viola la asignativa (la ineficiencia-X del apartado 1.4.2 surge cuando la falta de competencia relaja ese objetivo).

CSO: son las del enfoque de mercado trasladadas a los factores. En concreto, el beneficio ha de ser estrictamente cóncavo en $\mathbf{z}$, lo que garantizan una función de producción estrictamente cóncava en el tramo relevante y un ingreso marginal decreciente. Estas dos propiedades no son, sin embargo, condiciones necesarias, porque, como en el enfoque de mercado, basta con que el ingreso marginal decrezca con suficiente rapidez, lo que admite rendimientos crecientes a escala.

1.3.3. Función de oferta: su ausencia en el monopolio

La empresa competitiva tiene una curva de oferta, su Cmg, que asocia a cada precio una sola cantidad. El monopolista, en cambio, carece de ella, porque su producción varía con la forma de la demanda, y dos demandas distintas pueden llevarle a vender lo mismo a precios diferentes o cantidades diferentes al mismo precio.

En consecuencia, no se puede derivar una curva de oferta única del Cmg y, por tanto, no se pueden hacer ejercicios de estática comparativa con validez general. Además, como el monopolista fija el precio, puede dejar de cumplirse la ley del precio único (discriminación de precios, apartado 2.1).

1.3.4. Función de valor: la función de máximo beneficio

> Este apartado presenta la función de valor óptimo del monopolista para conservar la estructura del tema A16 y como guía conceptual. En la exposición oral del tema puede omitirse si es necesario.

Definición: sustituyendo la solución en el objetivo se obtiene la función de máximo beneficio, $\pi^*(\mathbf{p}^z)$, que da el mayor beneficio que puede obtener el monopolista para cada vector de precios de los factores, dada la demanda. La diferencia con la de competencia perfecta (tema A16, apartado 1.3.4) es que no depende de un precio del producto dado, porque el monopolista lo elige, de modo que de ella no se obtiene una función de oferta.

Propiedades:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en los precios de los factores y diferenciable en ellos cuando las demandas de factores son únicas, lo que permite aplicar el teorema de la envolvente.

2. *Transformaciones*: es una función cardinal, medida en unidades monetarias. A diferencia de la de competencia perfecta, que es homogénea de grado uno en todos los precios, no es homogénea en los precios de los factores, porque la demanda inversa, $p(X)$, queda fija en términos monetarios. Solo lo es, de grado uno, si esta se multiplica en la misma proporción que ellos.

3. *Inclinación*: es no creciente en el precio de cada factor, y decreciente en el de los que emplea.

4. *Forma*: como en competencia perfecta, es convexa en los precios de los factores, porque el beneficio de cada combinación de factores depende linealmente de ellos y la función es el máximo de esos beneficios. De ahí que la demanda de cada factor no aumente con su precio.

5. *Otras propiedades*:

- *Envolvente* (*lema de Hotelling*): su derivada respecto del precio de cada factor es, cambiada de signo, la demanda de ese factor, $\partial\pi^*/\partial p_i^z = -z_i^*(\mathbf{p}^z)$.

- *Dualidad*: las demandas de factores son las condicionadas del tema A12, apartado 1.4.2, evaluadas en la producción de monopolio, $z_i^*(\mathbf{p}^z) = d_i^c(\mathbf{p}^z, X_M(\mathbf{p}^z))$, porque la condición (4) asegura que el monopolista produce al mínimo coste.

- *Observabilidad*: es observable, porque se miden tanto los precios de los factores como el beneficio.

1.4. Análisis del equilibrio

El análisis del equilibrio estudia primero sus propiedades positivas (existencia, beneficio y escala), después las normativas (la ineficiencia asignativa y su coste social, la explotación de los factores y la ineficiencia en costes) y, por último, su respuesta a cambios del entorno.

1.4.1. Análisis positivo: propiedades del equilibrio de monopolio

El equilibrio existe (un único oferente), es único y estable (mientras persista la necesidad del producto y las barreras). A igualdad de costes, la cantidad producida es siempre inferior y el precio siempre superior a los de competencia perfecta. En cambio, el beneficio del monopolista y la escala a la que opera dependen del plazo.

Corto plazo: al menos un factor es fijo y el número de empresas es fijo. La condición de viabilidad es idéntica a la de competencia perfecta. Por tanto, el ingreso ha de cubrir el coste variable, $\text{IT} \geq \text{CV}_{\text{CP}}$, es decir, $p_M \geq \text{CVme}(X_M)$, evaluada en la cantidad que elige el monopolista y no en el mínimo de explotación, porque el monopolista no toma el precio como dado.

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A17.2), el monopolista produce X_M, donde $\text{Img}(X) = \text{Cmg}(X)$, y cobra el precio p_M que marca la demanda, $D(X) = \text{Ime}(X)$, en el punto 0. Al igual que en competencia perfecta, en el corto plazo puede operar con beneficios, si $p_M > \text{Cme}(X_M)$ (panel superior), o con pérdidas, si $p_M < \text{Cme}(X_M)$ (panel inferior), estas últimas si el Cme está por encima de la demanda para cualquier X.

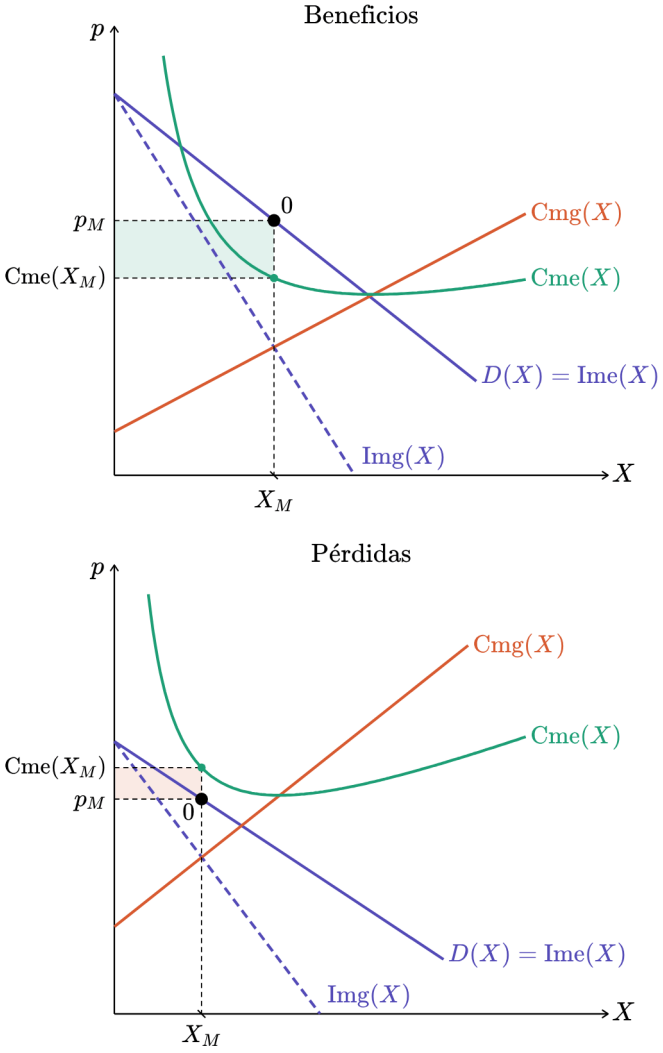


Figura A17.2: El beneficio del monopolista. El equilibrio puede darse con beneficios (arriba, $p_M > \text{Cme}(X_M)$) o con pérdidas (abajo, $p_M < \text{Cme}(X_M)$).

Largo plazo: todos los factores son variables, y el número de empresas puede variar o no según existan barreras. La condición de viabilidad es la misma que a corto plazo, con la diferencia de que, al ser todo el coste variable, se formula sobre el coste total medio, $\text{IT} \geq \text{CT}_{\text{LP}}$, es decir, $p_M \geq \text{Cme}_{\text{LP}}(X_M)$. Por tanto, el monopolista solo produce si cubre todos sus costes.

La principal implicación es que en el largo plazo, a diferencia del corto y al igual que en competencia perfecta, el monopolista no soportará pérdidas, pues tiene flexibilidad para evitarlas. Existen, sin embargo, dos diferencias con la competencia perfecta:

1. *Rentas del monopolio*: el monopolista puede obtener beneficios positivos en el largo plazo fijando un precio superior al coste medio. Los beneficios positivos incentivan la entrada, pero las barreras la impiden, de modo que no se cumple la condición de libre entrada y se generan las llamadas *rentas del monopolio*. El término alude a que esas rentas pueden deberse a derechos de propiedad sobre un recurso (una patente, una localización favorable) por los que propietarios potenciales estarían dispuestos a pagar. Estas rentas están en la base de la regulación mediante subastas (apartado 2.3.2).

2. *No opera necesariamente en la dimensión óptima*: el monopolista no maximiza el beneficio necesariamente en el mínimo de la curva de coste medio, porque su curva de ventas no es perfectamente elástica y no se le impone la condición de beneficio nulo. Según el tamaño del mercado, la maximización de beneficios puede producirse:

- *Escala óptima* (mínimo de Cme): la capacidad y las economías de escala se aprovechan plenamente.

- *Escala subóptima* (tramo decreciente de Cme): el tamaño del mercado no basta para utilizar plenamente la capacidad, de modo que existe capacidad excedentaria y las economías de escala no se aprovechan por completo. La situación es similar a la de la competencia monopolística, en la que las empresas tienen poder de mercado, pero el tamaño de su nicho limita su explotación y produce exceso de capacidad (tema A18).

- *Escala sobreutilizada* (tramo creciente de Cme): el mercado es tan grande que, para maximizar el beneficio, el monopolista debe construir una planta mayor que la dimensión óptima, con sobreutilización de la capacidad y deseconomías de escala.

1.4.2. Análisis normativo: eficiencia y bienestar

Ineficiencia asignativa: el monopolista produce una cantidad inferior a la competitiva. Quedan sin producir unidades por las que los consumidores pagarían más que su Cmg y, aun así, al monopolista no le conviene ofrecerlas, porque solo podría vender cada unidad adicional rebajando el precio de todas las que ya vende. El resultado es una pérdida de peso muerto (*triángulo de Harberger*).

Gráficamente, la ineficiencia asignativa del monopolio se representa en el plano cantidad-precio (figura A17.3):

1. *Demanda*, $D(X) = \text{Ime}(X)$: recoge la valoración social de cada unidad.

2. *Ingreso marginal*, $\text{Img}(X)$: recoge la valoración privada del monopolista. La pérdida irrecuperable nace de la divergencia entre ambas valoraciones.

3. *Coste marginal*, $\text{Cmg}(X)$: recoge el coste social de producir cada unidad adicional y es creciente en el gráfico.

4. *Equilibrio*: el monopolista produce X_M, donde $\text{Img}(X) = \text{Cmg}(X)$, y cobra p_M (punto 0), frente a la cantidad X_C y el precio p_C de la competencia perfecta (punto 1). Los consumidores pierden excedente y los productores ganan una parte, pero pierden la producción que habrían realizado en competencia perfecta:

- *Rectángulo C*: excedente del consumidor que se transfiere al productor.

- *Triángulos A y B*: excedente que se pierde, A del consumidor y B del productor, y que forma el triángulo de Harberger.

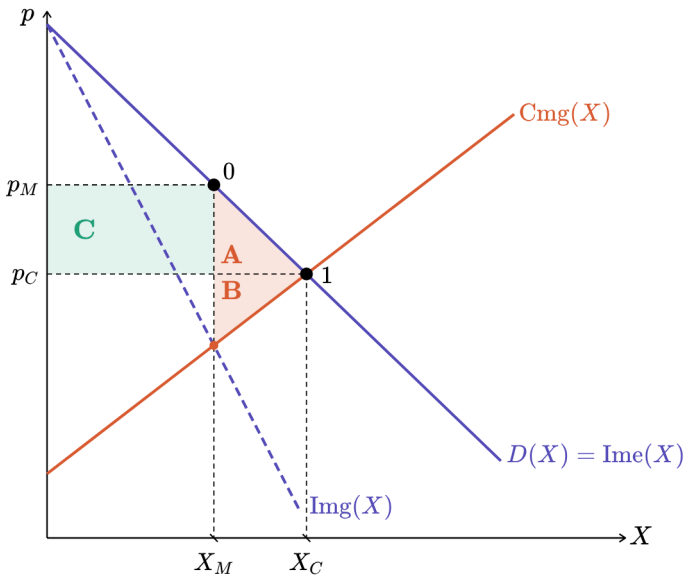


Figura A17.3: Ineficiencia del monopolio. Parte del excedente del consumidor se transfiere al productor y se produce una pérdida irrecuperable de eficiencia (triángulo de Harberger).

Medición del coste social: la magnitud empírica del triángulo de pérdida irrecuperable fue estimada por Harberger (1954) para la industria manufacturera estadounidense en apenas el 0,1 % de la renta nacional, resultado que sugería que el monopolio era un problema menor.

Dos líneas posteriores revisaron al alza esa cifra, no obstante. Tullock (1967) y Posner (1975) señalaron que el rectángulo del beneficio monopolístico no es una mera transferencia. Los recursos que las empresas gastan en obtener o defender la posición de monopolio (presión política, litigios, capacidad excesiva) constituyen un coste social adicional, la *búsqueda de rentas*, que en el límite puede disipar todo el beneficio.

Por su parte, Cowling y Mueller (1978), corrigiendo los supuestos de Harberger sobre elasticidades y márgenes, elevaron la pérdida de bienestar a cifras de entre el 4 % y el 13 % del producto. En sentido contrario, la tradición schumpeteriana recuerda que el poder de mercado puede ser el precio de la innovación. La controversia Schumpeter-Arrow sobre si el monopolista tiene más o menos incentivos a innovar que la empresa competitiva se desarrolla en el tema A15, apartado 1.4.3.

Explotación monopolística de factores: al restringir la producción, el monopolista contrata menos factores (normales). Además, paga cada factor según su $\text{IPmg}_i = \text{Img} \cdot \partial f/\partial z_i < p \cdot \partial f/\partial z_i = \text{VPmg}_i$, de modo que lo remunera por debajo del valor de su productividad marginal,

aunque lo emplea con eficiencia técnica. El grado de explotación vendrá dado por $(p \cdot \partial f/\partial z_i - p_i^z)/(p \cdot \partial f/\partial z_i) = 1/|\varepsilon_{Xp}|$.

Ineficiencia en costes: la ausencia de competencia debilita los incentivos a reducir costes, lo que da lugar a la ineficiencia-X de Leibenstein (1966).

1.4.3. Estática comparativa

Aunque el monopolio no tiene curva de oferta, la condición Img = Cmg permite prever la respuesta del monopolista a cambios en su entorno:

- *Demanda*: un aumento de la demanda eleva la cantidad solo si eleva el ingreso marginal en la cantidad inicial, lo que depende de cómo cambie la elasticidad. Con un desplazamiento paralelo de una demanda lineal y coste marginal constante o creciente, suben la cantidad y el precio. Si la demanda se vuelve más inelástica, en cambio, la cantidad puede bajar mientras sube el precio, y si se vuelve más elástica, el precio puede bajar mientras sube la cantidad.

- *Costes*: un aumento del coste marginal se traslada al precio solo en parte con demanda lineal (la mitad, con coste marginal constante) y más que íntegramente con demanda isoelástica, $\Delta p = (1 + \mu) \cdot \Delta\text{Cmg}$.

- *Impuestos* (Suits y Musgrave, 1953): para la misma recaudación, un impuesto *ad valorem* reduce menos la producción que uno específico, porque grava el ingreso marginal, que es menor que el precio, y no cada unidad. El impuesto *ad valorem* da, por tanto, un precio menor y una cantidad mayor, y es el impuesto preferible en mercados no competitivos.

- *Precio máximo*: fijado entre el coste marginal y el precio de monopolio, aumenta la producción, ya que hasta la cantidad demandada a ese precio el ingreso marginal coincide con el precio máximo, de modo que el monopolista produce más que X_M. Si el precio máximo iguala al competitivo, se alcanza la producción de competencia perfecta, resultado que anticipa la regulación del monopolio natural (apartado 2.3).

1.5. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo de monopolio muestra con un aparato mínimo cómo el poder de mercado rompe la igualdad entre precio y coste marginal. Ello proporciona la referencia frente a la que se mide la ineficiencia asignativa y justifica la regulación (tema A20).

Limitaciones: el modelo básico supone un único precio, información completa y ausencia de competencia potencial. La discriminación de precios, la competencia por el mercado y la conducta estratégica frente a entrantes, que modifican sustancialmente sus conclusiones, se desarrollan en el apartado 2 y en los temas A18 y A19.

2. Principales monopolios

El modelo canónico supone un solo producto y un precio único, y no dice de dónde nace el poder de mercado. Este apartado estudia los dos monopolios que más se apartan de él y que más importan para la política económica: el que discrimina precios para apropiarse del excedente y el monopolio natural, que nace de la tecnología, con una mención a su regulación.

2.1. Monopolios discriminadores de precios

El monopolio simple fija un único precio para todas las unidades y todos los compradores. Deja por ello sin capturar una parte del excedente, la de quienes habrían pagado más que el precio fijado y la de las unidades que habrían comprado a precios inferiores a él pero superiores al coste marginal.

Cobrar precios distintos por un mismo bien sin que lo justifiquen diferencias de coste, con el fin de quedarse con ese excedente, es lo que se llama **discriminación de precios**.

Para practicar discriminación de precios, el monopolista ha de cumplir tres condiciones. Las tres son necesarias en todos los grados, aunque cada grado las satisface de forma distinta:

1. *Poder de mercado*: capacidad de fijar el precio, es decir, enfrentarse a una demanda con pendiente negativa. Una empresa precio-aceptante no puede cobrar precios distintos.

2. *Separación de los consumidores*: poder distinguir las distintas valoraciones de los consumidores. La distinción es directa cuando el monopolista observa la disposición a pagar de cada comprador (primer grado) o una característica que separa grupos (tercer grado). Es indirecta cuando son los propios consumidores quienes se revelan, al elegir dentro de un menú (segundo grado) o el momento de la compra (cuarto grado).

3. *Ausencia de arbitraje*: impedir la reventa del bien de quienes lo compran barato a quienes lo pagarían caro. En el segundo grado ha de impedirse, además, que un consumidor elija la oferta diseñada para otro, lo que exige que el menú sea compatible con los incentivos.

Según la información de que disponga el monopolista, la discriminación adopta los tres grados de Pigou (1920), a los que se suma la intertemporal, llamada por extensión de cuarto grado. El Anexo compara sus resultados con los del monopolio simple y la competencia perfecta.

2.1.1. Discriminación de primer grado (perfecta)

Origen: es el primero de los grados de discriminación de la clasificación de Pigou (1920).

Idea: el monopolista tiene información completa sobre las preferencias y fija a cada consumidor, y a cada unidad, su precio de reserva, es decir, cobra por cada unidad exactamente lo máximo que su comprador está dispuesto a pagar por ella.

Razonamiento: vender una unidad más a su precio de reserva no obliga a abaratar las anteriores, así que cada venta aporta al ingreso exactamente su precio y la demanda hace de curva de ingreso marginal. El monopolista sigue vendiendo mientras la siguiente unidad tenga un precio de reserva por encima del coste marginal, y se detiene en la unidad cuyo precio de reserva iguala a ese coste. Llega así a la cantidad competitiva ($X_M = X_C$), pero con todo el excedente en sus manos ($\mathrm{EC}_M = 0$). No hay, por tanto, ineficiencia asignativa. Lo que cambia respecto a la competencia es el reparto del excedente, que es justo el opuesto, de modo que una eventual intervención se apoyaría en la equidad y no en la eficiencia.

Desarrollo gráfico: la discriminación de primer grado se representa en el plano cantidad-precio (figura A17.4):

1. *Demanda*, $D(X) = \text{Img}(X)$: cada unidad (1, 2 y 3 en el gráfico) se vende a su precio de reserva ($p(1)$, $p(2)$ y $p(3)$), de modo que la demanda es también el ingreso marginal.

2. *Ingreso medio*, $\text{Ime}(X)$: queda por encima de la demanda, porque promedia los precios de reserva de todas las unidades vendidas.

3. *Coste marginal*, $\text{Cmg}(X)$: recoge el coste de cada unidad adicional, constante en el gráfico.

4. *Equilibrio*: el monopolista produce donde la demanda corta al coste marginal, $X_M = X_C$ (punto 0), y su beneficio, el área sombreada, es todo el excedente que en competencia perfecta sería de los consumidores, $\pi_M = \text{EC}_C$.

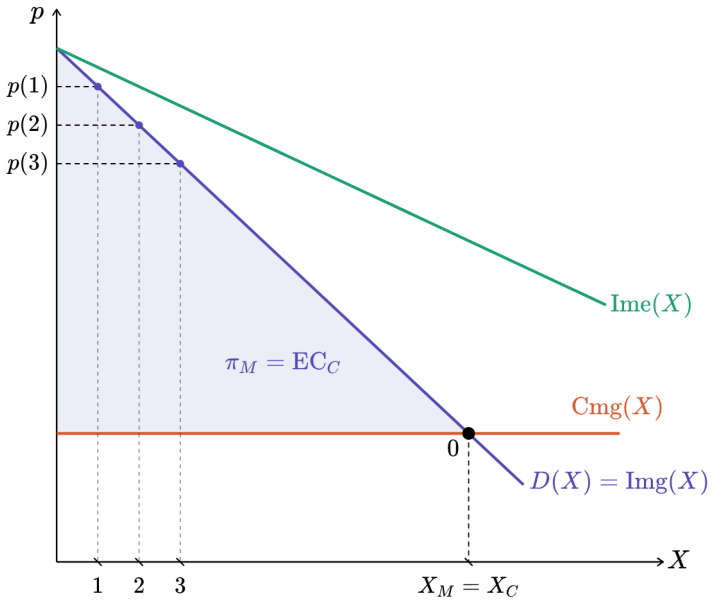


Figura A17.4: Discriminación de primer grado. El monopolista, que produce la cantidad competitiva, captura íntegro el excedente del consumidor.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: muestra que la pérdida de eficiencia del monopolio simple no procede del poder de mercado en sí, sino de la obligación de cobrar un precio único. También sirve de referencia frente a la que se valoran los demás grados de discriminación y las tarifas no lineales.

▪ *Limitaciones*: en la práctica es rara, porque exige una información sobre las valoraciones individuales que casi nunca está disponible. No obstante, se aproxima en las subastas, en el regateo del zoco o en el médico rural que cobra según la capacidad de pago de cada paciente.

2.1.2. Discriminación de segundo grado: menús de precios

Origen: es el segundo grado de la clasificación de Pigou (1920). Su instrumento más simple, la tarifa en dos partes, fue analizado por Oi (1971) a propósito del *dilema de Disneylandia*[6] (entrada al parque más precio por atracción).

Idea: el monopolista no observa las valoraciones individuales, pero sabe que existen tipos distintos de consumidores y diseña un menú de ofertas para que cada uno se autoseleccione al elegir, en función de la cantidad o la calidad que desea. La discriminación de segundo grado aplica al monopolio el mecanismo de criba del tema A13 y adopta tres formas: las tarifas en dos partes, los descuentos por cantidad o *bundling* y la discriminación por calidad. La tarifa en dos partes, $T(x) = F + p \cdot x$, cobra una cuota fija F por el derecho a comprar y un precio p por unidad.

Supuestos:

- *Entorno*: un único bien, sin posibilidad de arbitraje (la cuota es personal e intransferible). El monopolista conoce las demandas de cada tipo y su número, pero no puede identificar quién es quién.

- *Agentes*: primero, n consumidores idénticos con demanda $x(p)$ y excedente $\mathrm{EC}(p)$; después, dos tipos, n_A de alta valoración, con demanda $x_A(p)$ por encima de la de los n_B de baja valoración, $x_B(p)$, de modo que $\mathrm{EC}_A(p) > \mathrm{EC}_B(p)$.

- *Tecnología*: coste marginal constante c, sin costes fijos.

Planteamiento: el monopolista elige cuota y precio sujeto a que los consumidores servidos participen:

$$\max_{F,\,p} \ \pi = F\,n + (p-c)\,X(p) \quad \text{s.a.: } \mathrm{EC}_i(p) \geq F \ \text{ para todo } i \text{ servido}$$

donde F es la cuota fija, p el precio por unidad, n el número de consumidores que participan, $X(p)$ su demanda agregada, $\mathrm{EC}_i(p)$ el excedente del consumidor i al precio p y c el coste marginal.

CPO: cabe distinguir dos casos, según los consumidores sean idénticos o de dos tipos:

1. *Consumidores idénticos*: la restricción se satura, $F = \mathrm{EC}(p)$, y la condición de primer orden da $p = c$ y $F = \mathrm{EC}(c)$. Así, el monopolista vende al coste marginal, lo que hace máximo el excedente, y se lo apropia íntegramente con la cuota, como en la discriminación perfecta.

2. *Dos tipos de consumidores*: con dos tipos servidos, en cambio, la cuota queda limitada por el tipo bajo, $F = \mathrm{EC}_B(p)$, y la condición de primer orden iguala lo que el monopolista gana y lo que pierde al subir el precio unitario[7]:

$$\underbrace{n_A\,[x_A(p) - x_B(p)]}_{\text{ganancia sobre el tipo alto}} = \underbrace{(p-c)\,[-\frac{dX}{dp}]}_{\text{margen perdido}}$$

[6] El dilema que plantea Oi (1971) en *A Disneyland Dilemma: Two-Part Tariffs for a Mickey Mouse Monopoly* es el de un parque de atracciones que duda entre una entrada cara con atracciones baratas y una entrada barata con atracciones caras. Con visitantes idénticos no hay dilema, porque lo óptimo es cobrar cada atracción a su coste marginal y recaudar todo el excedente con la entrada. El dilema aparece cuando los visitantes difieren. Una entrada alta extrae más excedente de quienes más valoran el parque, pero excluye a los demás, y bajarla para incluirlos lleva a cobrar las atracciones por encima de su coste marginal.

[7] Con $F = \mathrm{EC}_B(p)$, el beneficio es $\pi = n\,\mathrm{EC}_B(p) + (p-c)\,X(p)$, con $n = n_A + n_B$ y $X = n_A x_A + n_B x_B$. Como $d\,\mathrm{EC}_B/dp = -x_B(p)$, la condición de primer orden es $-n\,x_B + X + (p-c)\,X' = 0$, y como $X - n\,x_B = n_A\,(x_A - x_B)$, queda $n_A\,(x_A - x_B) + (p-c)\,X' = 0$.

Con dos tipos, subir el precio un euro rebaja en x_B la cuota de cada consumidor, pero eleva en un euro el ingreso de cada unidad vendida. Para el tipo bajo ambos efectos se compensan, mientras que el tipo alto compra $x_A - x_B$ unidades más, sobre las que el monopolista gana sin perder cuota. A cambio, se venden menos unidades, $-dX/dp$, cada una con un margen $p - c$. Como la ganancia sobre el tipo alto es positiva, en el óptimo $p > c$. El precio unitario se eleva sobre el coste marginal para extraer parte de la mayor valoración del tipo alto, que la cuota, limitada por el tipo bajo, no alcanza. Con consumidores idénticos, $x_A = x_B$ y se recupera $p = c$.

CSO: el beneficio es cóncavo en p si las demandas no son demasiado convexas (p. ej. con demandas lineales de pendientes parecidas), de modo que la CPO caracteriza el máximo.

Extensiones:

- *Tarifa en dos partes*: el planteamiento admite tres estrategias:

  - *Tarifa exclusivista*: el monopolista fija $p = \text{Cmg}$ y una cuota igual al excedente del cliente de alta valoración, $F = \text{EC}_A$. Captura así todo el excedente de A, pero expulsa del mercado a B, cuyo excedente es inferior a la cuota. Gana en margen y pierde en tamaño de mercado, de modo que esta tarifa es preferible cuando n_A es grande frente a n_B.

  - *Precio único no exclusivista*: $p = \text{Cmg}$ y $F = \text{EC}_B$. Incluye a ambos pero pierde beneficios potenciales, porque para la cantidad de B un cliente A pagaría más[8]. La CPO anterior mejora esta tarifa elevando p sobre el coste marginal.

  - *Menú discriminatorio*: cuota fija aún menor, $p > \text{Cmg}$ para volúmenes bajos (induce a B a consumir menos) y $p = \text{Cmg}$ para volúmenes altos (incentiva a A). La tarifa óptima iguala el incremento marginal y el descenso marginal del beneficio. Al menú se le aplica la *restricción de compatibilidad de incentivos*, según la cual ningún cliente debe salir ganando si elige la tarifa pensada para el otro tipo.

- *Bundling*: consiste en vender un lote de unidades o de bienes a un precio inferior a la suma de sus precios por separado, $p(x_1 + x_2) < p(x_1) + p(x_2)$, de modo que quien valora mucho una parte del lote acaba pagando por la otra. Los paquetes de *software* o las suscripciones combinadas son el ejemplo habitual.

- *Elección de calidad* (Mussa y Rosen, 1978): el monopolista ofrece versiones de distinta calidad a precios distintos, con diferencias de precio muy superiores a las de coste, para que los consumidores de alta valoración elijan la versión cara y los de baja la barata. La edición en tapa dura y la de bolsillo, o las clases *business* y turista, son sus ejemplos clásicos.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica por qué las tarifas reales (cuotas de abono, descuentos por volumen, versiones de calidad) son no lineales. Muestra además que el monopolista puede extraer excedente sin observar a cada consumidor, con una producción tanto más cercana a la competitiva cuanto más sustituye la cuota al margen.

- *Limitaciones*: exige ausencia de arbitraje y conocimiento de la distribución de tipos. Con más tipos el menú óptimo requiere la criba del tema A13, y el precio superior al coste marginal reintroduce una pérdida de eficiencia, menor que la del monopolio simple.

[8] Beneficios potenciales: el área entre las demandas de A y de B por encima del coste marginal, $\text{EC}_A - \text{EC}_B$, que la cuota $F = \text{EC}_B$ deja en manos de cada cliente A.

2.1.3. Discriminación de tercer grado: segmentación de mercados

Origen: es el tercer grado de la clasificación de Pigou (1920).

Idea: el monopolista usa una característica observable (edad, residencia, sexo) para identificar grupos homogéneos con distintas elasticidades.

Planteamiento: el monopolista fija un precio distinto para cada grupo y el mismo precio por unidad dentro de cada grupo. Con dos grupos, A y B, de demandas independientes, elige la cantidad que vende en cada uno:

$$\max_{x_A,\,x_B}\ \pi = p_A(x_A)\,x_A + p_B(x_B)\,x_B - \mathrm{CT}(x_A + x_B)$$

donde x_i es la cantidad vendida al grupo i, $p_i(x_i)$ su demanda inversa, CT el coste total de la producción conjunta $X = x_A + x_B$ y π el beneficio.

CPO: el ingreso marginal de cada grupo se iguala al coste marginal común:

$$\mathrm{Img}_A = \mathrm{Img}_B = \mathrm{Cmg}(X)\ \Rightarrow\ p_A\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_A|}\right) = p_B\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_B|}\right) = \mathrm{Cmg}$$

Si un grupo tuviera un ingreso marginal mayor, trasladar ventas hacia él aumentaría el ingreso sin alterar el coste. Como el margen relativo de cada grupo es la inversa de su elasticidad, el grupo de demanda más inelástica paga el precio mayor, resultado conocido como *regla de la elasticidad inversa*. Los descuentos a estudiantes o jubilados, o las tarifas distintas por países, son su aplicación cotidiana.

CSO: basta con que el ingreso marginal de cada grupo sea decreciente y el coste marginal no decreciente, $\partial \mathrm{Img}_i/\partial x_i < \partial \mathrm{Cmg}/\partial X$, lo que asegura que la igualación caracteriza el máximo.

Desarrollo gráfico: la discriminación de tercer grado se representa en el plano cantidad-precio, con los dos mercados espalda con espalda, el A hacia la izquierda del eje de precios y el B hacia la derecha (figura A17.5):

1. *Demandas*, $D_A(x_A)$ y $D_B(x_B)$, e *ingresos marginales*, Img_A e Img_B: recogen lo que paga cada grupo por cada cantidad y lo que añade al ingreso la última unidad vendida en él. La demanda del mercado A es la más inelástica.

2. *Coste marginal*, Cmg: constante y común a ambos mercados, porque se vende el mismo bien, producido de forma conjunta.

3. *Equilibrio*: en cada mercado el monopolista vende la cantidad en la que el ingreso marginal corta al coste marginal, x_A^* y x_B^*, y cobra el precio que marca la demanda en esa cantidad (puntos 0_A y 0_B). El grupo de demanda más inelástica, A, paga el precio mayor, $p_A^* > p_B^*$, aunque el coste de servir a ambos sea el mismo.

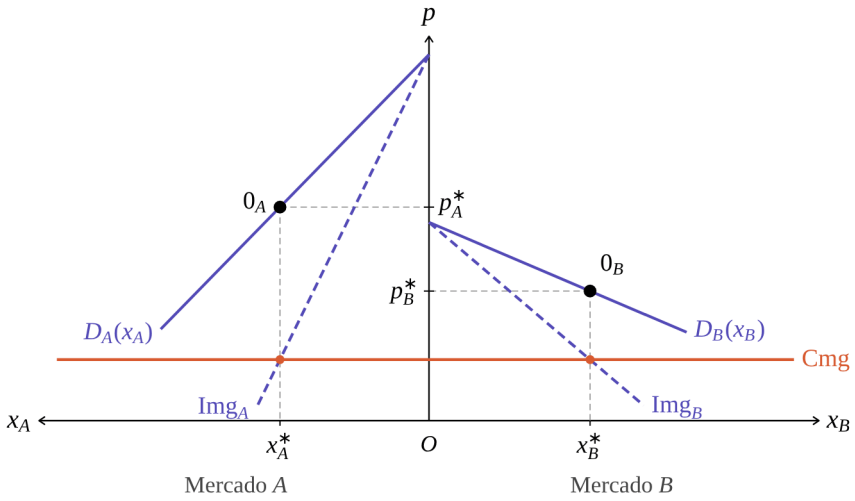


Figura A17.5: Discriminación de tercer grado con coste marginal constante común. En cada mercado el monopolista vende la cantidad en la que el ingreso marginal de ese mercado corta al Cmg (x_A^*, x_B^*) y cobra el precio que marca la demanda de ese mercado en esa cantidad. El mercado A, de demanda $D_A(x_A)$ más inelástica, paga un precio mayor que el B, $p_A^* > p_B^*$.

Bienestar: los efectos son ambiguos. El grupo más elástico gana, porque su precio baja respecto del monopolio sin discriminación, y el más inelástico pierde, porque el suyo sube. Producción y bienestar total pueden ser mayores o menores, y la discriminación puede generar ganancias de eficiencia si permite el acceso a grupos antes excluidos.

El criterio de Schmalensee (1981) y Varian (1985) precisa esa ambigüedad. Según él, la discriminación de tercer grado solo puede aumentar el bienestar si aumenta la producción total. Si no abre mercados nuevos y la producción no sube, lo reduce con seguridad. La intuición es que cobrar precios distintos por un mismo bien reasigna las unidades de forma ineficiente entre mercados, pues la última unidad vendida en el grupo de precio alto vale más para su comprador que la última vendida en el de precio bajo. Esa pérdida solo puede compensarse si la discriminación expande el volumen total. Por ejemplo, con demandas lineales y ambos grupos servidos la producción total no cambia, de modo que el bienestar cae. Solo cuando el precio único dejaría fuera a un grupo entero, y la discriminación permite servirlo, producción y bienestar aumentan.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica, con la regla de la elasticidad inversa, por qué un mismo bien se vende a precios distintos según grupos observables de consumidores, y ofrece en el aumento de la producción total una condición necesaria, fácil de comprobar, para que mejore el bienestar.

- *Limitaciones*: exige que los grupos sean identificables y que no haya reventa entre ellos, y supone demandas independientes. Además, su efecto sobre el bienestar depende de la forma de las demandas, por lo que no ofrece una regla general para la política de competencia.

2.1.4. Discriminación de cuarto grado: discriminación intertemporal

Origen: la planteó Coase (1972), a propósito del monopolista de bienes duraderos. Se la llama de cuarto grado por extensión de la clasificación de Pigou (1920), que solo distinguía tres.

Idea: con bienes duraderos, el monopolista crea su propia competencia (al vender hoy, reduce la demanda mañana). Para captar la demanda residual, rebaja los precios con el tiempo y discrimina así entre los compradores, pues los de mayor valoración compran pronto y los de menor valoración esperan a las rebajas.

Razonamiento: si los consumidores son racionales y previsores (con expectativas racionales), retrasan sus compras (salvo que sean muy impacientes). Por ello, según la *conjetura de Coase* (1972), un monopolista de bien duradero pierde su poder de monopolio si modifica precios con frecuencia y los consumidores son pacientes. La solución para el monopolista es comprometerse creíblemente a no modificar los precios, por ejemplo alquilando el bien (*leasing*) en lugar de venderlo.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: muestra que el poder de un monopolista de bienes duraderos está limitado por su propia producción futura. También explica estrategias como el alquiler en lugar de la venta, la reducción de la vida útil del bien o los compromisos de no rebajar los precios.

- *Limitaciones*: la pérdida completa del poder de monopolio exige consumidores muy pacientes y cambios de precio muy frecuentes. Si el bien se deprecia, entran continuamente nuevos compradores o ajustar el precio es costoso, el monopolista conserva parte de su poder. Además, con un número finito de compradores la conjetura puede fallar. En la estrategia *Pacman* (Bagnoli, Salant y Swierzbinski, 1989), por ejemplo, el monopolista cobra en cada periodo la mayor valoración de quienes aún no han comprado y extrae todo el excedente.

2.2. Monopolio natural

El monopolio natural se estudia en tres pasos: su concepto y sus causas, las condiciones de existencia y de sostenibilidad cuando la empresa produce un solo bien y su extensión a la empresa multiproducto, en la que la sostenibilidad exige precios sin subsidios cruzados.

2.2.1. Concepto

> La subaditividad de costes, sus condiciones y su relación con las economías de escala y de alcance se desarrollan en el tema A12, apartado 3.2. Aquí se presenta su implicación para la estructura del mercado.

Un **monopolio natural** existe cuando la tecnología permite a una sola empresa abastecer todo el mercado a menor coste que varias. A diferencia del monopolio legal o del que nace de conductas estratégicas, su origen está en los costes y no en barreras artificiales (apartado 1.1).

- *Causas*: costes fijos elevados y en buena parte hundidos, típicos de las infraestructuras de red, que generan economías de escala en un tramo amplio de la producción en relación con el tamaño del mercado. Cuando la empresa ofrece varios productos, se suman las economías de alcance que nacen de compartir esos costes.

▪ *Ejemplos*: el transporte de electricidad y de gas, la distribución de agua, las infraestructuras ferroviarias y el bucle local de las telecomunicaciones. A menudo solo la red es monopolio natural, mientras que los servicios que se prestan sobre ella admiten competencia (tema A20, apartado 3.3).

La condición precisa es la subaditividad de la función de costes, que se formula de forma distinta según que la empresa produzca uno o varios bienes.

2.2.2. Monopolio natural monoproducto

Condiciones de existencia (subaditividad de costes): la condición necesaria y suficiente es la subaditividad estricta de la función de costes, $\mathrm{CT}(\sum x_i) < \sum \mathrm{CT}(x_i)$, es decir, una sola empresa produce el *output* total a menor coste que cualquier reparto entre varias. Hablar de subaditividad equivale, por tanto, a hablar de monopolio natural.

▪ *Relación con la tecnología*: se requiere algún grado de no convexidad de la función de costes. Las economías de escala son condición suficiente pero no necesaria, pues la subaditividad puede existir con deseconomías de escala si hay costes fijos. La escala mínima eficiente (EME) debe ser grande en relación con el mercado[9].

▪ *Deseabilidad social*: la subaditividad es condición necesaria y suficiente para la deseabilidad social desde la eficiencia productiva, pero no desde la eficiencia asignativa.

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A17.6), se compara el Cme de una empresa, $\mathrm{Cme}_1(X)$, con el de dos empresas que se reparten la producción, $\mathrm{Cme}_{1+2}(X)$. La subaditividad se extiende más allá del tramo de economías de escala, que termina en X_{EME}, hasta la intersección de ambas curvas (punto A, en X_A).

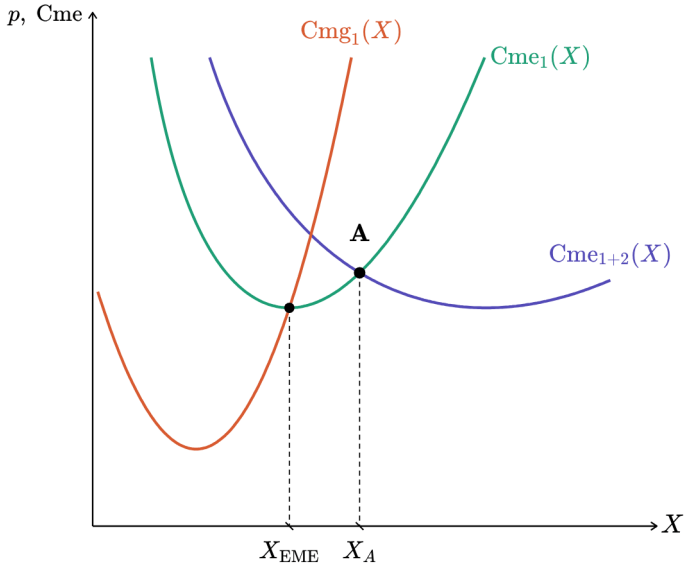


Figura A17.6: Monopolio natural monoproducto. La subaditividad de costes se extiende más allá de la escala mínima eficiente, hasta la intersección de $\mathrm{Cme}_1(X)$ y $\mathrm{Cme}_{1+2}(X)$ (punto A).

[9] Así se explica que antes hubiera más monopolios naturales, porque, conforme crece la demanda, la EME se reduce en relación con el mercado.

Condiciones de sostenibilidad: la cuestión es si el monopolio natural puede sobrevivir sin que competidores lo desplacen. Se supone libre entrada y la misma tecnología para todas las empresas, y se distingue según que el monopolista reaccione o no a la entrada. Salvo en la lectura de mercado impugnable del caso 1, se supone que el entrante comparte el mercado con el monopolista en lugar de desplazarlo por completo.

1. *Deseable y sostenible* (demanda a la izquierda del Cme mínimo, tramo de rendimientos crecientes): la demanda no da para que un entrante venda más y, con costes idénticos, compartir el mercado le haría perder dinero. El beneficio del monopolista depende del supuesto sobre la entrada:

- *La entrada supone repartir el mercado* (supuesto de los casos 2 y 3): el monopolio es sostenible reaccione o no a la entrada y obtiene beneficios positivos ($p > \text{Cme}$).

- *Mercado impugnable* (Baumol, Panzar y Willig, 1982): si el entrante puede fijar un precio algo menor y atender toda la demanda antes de que el monopolista reaccione, el monopolio solo es sostenible con $p = \text{Cme}$ y beneficio nulo (véase el tema A15, apartado 2.2.2).

2. *Deseable pero no necesariamente sostenible* (demanda entre Cme mínimo e intersección de curvas):

- *Teoría tradicional* (monopolista no reacciona): como el entrante no está obligado a atender toda la demanda, puede cobrar un p menor que el del monopolista pero superior al coste medio mínimo, y el mercado pasa a ser un duopolio.

- *Teoría moderna* (monopolista reacciona): puede disuadir bajando p hasta el Cme mínimo. Si la amenaza es creíble, el entrante no entra (beneficio potencial nulo).

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A17.7), la demanda $D^*(X)$ corta a $\text{Cme}_1(X)$ en X^*, entre X_{EME} y el punto A, y el precio del monopolista, p^*, supera al coste medio mínimo, p_{min}.

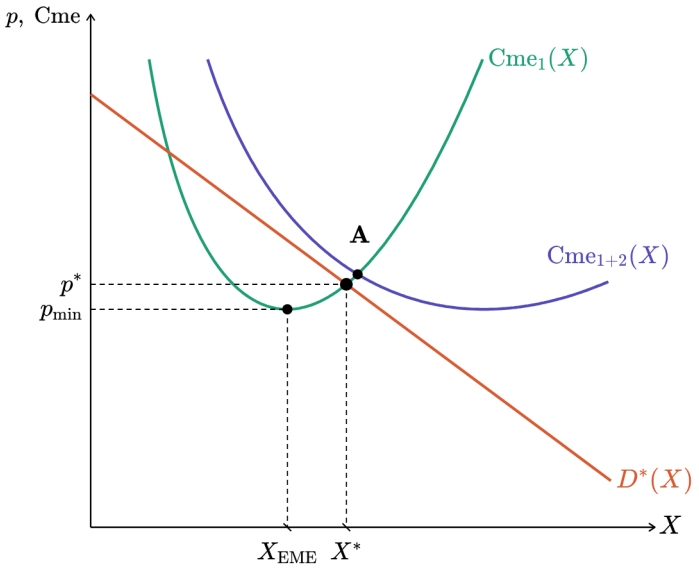


Figura A17.7: Monopolio natural deseable pero no necesariamente sostenible. La demanda $D^*(X)$ corta a $\text{Cme}_1(X)$ en X^*, entre la escala mínima eficiente, X_{EME}, y el punto A. Un entrante puede ofrecer un precio inferior a p^* y superior a p_{min}, y el monopolista solo lo disuade si reacciona bajando el precio hasta el coste medio mínimo, p_{min}.

3. *No deseable e insostenible* (la demanda corta a $\text{Cme}_1(X)$ más allá de la intersección de las curvas, donde $\text{Cme}_{1+2}(X) < \text{Cme}_1(X)$ y los costes ya no son subaditivos):

Incluso reaccionando, el monopolista descubre que al bajar el precio alcanza un punto donde le resulta más rentable compartir el mercado (la curva $\text{Cme}_{1+2}(X)$ está por debajo). El competidor anticipa esta reacción y entra, con el mismo resultado de duopolio.

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A17.8), la demanda $D'(X)$ corta a $\text{Cme}_1(X)$ en X', a la derecha del punto A, con el precio p', y a esa cantidad dos empresas producirían con un coste medio menor, $\text{Cme}_{1+2}(X')$.

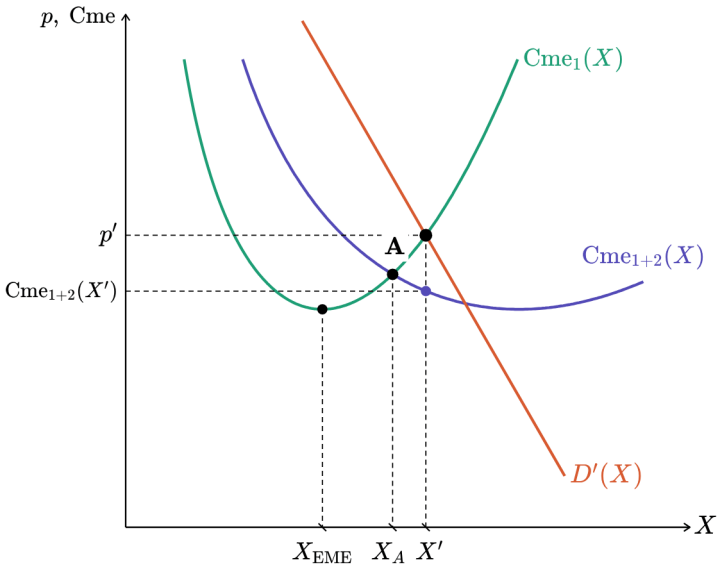


Figura A17.8: Caso insostenible. La demanda $D'(X)$ corta a $\text{Cme}_1(X)$ en X', más allá del punto A, donde dos empresas producen con menor coste medio que una, $\text{Cme}_{1+2}(X') < p'$, y el mercado evoluciona hacia el duopolio.

2.2.3. Monopolio natural multiproducto

Condiciones de existencia: en la empresa multiproducto las economías de escala de cada bien ya no bastan como condición suficiente de subaditividad. La razón es que el coste de la empresa única depende también de producir los bienes juntos (economías o deseconomías de alcance), y no solo de producir mucho de cada uno. Basta, por ejemplo, la complementariedad de costes en sentido amplio de Sharkey (1982), que incluye el efecto del propio bien (condición suficiente, no necesaria):

$$\text{CT}(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) - \text{CT}(\mathbf{x}^1) \geq \text{CT}(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3) - \text{CT}(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^3)$$

donde $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ y $\mathbf{x}^3$ son vectores de producción cualesquiera. La condición exige que el coste marginal de producir una unidad adicional de un bien sea menor cuanto más se produzca de ese mismo bien o de los demás.

Condiciones de sostenibilidad: cuando un bien financia a otros, su precio deja hueco para que un rival lo produzca por separado y gane clientela cobrando menos. El monopolio multiproducto solo resiste la entrada, por tanto, si sus precios no contienen subsidios cruzados. Ello se comprueba con dos pruebas:

- *Prueba del coste incremental*: $p_i \cdot x_i \geq \text{CT}(\mathbf{x}) - \text{CT}(\mathbf{x}_{-i})$. Exige que el ingreso de cada bien cubra al menos el coste que añade su producción, de modo que no recibe subsidio de los otros.

- *Prueba de no aislamiento*: $p_i \cdot x_i \leq \text{CT}(x_i)$. Exige que ese ingreso no supere el coste de producir el bien aisladamente, de modo que no subsidia a los otros.

2.3. Una mención a la regulación de los monopolios naturales

La ineficiencia asignativa del monopolio justifica la intervención pública, pero la intervención adecuada depende de su origen. Si el monopolio no es natural y se sostiene sobre barreras artificiales, el remedio es eliminarlas mediante la liberalización y la defensa de la competencia. Si es natural, en cambio, no conviene desmantelarlo, porque produce a los menores costes posibles, y la cuestión pasa a ser cómo regularlo, lo que depende de que sea o no sostenible frente a la entrada.

> La teoría de la regulación óptima, tradicional (reglas de precios) y moderna (información asimétrica, competencia y plataformas), se desarrolla en el tema A20, y las barreras a la entrada y los mercados impugnables, en el tema A15, apartados 2.2.1 y 2.2.2. Este apartado aplica sus resultados al monopolio natural y remite allí para los programas de optimización y sus derivaciones.

2.3.1. Monopolio natural sostenible: regulación de precios

El monopolio natural sostenible es el caso de referencia. Sin regulación, el monopolista fijaría un precio muy por encima del coste marginal, de modo que la regulación consiste en fijar el precio. Las reglas se ordenan según la prioridad que se dé a la eficiencia asignativa frente a la viabilidad financiera de la empresa.

Regulación *first best*: se obliga al monopolista a fijar $p = \text{Cmg}$, lo que restablece la eficiencia asignativa. Dónde se sitúe ese precio respecto al coste medio depende de si la demanda corta al coste marginal en el tramo decreciente o en el creciente del coste medio. Caben dos casos:

- *Tramo decreciente*: el monopolista incurre en pérdidas ($p < \text{Cme}$) que han de cubrirse con una subvención o mediante empresa pública. La cobertura de las pérdidas plantea, sin embargo, problemas de información (la cuantía), de financiación (impuestos distorsionantes) y de riesgo moral (la empresa que sabe que sus pérdidas se cubren no reduce costes).

- *Tramo creciente*: obtiene beneficios extraordinarios ($p > \text{Cme}$) que cabe extraer con impuestos de suma fija, difíciles de aplicar porque el regulador desconoce la cuantía del beneficio extraordinario (problema de información) y expuestos a la búsqueda de rentas del regulador.

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A17.9), el monopolista sin regular produce X_M, donde $\text{Img}(X) = \text{Cmg}(X)$, y cobra p_M (punto 0). La tarificación al coste marginal lleva al punto 1, donde la demanda, $D(X)$, corta a $\text{Cmg}(X)$, con la cantidad X_1 y un precio p_1 inferior a $\text{Cme}(X_1)$. Ese punto corresponde al caso del tramo decreciente, y el área sombreada mide las pérdidas.

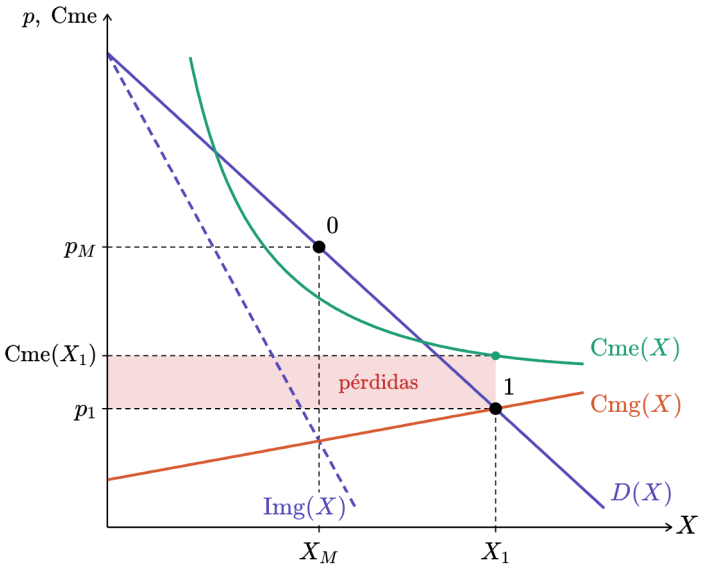


Figura A17.9: Regulación *first best*. La tarificación al coste marginal (punto 1) es eficiente pero genera pérdidas para la empresa (área sombreada), frente al óptimo del monopolista sin regular (punto 0).

Regulación *second best*: se sacrifica algo de eficiencia para que la empresa sea viable. Se busca el mayor bienestar posible sin que la empresa pierda dinero, lo que suprime el beneficio extraordinario pero deja el normal.

La solución básica es el precio igual al coste medio, $p = \text{Cme}$. Es sencilla, pero tiene tres inconvenientes: puede no existir si la demanda no corta al coste medio, mantiene un precio superior al competitivo y, como los costes se cubren siempre, no incentiva su reducción (regulación *cost-plus*).

Gráficamente, en el plano cantidad-precio (figura A17.10), la tarificación al coste medio lleva al punto 2, donde la demanda, $D(X)$, corta a $\text{Cme}(X)$, con la cantidad X_2 y el precio p_2. Frente a la tarificación al coste marginal (punto 1, con X_1 y p_1), se pierde el triángulo sombreado entre la demanda y el coste marginal, desde X_2 hasta X_1.

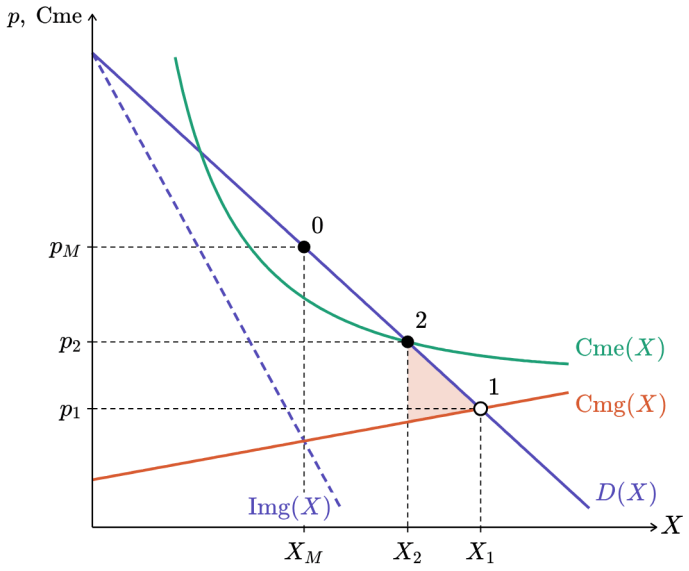


Figura A17.10: Regulación *second best*. La tarificación al coste medio (punto 2) evita las pérdidas, pero con una cantidad inferior a la eficiente (punto 1) y una pérdida irrecuperable de eficiencia (área sombreada).

Los refinamientos se acercan más al óptimo:

- *Tarifa en dos partes*: $T(x) = F + p \cdot x$, con $p = \text{Cmg}$ y una cuota fija que cubre los costes fijos. Hace eficiente el consumo marginal, pero excluye a los consumidores de baja disposición a pagar.

- *Tarifas pico-valle*: cargan el coste de la capacidad a los consumidores de punta y, con rendimientos constantes a escala, hacen compatible $p = \text{Cmg}$ con el beneficio nulo.

- *Loeb-Magat* (1979): el mecanismo hace al monopolista elegir por sí mismo $p = \text{Cmg}$ cediéndole como subvención el excedente del consumidor, a un coste fiscal y distributivo que hace inviable el mecanismo.

- *Precios de Ramsey-Boiteux*: para el monopolio multiproducto, reparten los costes comunes cargando un margen relativo, $(p_i - \text{Cmg}_i)/p_i$, inversamente proporcional a la elasticidad-precio de cada producto si sus demandas son independientes. Los productos de demanda más inelástica soportan, por ello, una carga mayor, con el consiguiente riesgo de regresividad.

Regulación *third best*: sin fijar directamente el precio, se acota la rentabilidad o la senda de precios de la empresa. Entre este tipo de soluciones, destacan:

- *Regulación de la tasa de beneficio*: pone un tope a la rentabilidad del capital. Exige poca información, pero provoca el efecto Averch y Johnson (1962), la sobrecapitalización, porque, si el rendimiento autorizado supera al coste del capital, invertir más eleva el beneficio permitido, y la empresa acumula más capital del que minimizaría sus costes.

- *Límite de precios IPC − X* (Littlechild, 1983): fija una senda máxima de precios durante el periodo regulatorio, desvinculada de los costes propios. Incentiva así la eficiencia productiva, a costa de la dificultad de fijar el factor X y del riesgo de deterioro de la calidad.

▪ *Competencia por comparación* (Shleifer, 1985): retribuye a cada empresa según los costes de empresas comparables, reproduciendo artificialmente la disciplina competitiva.

> El modelo de Laffont y Tirole se desarrolla en el tema A20, apartado 2.2.2, y el efecto trinquete, en el apartado 2.2.3 del mismo tema. La lectura del modelo como problema de agencia se recoge en los temas A13, apartado 3.4.3, y A15, apartado 2.3.3.

Información asimétrica: las reglas anteriores suponen que el regulador conoce los costes del monopolista. Cuando no los conoce, y la empresa puede reducirlos con un esfuerzo que el regulador tampoco observa, la regulación óptima es un menú de contratos (Laffont y Tirole, 1986). La empresa eficiente elige un contrato de precio fijo, que la incentiva plenamente pero le deja una renta informacional; la ineficiente, el contrato de menor potencia, próximo al de reembolso de costes, con bajo incentivo (esfuerzo distorsionado a la baja) pero sin renta.

El *trade-off* fundamental de la regulación es, por tanto, el de incentivos frente a extracción de rentas, y su principal problema dinámico el efecto trinquete, que exige un compromiso creíble del regulador.

Cuando solo la red es monopolio natural, la regulación se extiende al precio de acceso que pagan los competidores que prestan servicios sobre ella (tema A20, apartado 3.3.2).

2.3.2. Monopolio natural monoproducto no sostenible: regulación de precios y acceso

Si el monopolio es deseable pero no sostenible, la libre entrada lleva a un mercado compartido que duplica los costes fijos, aunque una sola empresa produciría más barato. La regulación ha de actuar, por ello, sobre dos variables, el acceso al mercado y el precio.

> La competencia por el mercado se desarrolla en el tema A20, apartados 2.3.1 y 3.3.2, y el diseño de las subastas con las que se licita, en el tema A14, apartado 3.

▪ *Reserva del mercado y regulación del precio*: el regulador cierra la entrada mediante una licencia o concesión exclusiva, que evita la duplicación de costes, y a cambio fija el precio con las reglas anteriores. La barrera legal es aquí eficiente, porque protege la subaditividad, pero deja al regulador ante los problemas de información de esas reglas.

▪ *Competencia por el mercado* (Demsetz, 1968): en lugar de fijar el precio, el regulador licita periódicamente el derecho exclusivo a explotar el mercado y lo adjudica a quien se comprometa a cobrar menos. La competencia entre licitadores sustituye a la que no conviene que se dé después y, si es intensa, lleva el precio al coste medio. Sin embargo, está limitada por la incompletitud de los contratos de concesión y la ventaja del incumbente en las relicitaciones (Williamson, 1976), y por el riesgo de colusión entre los licitadores.

Si el monopolio no es deseable (caso 3), no hay nada que proteger. La entrada reduce los costes y el regulador debe dejarla actuar.

2.4. Conclusiones

El poder de mercado no se agota en la elección de un precio único. La discriminación de precios permite al monopolista apropiarse de parte o de todo el excedente del consumidor. Su efecto sobre la eficiencia depende de la producción, que la discriminación perfecta lleva al nivel competitivo,

mientras que la de tercer grado solo mejora el bienestar si la aumenta. Con bienes duraderos, en cambio, el monopolista compite con su propia producción futura.

La subaditividad de costes define el monopolio natural, que puede ser deseable sin ser sostenible frente a la entrada. Si es sostenible, se regula su precio, con reglas que ponderan la eficiencia asignativa frente a la viabilidad de la empresa y que la información asimétrica convierte en un menú de contratos. Si no lo es, hay que regular también el acceso al mercado o licitarlo. El apartado 3 extiende el modelo al lado de la demanda y a la producción conjunta.

3. Otros monopolios

El modelo del monopolio se traslada también al lado de la demanda, con un único comprador (monopsonio), al mercado en el que un único vendedor se enfrenta a un único comprador (monopolio bilateral) y al monopolista que opera en varias dimensiones, con varios productos o varias plantas.

3.1. Monopsonio

Origen: el modelo traslada al lado de la demanda el de monopolio de oferta.

Idea: el *monopsonio* es la estructura simétrica del monopolio de oferta, en la que un único comprador se enfrenta a una oferta del bien o factor de elasticidad finita, de modo que la cantidad que decide comprar determina el precio que ha de pagar. El caso típico es el de un factor productivo: un gran empleador en un mercado de trabajo local, un distribuidor dominante frente a los productores agrarios o el Estado como único demandante de armamento pesado.

Planteamiento: el comprador se enfrenta a una oferta creciente del factor, $w(L)$ con $w' > 0$, y elige la cantidad que maximiza su beneficio:

$$\max_{L} \ \pi = p \cdot f(L) - w(L) \cdot L$$

donde L es la cantidad del factor, $f(L)$ la función de producción, p el precio del producto, dado, y $w(L)$ la oferta inversa del factor.

CPO: el valor del producto marginal iguala al gasto marginal, que supera al precio de oferta porque, al comprar más, el monopsonista eleva el precio de todas las unidades:

$$\underbrace{p \cdot \frac{df}{dL}}_{\text{VPmg}_L} = \underbrace{w(L) + \frac{dw}{dL} \cdot L}_{\text{gasto marginal}} \ > \ w(L)$$

El monopsonista contrata menos cantidad y paga un precio menor que en competencia, y la diferencia entre el valor del producto marginal y el precio pagado es la *explotación monopsonística* del factor. Como el coste privado del factor para el monopsonista (su gasto marginal) supera al social (su precio de oferta), la cantidad empleada es inferior a la eficiente, con una pérdida de bienestar análoga a la del monopolio.

CSO: la pendiente del valor del producto marginal debe ser menor que la del gasto marginal (el primero corta al segundo desde arriba), $p\,f'' < 2w' + w''L$, lo que se cumple con $f'' < 0$ y oferta lineal o convexa.

Extensiones: el monopsonio invierte el signo de la regulación. Los remedios son precios mínimos y no máximos (el salario mínimo, que en un mercado monopsonístico puede aumentar el empleo en lugar de reducirlo), la negociación colectiva como contrapeso y las normas de contratación de la distribución. Sus aplicaciones al mercado de trabajo se desarrollan en los temas A25, apartado 1.4.3, que lo representa gráficamente (figura **?@fig-a2510-monopsonio**), y A27.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: extiende el análisis del poder de mercado al lado de la demanda con el mismo aparato que el monopolio de oferta. Muestra también que la ineficiencia procede del poder de mercado, no del lado del mercado en que se ejerce, de ahí que la regulación adecuada invierta su signo.

- *Limitaciones*: supone un único comprador que no discrimina entre vendedores y conoce la curva de oferta, cuando en la práctica el poder de compra suele repartirse entre unos pocos compradores. Además, el efecto favorable de un precio mínimo depende de que no se fije muy por encima del nivel competitivo.

3.2. Monopolio bilateral

Origen: el modelo combina el monopolio de oferta y el monopsonio. Su resolución remite a la teoría de la negociación (solución de Nash) del tema A27.

Idea: existe *monopolio bilateral* cuando un único vendedor se enfrenta a un único comprador, como un trabajador de cualidades únicas y la única empresa que las necesita, un fabricante y su distribuidor exclusivo o un sindicato y una patronal en la negociación sectorial.

Razonamiento: cada parte, actuando por su cuenta, querría el resultado de su propio monopolio. El vendedor querría el precio y la cantidad del monopolio de oferta; el comprador, los del monopsonio. Ambos prefieren una cantidad inferior a la competitiva, aunque en general no la misma, y difieren en el precio. De ahí que entre los dos precios extremos la teoría no determine el resultado, que depende del poder de negociación de las partes, de su paciencia y de sus alternativas exteriores.

Si las partes negocian de forma cooperativa, tienen en cambio un interés común en maximizar el excedente conjunto, lo que las lleva a la cantidad competitiva, y a repartirse después el excedente mediante el precio. El resultado es entonces eficiente aunque su distribución sea indeterminada. En el monopolio bilateral, la eficiencia depende de que exista negociación y no de la estructura del mercado.

Extensiones: por eso, el monopolio bilateral es el terreno natural de la teoría de la negociación (solución de Nash) y de los modelos de negociación salarial (tema A27). En la práctica, la regulación se limita a fijar el marco de la negociación y a ofrecer arbitraje.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: muestra que, cuando ambos lados del mercado tienen poder, la estructura del mercado no basta para determinar el precio, y enlaza así la teoría de los mercados con la de la negociación. Señala, además, que la negociación cooperativa puede restablecer la cantidad eficiente.

- *Limitaciones*: deja el precio indeterminado dentro de un intervalo, de modo que no predice el reparto del excedente sin una teoría adicional de la negociación. Supone, además, información completa, y si cada parte desconoce las valoraciones de la otra, la negociación puede fracasar o retrasarse, con la consiguiente pérdida de eficiencia.

3.3. Monopolios multidimensionales

El monopolista puede vender varios bienes en varios mercados (monopolio multiproducto o de producción conjunta) o producir un mismo bien en varias plantas para una demanda única (monopolio multiplanta). En el primer caso, la relación de demanda entre los bienes altera el poder de mercado, y en el segundo, la producción se reparte entre las plantas igualando sus costes marginales.

3.3.1. Monopolio multiproducto (producción conjunta): varios mercados

Idea: si el monopolista produce varios bienes[10], debe tener en cuenta las relaciones de demanda y de costes.

Planteamiento: con dos bienes, el monopolista fija ambos precios:

$$\max_{p_1,p_2} \pi = \sum_{i=1}^{2} p_i\, q_i(p_1,p_2) - \mathrm{CT}(q_1,q_2)$$

donde $q_i(p_1,p_2)$ es la demanda del bien i, que puede depender de los dos precios, p_i su precio y $\mathrm{CT}(q_1,q_2)$ el coste total conjunto, que puede no ser separable.

CPO: para cada bien, $q_i + (p_i - \mathrm{Cmg}_i)\dfrac{\partial q_i}{\partial p_i} + (p_j - \mathrm{Cmg}_j)\dfrac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0$, con $\mathrm{Cmg}_i = \partial \mathrm{CT}/\partial q_i$. En términos del índice de Lerner,

$$I_{L,i} = \frac{1}{|\varepsilon_{ii}|}\left(1 + I_{L,j}\,\frac{\mathrm{IT}_j}{\mathrm{IT}_i}\,\varepsilon_{ji}\right)$$

donde ε_{ji} es la elasticidad cruzada de la demanda del bien j respecto de p_i e $\mathrm{IT}_i = p_i q_i$. El último término recoge el efecto del precio de un bien sobre las ventas del otro, que un monopolista de un solo bien no tendría en cuenta. Con demandas independientes ($\varepsilon_{ji} = 0$) y costes separables, el precio de cada bien se fija como en un monopolio aislado.

CSO: el beneficio ha de ser cóncavo en los precios.

Solución: depende de las relaciones de demanda y de costes:

- *Demandas independientes, costes no separables*: existen ganancias potenciales de la producción conjunta (economías de alcance, aprendizaje). El monopolista puede entonces reducir el precio de un bien para aumentar la producción agregada y abaratar el otro, lo que abre la posibilidad de subsidios cruzados[11].

- *Demandas dependientes, costes separables*: el signo de la relación de demanda determina el poder de mercado. Si los bienes son sustitutivos brutos ($\varepsilon_{ji} > 0$), el poder de monopolio aumenta, porque los consumidores no pueden escapar de un bien al otro sin seguir comprando al mismo vendedor, y el margen de cada bien supera al que fijaría un monopolista de ese bien solo, $I_{L,i} > 1/|\varepsilon_{ii}|$[12]. Si son complementarios brutos ($\varepsilon_{ji} < 0$), en cambio, el poder de monopolio disminuye, porque la reducción del precio de un bien expande la demanda de todos (las videoconsolas y sus juegos), lo que lleva al monopolista a fijar precios más bajos, $I_{L,i} < 1/|\varepsilon_{ii}|$, incluso con un precio

[10] Sigue siendo un monopolio multiproducto aunque los bienes tengan estructuras de costes distintas. La competencia monopolística (tema A18) exige, en cambio, varias empresas que venden variedades diferenciadas.
[11] Si el efecto aprendizaje es intenso, el monopolista podría fijar $p < \mathrm{Cmg}$ para un bien (subsidio cruzado).
[12] El monopolista "internaliza" la externalidad de fijar precios altos.

por debajo del coste marginal en uno de ellos. De nuevo, la complementariedad hace posibles los subsidios cruzados.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: muestra que el signo de la relación de demanda entre los bienes decide el poder de mercado del monopolista, que aumenta con sustitutivos y disminuye con complementarios, y explica los subsidios cruzados.

- *Limitaciones*: la regla de precios exige conocer las elasticidades cruzadas de las demandas y el coste conjunto, que puede no ser separable.

3.3.2. Monopolio multiplanta (cuasicártel): varias plantas y demanda única

> El mismo modelo describe el cártel del tema A19, apartado 2.1.1: las empresas que coordinan su producción se comportan como un único monopolista con varias plantas.

Idea: si el monopolista dispone de varias plantas con restricciones de capacidad y costes marginales crecientes, debe decidir cuánto producir en cada una.

Planteamiento: el monopolista maximiza el beneficio conjunto de sus plantas:

$$\max_{\{x_i\}} \pi = \mathrm{IT}(X) - \sum_i \mathrm{CT}_i(x_i)$$

donde x_i es la cantidad producida en la planta i, $X = \sum_i x_i$ la producción total, $\mathrm{IT}(X)$ el ingreso total del mercado, $\mathrm{CT}_i(x_i)$ la función de costes de la planta i y π el beneficio conjunto.

CPO: $\mathrm{Img}(X) = \mathrm{Cmg}_i = \mathrm{Cmg}_j$, el ingreso marginal del mercado iguala el coste marginal de cada planta. La producción total se fija donde el ingreso marginal del mercado iguala al coste marginal, como en el monopolio uniplanta, y se reparte entre plantas de modo que la última unidad cueste lo mismo en todas. Si una planta tuviera un coste marginal menor, trasladar producción hacia ella reduciría el coste total sin alterar el ingreso.

CSO: el ingreso marginal ha de ser decreciente y los costes marginales de cada planta, no decrecientes.

Solución: la planta con ventaja en costes produce más si los costes marginales son crecientes, y toda la producción si son constantes y distintos y no hay límite de capacidad (solución de esquina).

Desarrollo gráfico: el equilibrio del monopolio multiplanta se representa en el plano cantidad-precio (figura A17.11):

1. *Costes marginales de cada planta*, $\mathrm{Cmg}_1(x_1)$ y $\mathrm{Cmg}_2(x_2)$: recogen lo que cuesta la última unidad en cada planta y son crecientes, por sus restricciones de capacidad.

2. *Coste marginal agregado*, $\mathrm{Cmg}(X)$: es la suma horizontal de los anteriores, porque a cada nivel de coste marginal suma lo que producen todas las plantas.

3. *Demanda*, $D(X)$, e *ingreso marginal*, $\mathrm{Img}(X)$: son los del mercado, como en el monopolio uniplanta.

4. *Equilibrio*: la producción total, X_M, se fija donde $\text{Img}(X) = \text{Cmg}(X)$, y el precio, p_M, sobre la demanda (punto 0). Se reparte entre las plantas, x_1 y x_2, al nivel común de coste marginal $\text{Img}(X_M)$.

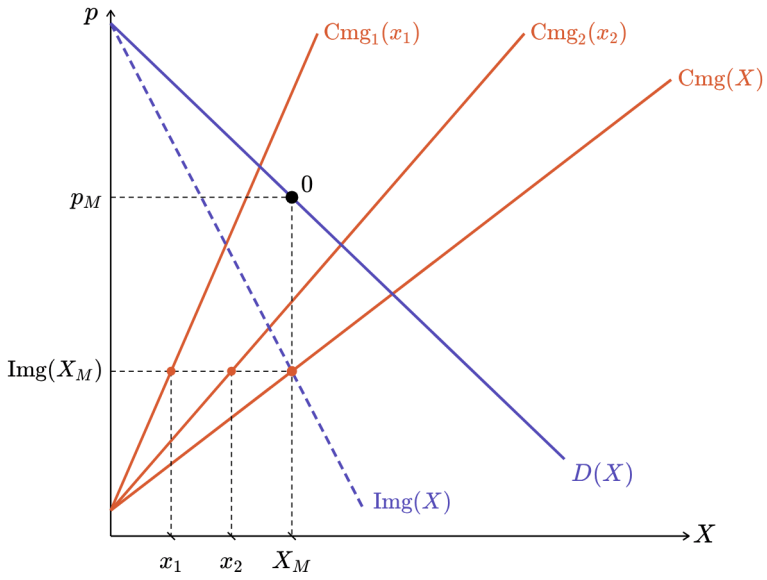


Figura A17.11: Monopolio multiplanta. El coste marginal agregado es la suma horizontal de los costes marginales de cada planta y la producción se reparte igualando los costes marginales.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: explica cómo se reparte la producción entre plantas, igualando sus costes marginales, y es la base del modelo del cártel (tema A19, apartado 2.1.1).

▪ *Limitaciones*: supone que todas las plantas están bajo un solo control, que conoce los costes de cada una. Aplicado al cártel, el reparto no es estable, porque cada miembro tiene incentivos para desviarse (tema A19, apartado 2.1.1).

Conclusiones

El monopolio es la referencia frente a la que se miden las pérdidas de eficiencia de la competencia imperfecta. El monopolista iguala el ingreso marginal al coste marginal, opera en el tramo elástico de la demanda y fija un margen igual a la inversa de la elasticidad (índice de Lerner), sin función de oferta. El resultado es una ineficiencia asignativa (el triángulo de Harberger), a la que se suman la explotación de los factores, la ineficiencia-X y los recursos gastados en conseguir o defender la posición (Tullock, 1967; Posner, 1975). No todo monopolio es igual de dañino, sin embargo. La discriminación perfecta restablece la cantidad eficiente y el monopolio natural produce al menor coste posible, de modo que la política adecuada depende del tipo de monopolio. El mismo análisis se traslada al lado de la demanda (monopsonio), donde el comprador único contrata menos y paga menos que en competencia, y al monopolio bilateral, cuyo resultado depende de la negociación.

El monopolio ocupa el extremo opuesto a la competencia perfecta, con la que comparte los programas de la empresa (tema A16), y entre ambos se sitúan las estructuras en que el poder de mercado se reparte, la competencia monopolística y el oligopolio (temas A18 y A19). La discriminación de segundo grado es un problema de autoselección, el mismo que resuelve la criba con información asimétrica (tema A13). Por su parte, las barreras a la entrada que sostienen el monopolio son objeto de la organización industrial (tema A15), y la regulación del monopolio natural, de las reglas de precios a los menús de contratos de Laffont y Tirole, busca el mejor resultado posible cuando el regulador no conoce los costes (tema A20).

De Loecker, Eeckhout y Unger (2020) estiman un fuerte aumento de los márgenes medios de las empresas estadounidenses desde 1980, un resultado que ha avivado el debate sobre la concentración y la política de competencia. En los mercados digitales, donde las economías de red favorecen a una sola plataforma, la Unión Europea ha optado por obligaciones *ex ante* para los grandes guardianes de acceso (Reglamento de Mercados Digitales, 2022) en lugar de esperar a probar el abuso caso a caso. Frente a ello, sigue abierta la pregunta schumpeteriana de si el poder de mercado temporal es el precio de la innovación (apartado 1.4.2).

Anexo. Comparación de regímenes de precios

La tabla A17.1 resume los resultados del apartado 2.1 para la demanda lineal $p = a - X$ y el coste marginal constante c, con $a > c$. Para la competencia perfecta, el monopolio simple y la discriminación de primer grado las magnitudes son exactas. Para el segundo y el tercer grado, que dependen de la distribución de tipos o grupos, se indica su posición cualitativa.

Tabla A17.1: Competencia perfecta, monopolio simple y discriminación de precios con demanda lineal y coste marginal constante.

Régimen	Cantidad	Precio	Excedente del consumidor	Beneficio	Pérdida irrecuperable
Competencia perfecta	$a - c$	c	$(a-c)^2/2$	0	0
Monopolio simple	$(a-c)/2$	$(a+c)/2$	$(a-c)^2/8$	$(a-c)^2/4$	$(a-c)^2/8$
Discriminación de 1.er grado	$a - c$	de a a c por unidad	0	$(a-c)^2/2$	0
Discriminación de 2.º grado	intermedia	$p \geq c$ más cuota	intermedio	intermedio	intermedia (nula con tipos idénticos)
Discriminación de 3.er grado	igual a la del monopolio simple; mayor si abre mercados	distinto por grupo	intermedio	intermedio	mayor que en monopolio simple si la producción no sube

La lectura es la siguiente. La competencia perfecta maximiza el excedente total y lo entrega íntegro a los consumidores. El monopolio simple, en cambio, produce la mitad, transfiere al productor una parte del excedente y destruye otra. Su beneficio es la mitad del excedente competitivo, y la pérdida irrecuperable, la cuarta parte. La discriminación perfecta restablece la cantidad y el excedente total de la competencia, pero invierte su reparto. Los grados segundo y tercero se sitúan entre ambos extremos en el reparto del excedente y muestran que la relación entre discriminación y eficiencia no es monótona. Extraer excedente puede exigir producir más (la cuota de la tarifa en dos partes) o solo redistribuir la misma producción entre grupos (tercer grado con demandas lineales), y únicamente en el primer caso se reduce la pérdida irrecuperable.

A18. Competencia monopolística

Análisis de mercados (III). Diferenciación de productos: la teoría de la competencia monopolística y otros desarrollos.

Introducción

Introducción común. Los temas A15 a A21 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A15**. Ordena los mercados en cuatro estructuras según el poder de mercado (competencia perfecta, competencia monopolística, oligopolio y monopolio) y resume la evolución de su análisis, de Cournot y Marshall a la nueva organización industrial y la teoría de la regulación.

La **competencia monopolística** es una estructura de mercado intermedia cuyos bienes pueden distinguirse unos de otros por muchos rasgos, como el lugar de venta, la calidad, el diseño o la presentación. Esta teoría nace de la insatisfacción con la dicotomía entre competencia perfecta y monopolio, incapaz también de conciliar la competencia con los costes decrecientes (Sraffa, 1926).

Buena parte de los bienes de consumo, de la restauración a la ropa o los automóviles, se vende en mercados de este tipo. Cada empresa tiene cierto poder sobre el precio de su variedad, pero la libre entrada de nuevas variedades limita sus beneficios. En el equilibrio de largo plazo de Chamberlin (1933), el beneficio extraordinario desaparece y cada empresa produce por debajo de su escala eficiente, el **exceso de capacidad**, que es el coste de ofrecer a los consumidores más variedad.

Antes, Hotelling (1929) había planteado la diferenciación en el espacio, con dos tiendas en una calle que tienden a situarse en el centro, el **principio de diferenciación mínima**, que reaparece en la competencia electoral (tema A24). A partir de los años setenta, el modelo de **preferencia por la variedad** de Dixit y Stiglitz (1977) dio a la teoría una segunda vida, al convertirse en la pieza central de la nueva teoría del comercio internacional de Krugman (1979b), que explica el comercio intraindustrial entre países parecidos (tema B06, apartado 2.1), y de los modelos de crecimiento endógeno con variedades de bienes intermedios de Romer (1990) (tema A44). La publicidad y la información sobre los productos, que la teoría analiza como formas de diferenciación, siguen siendo centrales en el análisis de los mercados de consumo.

El tema estudia la competencia monopolística siguiendo el orden en que se desarrolló la teoría:

- *Primera generación*: los modelos de diferenciación horizontal en su enfoque espacial (Hotelling, 1929) y no espacial (Chamberlin, 1933), y la decisión de publicidad (Dorfman y Steiner, 1954).

- *Segunda generación*: los modelos de diferenciación horizontal neohotellianos (Lancaster, 1966; Salop, 1979) y neochamberlinianos (Dixit y Stiglitz, 1977; Krugman, 1979b).

- *Otros desarrollos*: la diferenciación vertical, con los modelos de competencia en calidad (Shaked y Sutton, 1982; 1983), y la informacional, con la distinción entre bienes de búsqueda y de experiencia (Nelson, 1970) y el papel de la publicidad en cada uno (Butters, 1977; Schmalensee, 1982).

1. Fundamentos de las teorías sobre la competencia monopolística

Los modelos de primera generación, el espacial de Hotelling (1929) y el no espacial de Chamberlin (1933), parten de un mismo concepto, la diferenciación de producto, que se define en primer lugar. La sección se cierra con la publicidad, el instrumento con el que la empresa crea y mantiene esa diferenciación.

1.1. Concepto de diferenciación

Un producto está **diferenciado** cuando los consumidores no consideran sus variedades sustitutivos perfectos, de modo que cada empresa conserva parte de su clientela aunque su precio sea algo mayor que el de las rivales. La diferenciación puede ser de dos tipos.

Diferenciación horizontal: se da cuando, a igualdad de precio, unos consumidores prefieren una variedad y otros la otra. No existe una ordenación de calidad compartida por todos, sino gustos distintos (el color de un coche, la localización de una tienda, el sabor de un refresco…). La teoría económica la modeliza con dos enfoques:

- *Enfoque espacial* (o de direcciones): las variedades de un mismo bien se representan como puntos de un espacio continuo de características, y cada consumidor ocupa en él una posición, su "localización", que marca la variedad que más le gusta. De las variedades a la venta elige la más próxima a esa posición, con la corrección que impone el precio. Este enfoque corresponde a Hotelling y a sus continuadores (Lancaster, Salop).

- *Enfoque no espacial* (o de consumidor representativo): las preferencias se definen directamente sobre el conjunto de bienes diferenciados, que entran como tales en la función de utilidad ("los bienes son bienes"). Los bienes son sustitutivos imperfectos y el consumidor representativo reparte su gasto entre ellos, porque la diversidad le reporta utilidad por sí sola. Este enfoque corresponde a Chamberlin y a Dixit-Stiglitz.

Diferenciación vertical: se da cuando, a igualdad de precio, todos los consumidores prefieren la misma variedad, porque existe una ordenación de calidad compartida (un coche más seguro, un ordenador más rápido…). Los consumidores solo difieren en cuánto están dispuestos a pagar por la calidad, normalmente porque difieren en renta, de modo que la variedad de menor calidad solo se vende si su precio es suficientemente menor. Esta diferenciación corresponde a los modelos de competencia en calidad de Shaked y Sutton (apartado 3.1).

A estos dos tipos se añade la *diferenciación informacional*, que procede de lo que los consumidores saben de los productos y no de sus características (apartado 3.2).

1.2. Enfoque espacial: modelo de la ciudad lineal (Hotelling, 1929)

Origen: Harold Hotelling (1929) introdujo el enfoque espacial con el ejemplo de dos vendedores en una calle. Claude d'Aspremont, Jean Gabszewicz y Jacques-François Thisse (1979) corrigieron su resultado al mostrar que con costes de transporte lineales el equilibrio puede no existir.

Idea: los niveles de características se representan como localizaciones geográficas, de modo que las variedades se diferencian por su distancia al consumidor. Cuando una empresa decide dónde

situarse, decide en realidad qué grado de característica va a producir, y la rivalidad es sobre todo local, entre empresas vecinas, por lo que el mercado se compone de oligopolios solapados[1].

1.2.1. Supuestos

Entorno: el mercado es una calle de longitud unitaria. La calle es solo un tramo de un espacio de características más amplio. Que el tramo esté acotado (p. ej. por costes fijos)[2] recoge que la oferta no puede cubrir todas las variedades concebibles.

Agentes:

- *Empresas*: son dos, situadas en la calle en los puntos $z_1 = a$ y $z_2 = 1-b$ (de modo que $1-a-b$ es la distancia entre ambas), y producen y venden un bien idéntico con el mismo coste unitario c. El bien solo puede adquirirse en cada punto de venta, por lo que la única diferencia entre ambas es la ubicación.

- *Consumidores*: ocupan toda la calle con densidad uniforme, cada uno en un punto concreto, y compran una sola unidad del bien o ninguna. Su precio de reserva queda holgadamente por encima de los precios, así que todos compran y el mercado queda cubierto[3].

Restricciones: la principal son los *costes de transporte*. Cada unidad de distancia que separa al consumidor del punto de venta le resta utilidad, y esa pérdida refleja lo que le cuesta conformarse con una variedad distinta de la que desearía. Los costes de transporte miden así la heterogeneidad de los gustos. Si son nulos, a los consumidores les da igual una variedad u otra y no valoran la diferenciación, y si son positivos, los gustos son heterogéneos. Hotelling los supuso lineales en la distancia, pero aquí se toman cuadráticos, td^2, porque con costes lineales el equilibrio puede no existir.

1.2.2. Modelo con localizaciones exógenas: competencia en precios

Planteamiento: con las localizaciones dadas, cada lado del mercado tiene su problema:

- *Demanda*: la demanda de cada empresa se obtiene a partir del *consumidor indiferente*, el situado en el punto $\hat{z}$ de la calle en el que le cuesta lo mismo comprar en una empresa que en la otra, precio más transporte:

$$p_1 + t(\hat{z} - z_1)^2 = p_2 + t(z_2 - \hat{z})^2$$

Todos los consumidores a su izquierda compran a la empresa 1 y todos los de su derecha a la empresa 2. Despejando $\hat{z}$ se obtiene la función de demanda de cada empresa, que tiene tres componentes:

$$x_1^d(a, b, p) = a + \frac{1-a-b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(1-a-b)}$$

[1] Un supermercado, por ejemplo, tiene pocos rivales a un paseo de distancia, aunque en un radio mayor encuentre muchos más.
[2] Formalmente, supone conjuntos de producción no convexos.
[3] Si hay consumidores que no compran, el análisis se complica (Tirole, 1988, cap. 7).

1. *Demanda cautiva* (o del patio de atrás): el primer término, a (b para la empresa 2, cuya demanda es simétrica), corresponde a los consumidores del tramo de calle que va del extremo más próximo hasta la empresa. Forman su clientela cautiva, porque la rival siempre les queda más lejos.

2. *Demanda compartida*: el segundo término equivale a la mitad del tramo comprendido entre las dos empresas, ya que, a precios iguales, cada una atrae a la mitad de esos consumidores.

3. *Demanda disputada* (o sensible al precio): el tercer término mide cuánto se mueve la demanda cuando los precios difieren. Con una rebaja, una empresa capta clientes del tramo intermedio, y capta más cuanto más bajos son los costes de transporte y más cerca está la rival.

▪ *Oferta*: cada empresa elige su precio maximizando el beneficio, tomando el precio de la rival como dado:

$$\max_{p_i} \ \pi_i = (p_i - c)\, x_i^d(a, b, p)$$

donde p_i es el precio de la empresa i, c el coste unitario común, $x_i^d(a, b, p)$ su función de demanda, que depende de las localizaciones, dadas por a y b, y de los precios $p = (p_1, p_2)$, y π_i su beneficio.

CPO: despejando p_i en $x_i^d - (p_i - c)/[2t(1 - a - b)] = 0$ se obtiene la *función de reacción* de cada empresa, su mejor respuesta al precio de la otra:

$$p_1 = \frac{p_2 + c}{2} + \frac{t(1 - a - b)(1 + a - b)}{2}$$
$$p_2 = \frac{p_1 + c}{2} + \frac{t(1 - a - b)(1 - a + b)}{2}$$

Las funciones de reacción son crecientes en el precio de la rival, con pendiente 1/2. Los precios son, por tanto, *complementarios estratégicos*, en el sentido de que cada empresa sube su precio cuando la rival sube el suyo, aunque menos que proporcionalmente. Además, la ordenada en el origen de las funciones de reacción crece con el coste de transporte y con la distancia entre las empresas.

CSO: $\partial^2 \pi_i / \partial p_i^2 = -1/[t(1 - a - b)] < 0$, es decir, el beneficio es estrictamente cóncavo en el propio precio, de modo que la función de reacción es efectivamente la mejor respuesta.

Equilibrio: en la intersección de ambas funciones de reacción se obtiene el equilibrio de Nash en precios, con sus beneficios:

$$p_1^* = c + t(1 - a - b)\left(1 + \frac{a - b}{3}\right) \qquad p_2^* = c + t(1 - a - b)\left(1 + \frac{b - a}{3}\right)$$

$$\pi_1^* = \frac{t}{2}(1 - a - b)\left(1 + \frac{a - b}{3}\right)^2 \qquad \pi_2^* = \frac{t}{2}(1 - a - b)\left(1 + \frac{b - a}{3}\right)^2$$

El precio de cada empresa es el coste marginal, c, más un margen proporcional al coste de transporte y a la distancia que la separa de la rival, corregido por su posición relativa. El beneficio, margen por cuota, se reparte a favor de la empresa con mayor patio de atrás, que fija un precio algo mayor y vende también más, porque su demanda de equilibrio es $x_1^* = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a-b}{3}\right)$. Dos casos ilustran el resultado:

▪ *Diferenciación máxima*: si las empresas se sitúan en los extremos ($a = b = 0$), $p_1^* = p_2^* = c + t$ y $\pi_1^* = \pi_2^* = t/2$. Aunque el bien es idéntico, cada empresa fija un margen igual al coste de transporte, porque para arrebatar un cliente a la rival debe compensarle todo el trayecto.

▪ *Diferenciación mínima*: si se sitúan en el mismo punto ($a+b = 1$), $p_1^* = p_2^* = c$ y los beneficios son nulos. Sin diferenciación, el resultado es el de Bertrand.

Desarrollo gráfico: la competencia en precios se representa en el plano localización-coste total de compra y en el plano de precios (p_1, p_2) (figura A18.1, paneles a y b):

1. *Coste total de comprar a cada empresa*, $p_1 + t(z - z_1)^2$ y $p_2 + t(z - z_2)^2$ (panel a): son parábolas con su mínimo, el precio de la empresa, en su localización.

2. *Consumidor indiferente*, $\hat{z}$ (panel a): está en el corte de ambas parábolas y divide la calle en la demanda de cada empresa, x_1^d y x_2^d.

3. *Funciones de reacción*, $p_1(p_2)$ y $p_2(p_1)$ (panel b): son rectas crecientes, porque los precios son complementarios estratégicos.

4. *Equilibrio*: el corte de las funciones de reacción es el equilibrio de Nash (punto 0), con precios p_1^* y p_2^*, y se sitúa sobre la bisectriz, $p_1 = p_2$, cuando las localizaciones son simétricas.

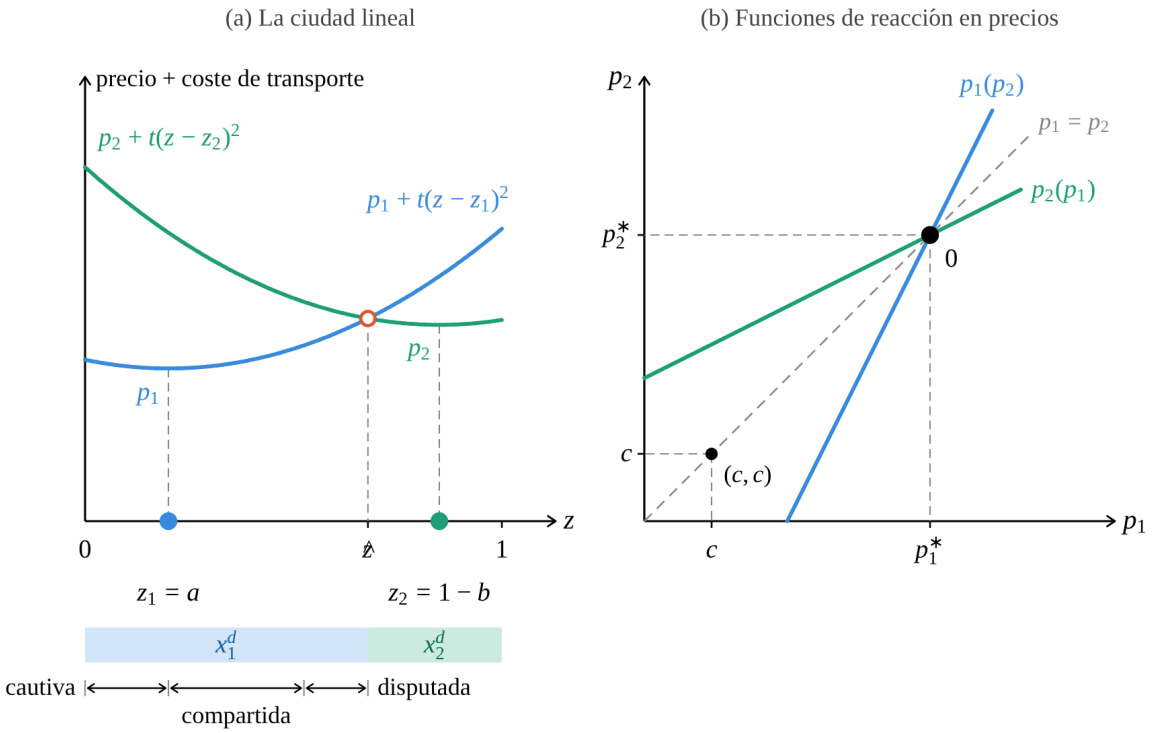


Figura A18.1: Modelo de Hotelling con costes de transporte cuadráticos y empresas en $z_1 = a$ y $z_2 = 1 - b$. En el panel (a), con $p_1 < p_2$, el coste total de comprar a cada empresa, $p_i + t(z - z_i)^2$, se iguala en el consumidor indiferente $\hat{z}$, que divide la calle en la demanda de la empresa 1, x_1^d (cautiva, compartida y disputada), y la de la empresa 2, x_2^d. En el panel (b), dibujado con localizaciones simétricas ($a = b$), las funciones de reacción $p_1(p_2)$ y $p_2(p_1)$, crecientes, se cortan sobre la bisectriz, en el equilibrio de Nash 0, (p_1^*, p_2^*).

Estática comparativa: cuanto mayor es la heterogeneidad de gustos t, más cautivos son los consumidores de la empresa más cercana y mayores los precios y los beneficios, y con $t = 0$ se recupera la paradoja de Bertrand. Del mismo modo, cuanto más alejadas están las empresas, mayor es el margen de ambas, porque la ubicación, única fuente de diferenciación en el modelo, es también la fuente del poder de mercado.

Gráficamente, un aumento de t o de la distancia entre las empresas desplaza hacia fuera ambas funciones de reacción y lleva el equilibrio, a lo largo de la bisectriz, hacia precios mayores. Con $t = 0$ ambas pasan por (c, c) y el equilibrio es el competitivo. En la calle, una rebaja de p_1 desplaza $\hat{z}$ hacia la derecha, tanto más cuanto más próximas estén las empresas.

1.2.3. Modelo con localizaciones endógenas: competencia en localización y precios

Planteamiento: si las empresas eligen también dónde situarse, el juego tiene dos etapas, primero las localizaciones y después los precios, y se resuelve hacia atrás:

▪ *Demanda*: es la del modelo con localizaciones exógenas, $x_i^d(a, b, p)$, ahora con localizaciones variables.

▪ *Oferta*: la segunda etapa es el modelo anterior, que da los precios de equilibrio como funciones de las localizaciones, $p_i^*(a, b)$. En la primera, cada empresa anticipa esos precios y elige su localización maximizando el beneficio resultante:

$$\max_a \ \pi_1(a, b) = (p_1^*(a, b) - c)\, x_1^d(a, b, p^*(a, b))$$

donde a es la localización de la empresa 1 y b la distancia de la empresa 2 al extremo opuesto de la calle, $p^*(a, b) = (p_1^*, p_2^*)$ los precios de equilibrio de la segunda etapa, c el coste unitario, x_1^d la demanda de la empresa 1 y π_1 su beneficio.

CPO (función de reacción en localización): el efecto de la localización sobre el beneficio se descompone en dos efectos de signo contrario:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = (p_1^* - c) \left[\underbrace{\frac{\partial x_1^d}{\partial a}}_{\text{efecto demanda}} + \underbrace{\frac{\partial x_1^d}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2^*}{\partial a}}_{\text{efecto estratégico}} \right]$$

1. *Efecto demanda* ($\partial x_1^d / \partial a > 0$): moverse hacia el centro del mercado, y por tanto hacia el rival, aumenta la cuota propia. El efecto empuja a los dos productores a situarse donde está la demanda, y es el que Hotelling recogió en su *principio de diferenciación mínima*. Si los dos lo siguen, sus puntos de venta terminan juntos en el medio de la calle.

2. *Efecto estratégico* ($\partial x_1^d / \partial p_2 \cdot \partial p_2^* / \partial a < 0$): con las empresas más juntas, una pequeña diferencia de precio basta para que los consumidores intermedios cambien de proveedor, y la competencia en precios se endurece. Para suavizarla conviene separarse, y llevado al límite este efecto da el *principio de diferenciación máxima*, con cada empresa en un extremo de la calle.

La empresa se enfrenta así a un dilema. Parecerse al rival le da más cuota, pero alejarse de él le deja más margen en precios. Si gana el efecto demanda, la estrategia es de producción en masa, y si gana el estratégico, de nicho. Qué efecto domina lo deciden los costes de transporte, junto con la manera en que se distribuyen los consumidores por la calle.

CSO: no se cumple en general, y con costes lineales el equilibrio en localizaciones puede no existir[4].

Equilibrio: sustituyendo los precios de la segunda etapa, el beneficio de la empresa 1 resulta

$$\pi_1(a,b) = \frac{t}{2}(1-a-b)\left(1+\frac{a-b}{3}\right)^2$$

cuya derivada respecto a a es negativa para cualquier b, de modo que la mejor respuesta de cada empresa es alejarse todo lo posible de la rival, sea cual sea la posición de esta. Las funciones de reacción en localización son, pues, constantes en los extremos, y el equilibrio del juego en dos etapas es:

$$a^* = b^* = 0 \qquad p_1^* = p_2^* = c + t \qquad \pi_1^* = \pi_2^* = \frac{t}{2}$$

Las empresas se sitúan en los extremos de la calle, $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$, porque, con costes cuadráticos y consumidores uniformes, el efecto estratégico domina. El precio vuelve a ser el coste marginal más un margen, ahora igual al coste de transporte, y el beneficio se reparte a partes iguales, porque las posiciones son simétricas.

Desarrollo gráfico: la elección de localización se representa en el plano localización-coste total de compra, como en el panel a de la figura A18.1 (figura A18.2):

1. *Alejamiento*: desde cualquier par de localizaciones interiores, como el óptimo social, $z_1^{\text{opt}} = 1/4$ y $z_2^{\text{opt}} = 3/4$, cada empresa se aleja de la rival (flechas), porque acercarse al centro desplaza al consumidor indiferente a su favor (efecto demanda), pero reduce la distancia entre ambas y, con ella, el margen de las dos (efecto estratégico), que pesa más.

2. *Equilibrio*: las empresas se sitúan en los extremos de la calle, $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$ (diferenciación máxima), y fijan $p^* = c + t$. Las parábolas del coste total de compra, $p^* + t(z - z_i)^2$, tienen su mínimo en cada extremo y se cortan en el consumidor indiferente, $\hat{z} = 1/2$.

3. *Margen*: la diferencia entre p^* y c es el coste de transporte, t, el trayecto completo que una empresa tendría que compensar para arrebatar el cliente situado a la puerta de la rival.

[4] Con los costes lineales del modelo original, el efecto demanda lleva a las empresas hacia el centro. Cuando se aproximan, sin embargo, el equilibrio en precios deja de existir, porque cada una tiene incentivos a rebajar el precio lo justo para quedarse con todo el mercado. En esto consiste la corrección de d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979) al principio de diferenciación mínima de Hotelling.

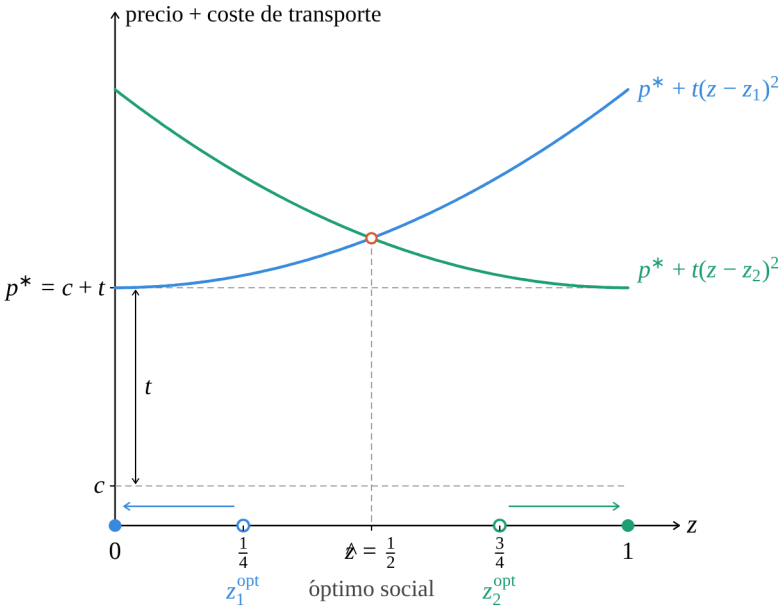


Figura A18.2: Hotelling con localizaciones endógenas y costes de transporte cuadráticos. Desde cualquier par de localizaciones interiores, como el óptimo social, $z_1^{opt} = 1/4$ y $z_2^{opt} = 3/4$, cada empresa se aleja de la rival (flechas) hasta el extremo de la calle, el equilibrio de diferenciación máxima ($z_1 = 0$, $z_2 = 1$). Con el precio de equilibrio, $p^* = c + t$, el coste total de comprar a cada empresa, $p^* + t(z - z_i)^2$, se iguala en el consumidor indiferente, $\hat{z} = 1/2$, y el margen sobre el coste unitario es el coste de transporte, t.

Bienestar (la solución del planificador): la cuestión es si el resultado descentralizado es socialmente óptimo. Como el coste de producción es el mismo en cualquier localización, el único coste que la localización altera es el de transporte, asimilable a un coste de transacción. Un planificador benevolente se limitaría, por tanto, a minimizar ese coste, y para ello colocaría cada empresa en el punto medio de la mitad de calle que abastece, $z_1^{opt} = 1/4$ y $z_2^{opt} = 3/4$. En cambio, el equilibrio descentralizado con costes cuadráticos ($z_1 = 0$, $z_2 = 1$) diferencia demasiado, porque las empresas se alejan más de lo que conviene a los consumidores para relajar la competencia en precios, y la pérdida de bienestar es el exceso de coste de transporte que ello impone.

1.2.4. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo muestra con la mayor economía de medios el mecanismo por el que la diferenciación crea poder de mercado. De hecho, los dos casos extremos del modelo con localizaciones exógenas, de la paradoja de Bertrand a un margen igual al coste de transporte, prueban que ese poder depende de la distancia entre variedades. El resultado es la base de los modelos neohotellianos de Salop y Lancaster (apartado 2.1) y del análisis de la diferenciación como estrategia (tema A15).

Limitaciones: el modelo presenta tres:

- *Fragilidad del equilibrio*: el resultado cambia con solo modificar cómo crecen los costes de transporte con la distancia o cómo se reparten los consumidores, de ahí que el principio de diferenciación máxima sea poco robusto. Con costes cuadráticos hay equilibrio en precios para cualquier localización, mientras que con lineales solo si las empresas están bastante alejadas.

▪ *Supuestos restrictivos*: es un modelo de duopolio, con demandas unitarias y mercado cubierto.

▪ *Número de variedades*: el modelo no lo determina, y esa cuestión la aborda el enfoque no espacial.

1.3. Enfoque no espacial: modelo de Chamberlin (1933)

Origen: Edward Chamberlin (*The Theory of Monopolistic Competition*, 1933) acuñó el término competencia monopolística para una estructura de mercado que combina propiedades del monopolio (cada empresa tiene poder sobre su variedad) y de la competencia perfecta (muchas empresas y libre entrada). Su modelo es el tradicional de la competencia monopolística, y el enfoque no espacial toma de él su forma.

Idea: hay varios bienes sustitutivos imperfectos entre sí ($0 < \sigma_{ij} < \infty$) y la demanda del grupo se reparte entre ellos. Cada empresa vende una variedad distinta y se enfrenta por ello a una demanda decreciente en su propio precio, pero tan elástica que su poder de mercado es pequeño, y sus beneficios extraordinarios desaparecen a largo plazo con la entrada.

Supuestos:

▪ *Entorno*: el mercado es un *grupo* de variedades poco diferenciadas, cada una muy sustituible por cualquier otra y en igual grado (*supuesto de simetría*, por el que ninguna variedad está más próxima a otra que a las demás).

▪ *Agentes*:

- *Empresas*: son muchas y cada una vende una sola variedad (p. ej. los restaurantes o las peluquerías de una ciudad), con una tecnología común y curvas de coste medio en U. Dado que cada una pesa muy poco en las ventas de las demás, no hay interacción estratégica, y cada empresa da por hecho que sus rivales no tocarán el precio si ella cambia el suyo (comportamiento *miope*).

- *Demanda*: ninguna variedad atrae a más consumidores que otra, así que la demanda de todas las empresas es idéntica[5]. El modelo distingue, además, dos curvas de demanda para cada empresa. La *demanda planeada* (dd) es la que cree tener, suponiendo que nadie más mueve el precio, y es muy elástica, porque una rebaja en solitario le traería clientes de todas las rivales. La *demanda efectiva* (DD), en cambio, es la que de verdad obtiene cuando todas cambian el precio a la vez, y es menos elástica. Con la entrada o la salida de empresas DD se desplaza, porque la misma demanda de mercado se divide entre más o menos variedades.

Razonamiento:

▪ *Equilibrio a corto plazo*: no hay entrada ni salida. Cada empresa produce hasta que su coste marginal alcanza el ingreso marginal que deriva de la demanda planeada, la que cree tener. No obstante, las rivales hacen lo mismo, de modo que las ventas reales de cada empresa caen sobre DD, y el proceso se repite en zigzag por esa curva hasta que $\text{Img}_{dd} = \text{Cmg}$ y $dd = DD$ se cumplen a la vez. En ese punto cada empresa se comporta como monopolista de su variedad, con un precio más alto y una cantidad más baja que en competencia, y puede tener beneficios extraordinarios o pérdidas.

[5] En la realidad, variedades parecidas tienen demandas y costes diferentes, y por eso sus precios se dispersan. Chamberlin era consciente de esta falta de realismo.

- *Equilibrio a largo plazo*: mientras haya beneficios extraordinarios entrarán empresas, que restan clientela a las instaladas y desplazan su demanda hacia la izquierda hasta agotarlos. Cuando la entrada cesa, las demandas planeada y efectiva se cortan ($d^* = D^*$), la planeada es tangente al coste medio de largo plazo, por lo que no queda beneficio ($p = \text{Cme}_{\text{LP}}$), y la regla de maximización, ahora con costes de largo plazo, sigue cumpliéndose ($\text{Img} = \text{Cmg}_{\text{LP}}$).

Como la demanda planeada tiene pendiente negativa, la tangencia se produce en el tramo descendente del coste medio. Por ello, según el *teorema del exceso de capacidad* (Chamberlin, 1933), cada empresa produce por debajo de su escala óptima, a un coste medio superior al mínimo, y deja economías de escala sin explotar. Sin embargo, Demsetz (1959) objetó que, si se tienen en cuenta los gastos de venta, el equilibrio a largo plazo no implica necesariamente exceso de capacidad.

Desarrollo gráfico: el equilibrio a largo plazo se representa en el plano cantidad-precio de la empresa, con la competencia perfecta como referencia en el panel superior (figura A18.3):

1. *Costes*, $\text{Cme}(x)$ y $\text{Cmg}(x)$: recogen la tecnología común de las empresas, tienen forma de U y son los mismos en ambos paneles. En competencia perfecta la demanda de la empresa es horizontal, $d(x) = \text{Img}(x)$, y el equilibrio (punto 0 del panel superior) está en el mínimo del coste medio, con x_C y p_C.

2. *Demanda planeada*, $d^*(x)$, y su *ingreso marginal*, $\text{Img}(x)$: la demanda planeada es decreciente pero muy elástica, porque supone que las rivales no reaccionan.

3. *Demanda efectiva*, $D^*(x)$: es más inclinada que la planeada, porque recoge la reacción de todas las empresas, y la corta en el equilibrio.

4. *Equilibrio*: en el punto 0 del panel inferior, $d^*(x)$ es tangente a $\text{Cme}(x)$ y $\text{Img}(x) = \text{Cmg}(x)$, con el precio p_{CM} y la cantidad x_{CM}. La distancia entre x_{CM} y x_C es el exceso de capacidad.

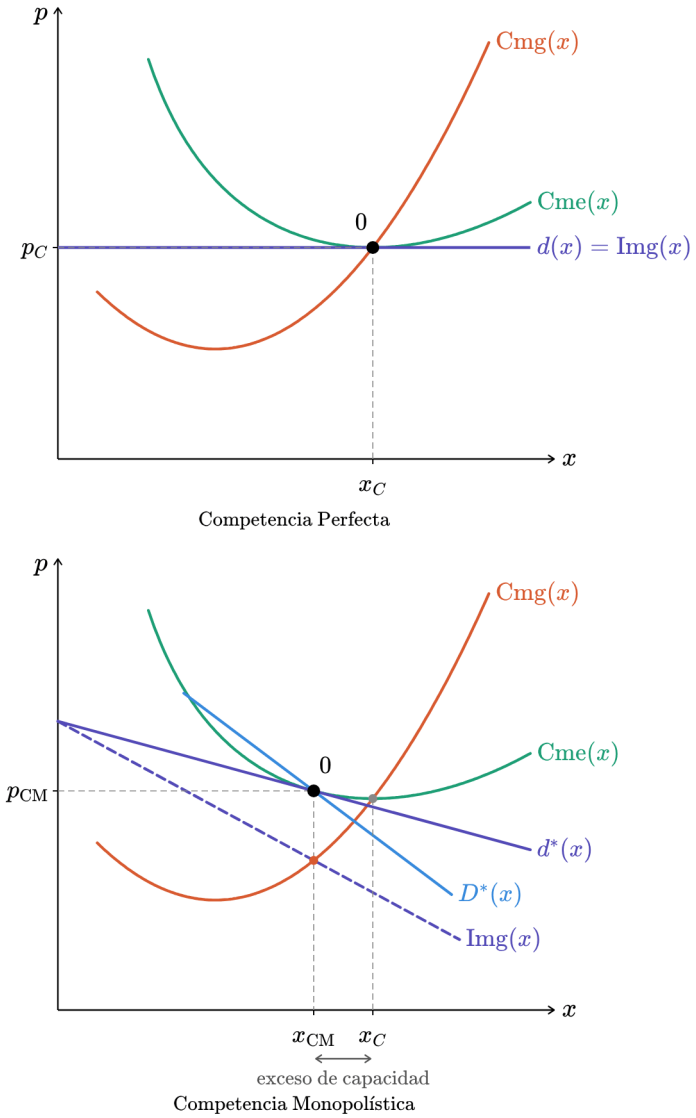


Figura A18.3: Competencia monopolística (Chamberlin, 1933). En el equilibrio a largo plazo, la demanda de la empresa es tangente al coste medio, con beneficio nulo y exceso de capacidad.

Bienestar: el equilibrio tiene una ineficiencia *asignativa*, que la competencia monopolística comparte con el monopolio, pues el precio queda por encima del coste marginal. Tiene además una ineficiencia *productiva* o de escala, propia de esta estructura, que consiste en que el precio supera el mínimo del coste medio. Cada empresa produce al mínimo coste la cantidad que elige, como el monopolista (tema A17, apartado 1.3.2), pero por debajo de su escala eficiente. Por ello, la producción del sector cuesta más de lo que costaría con menos empresas en el mínimo del coste medio. Aun así, con una demanda muy elástica para cada variedad, las dos pérdidas son pequeñas, y la variedad adicional, que el consumidor valora por sí misma, las compensa en parte. La valoración global depende de esa comparación, que formaliza el modelo de Dixit-Stiglitz (apartado 2.2).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el modelo de Chamberlin incorpora a las decisiones de la empresa, junto al

precio, cuánto diferenciar el producto y cuánto gastar en ventas, en una estructura intermedia que retrata la mayor parte de los mercados de consumo. Además, su equilibrio de tangencia y el teorema del exceso de capacidad son el punto de partida de la teoría posterior de la variedad.

▪ *Limitaciones*: la crítica le reprocha cuatro incoherencias. En primer lugar, el modelo deja fuera las consideraciones estratégicas aunque las variedades más parecidas compitan con más fuerza entre sí. En segundo lugar, atribuye a las empresas un error sistemático sobre cómo reaccionan las rivales. En tercer lugar, no precisa cuántas empresas hacen falta para que haya competencia monopolística. Por último, no fija qué elasticidades cruzadas bastan para incluir dos bienes en el mismo grupo. Las dos primeras incoherencias las resuelven los modelos neohotellianos, con vecinos y estrategia, y las dos últimas, el modelo de Dixit-Stiglitz, con un número de variedades endógeno.

1.4. Publicidad: la condición de Dorfman-Steiner (1954)

Origen: Robert Dorfman y Peter Steiner (1954) formalizaron la decisión sobre la publicidad, el principal de los gastos de venta que Chamberlin incorporó al análisis de la empresa diferenciada y con los que esta desplaza su demanda.

Idea: la empresa con poder sobre su demanda, sea un monopolista o una empresa de competencia monopolística con su variedad, elige, además del precio, cuánto gastar en publicidad, y la proporción óptima de sus ingresos que dedica a ella depende solo de un cociente de elasticidades.

Planteamiento: con una demanda de su variedad $x(p, A)$ decreciente en el precio y creciente en el gasto en publicidad, con rendimientos decrecientes ($x_A > 0$, $x_{AA} < 0$), y coste marginal constante, la empresa resuelve

$$\max_{p,\,A}\ \pi = (p - c)\, x(p, A) - A$$

donde p es el precio, A el gasto en publicidad (con coste unitario uno), $x(p, A)$ la demanda de la variedad, c el coste marginal y π el beneficio.

CPO: la condición respecto del precio da la regla del margen, $(p-c)/p = 1/|\varepsilon_{xp}|$, y la condición respecto de la publicidad iguala el margen sobre la última venta que esta provoca con su coste, $(p - c)\, x_A = 1$. Ambas se determinan conjuntamente, porque la publicidad altera la elasticidad-precio y el precio fija el margen que hace rentable anunciarse.

CSO: el beneficio ha de ser cóncavo en (p, A), lo que exige $\pi_{pp} < 0$ (ingreso marginal decreciente), $\pi_{AA} = (p - c)\, x_{AA} < 0$ (rendimientos decrecientes de la publicidad) y $\pi_{pp}\, \pi_{AA} - \pi_{pA}^2 > 0$.

Solución: multiplicando la condición de la publicidad por $A/(p\, x)$ y sustituyendo el margen por la regla del precio se obtiene la *condición de Dorfman-Steiner*:

$$\underbrace{\frac{A}{p\,x}}_{\text{intensidad publicitaria}} = \frac{\varepsilon_{xA}}{|\varepsilon_{xp}|}$$

donde $\varepsilon_{xA} = x_A A/x$ es la elasticidad de la demanda respecto de la publicidad y $|\varepsilon_{xp}|$ el valor absoluto de la elasticidad-precio. La empresa anuncia más cuanto más responde su demanda a la publicidad y menos al precio.

Como $1/|\varepsilon_{xp}|$ es el índice de Lerner, la intensidad publicitaria es proporcional al margen relativo, $A/(p\,x) = \varepsilon_{xA}\,(p-c)/p$, lo que fundamenta la asociación entre margen y ratio publicidad-ventas que se observa entre sectores. En competencia monopolística la condición se aplica a la demanda de cada variedad, de modo que cuanto más diferenciada está la variedad, menor es su elasticidad-precio y mayor su intensidad publicitaria. Con todo, a largo plazo el gasto en publicidad forma parte del coste medio y la libre entrada sigue llevando el beneficio a cero.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica con un único cociente de elasticidades por qué la intensidad publicitaria difiere tanto entre sectores (alta en bienes de consumo con marca, mínima en productos homogéneos) y da contenido a los gastos de venta de Chamberlin.

- *Limitaciones*: trata la publicidad como un desplazador de la demanda sin explicar por qué la desplaza, si por informar o por persuadir, cuestión que aborda la diferenciación informacional (apartado 3.2). Además, ignora la respuesta de las rivales, que en oligopolio convierte la publicidad en un instrumento estratégico.

1.5. Conclusiones

Los modelos de primera generación explican cómo la diferenciación, y no el escaso número de empresas, crea poder de mercado. En el enfoque espacial de Hotelling el poder procede de la distancia entre variedades, y en el no espacial de Chamberlin, de la sustituibilidad imperfecta dentro del grupo. La condición de Dorfman-Steiner liga, a su vez, la publicidad a la diferenciación, porque cuanto más diferenciada está una variedad, menos elástica es su demanda al precio y mayor su intensidad publicitaria.

Sin embargo, ninguno de los dos enfoques determina a la vez la localización de las variedades, su número y su valoración social. Hotelling fija dos empresas y su resultado depende de la forma de los costes de transporte, mientras que Chamberlin excluye la estrategia y no define el grupo. Los modelos de segunda generación (apartado 2) responden a estas carencias, y los de diferenciación vertical e informacional (apartado 3) amplían el propio concepto de diferenciación.

2. Diferenciación horizontal: modelos de segunda generación

Siguiendo a Giancarlo Gandolfo (2014), las aportaciones de Hotelling y Chamberlin sentaron las bases de dos familias de desarrollos posteriores. Los modelos neohotellianos conservan el espacio de características y endogenizan la entrada, y los neochamberlinianos conservan el consumidor representativo y dan microfundamentos al modelo de Chamberlin.

2.1. Modelos neohotellianos

Dentro de esta familia, Lancaster generaliza el espacio de características de Hotelling a un número cualquiera de atributos y Salop lo cierra en una circunferencia para estudiar la libre entrada.

2.1.1. Teoría de la demanda de características (Lancaster, 1966)

Origen: Kelvin Lancaster (1966) propuso que lo que el consumidor busca en un bien son sus características, y no el bien como tal. La propuesta generaliza el espacio de localizaciones de Hotelling a un espacio de atributos de cualquier dimensión.

Idea: la utilidad se obtiene de las características, y los bienes son solo el medio de obtenerlas. Cada bien es una combinación fija de atributos, de ahí que elegir entre variedades sea elegir la combinación de atributos más cercana a la deseada al menor coste.

Supuestos:

- *Entorno*: existe un vector de características $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ que resume los atributos contenidos en los bienes diferenciados $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, y la utilidad, $u(\mathbf{a})$, procede de las características, no de los bienes.

- *Tecnología*: las características se obtienen transformando los bienes mediante funciones de producción lineales y aditivamente separables, $a_j = \sum_i \beta_{ji} x_i$, de modo que cada bien aporta una combinación fija de características.

- *Restricciones*: el gasto en bienes agota la renta, $\sum_i p_i x_i = M_0$.

Planteamiento: el consumidor maximiza la utilidad de las características sujeto a la tecnología de consumo y a la renta:

$$\max_{\mathbf{x}} \; u(a_1, \dots, a_m) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} a_j = \sum_i \beta_{ji} x_i \; \forall j \\ \sum_i p_i x_i = M_0 \end{cases}$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ es el vector de características, $u(\mathbf{a})$ la utilidad que reportan, x_i la cantidad del bien i, β_{ji} la cantidad de la característica j contenida en cada unidad del bien i, p_i el precio del bien i y M_0 la renta.

CPO: el consumidor maximiza donde la curva de indiferencia más alejada es tangente a la frontera. La solución está en un vértice, si consume una sola variedad, o en un tramo, si combina dos.

CSO: la cuasiconcavidad de $u(\mathbf{a})$ (curvas de indiferencia convexas) y la concavidad de la frontera eficiente aseguran que la tangencia caracteriza el máximo.

Desarrollo gráfico: la elección del consumidor se representa en el plano de características (a_1, a_2), para tres bienes (figura A18.4):

1. *Bienes*, x_1, x_2 y x_3: cada uno se representa por una recta desde el origen, cuya pendiente es la proporción en que combina las características y cuya longitud viene determinada por el precio. Los puntos A, B y C son las combinaciones de características que se obtienen gastando toda la renta en un solo bien.

2. *Frontera eficiente de consumo*: es la unión de esos puntos, cóncava respecto al origen, sobre la que se sitúan también las combinaciones de dos bienes adyacentes.

3. *Curva de indiferencia*, u_0: recoge las combinaciones de características que reportan la misma utilidad.

4. *Equilibrio*: el óptimo (punto 0) se sitúa donde u_0 es tangente al tramo AB de la frontera, con las características a_1^* y a_2^*, y combina los bienes x_1 y x_2.

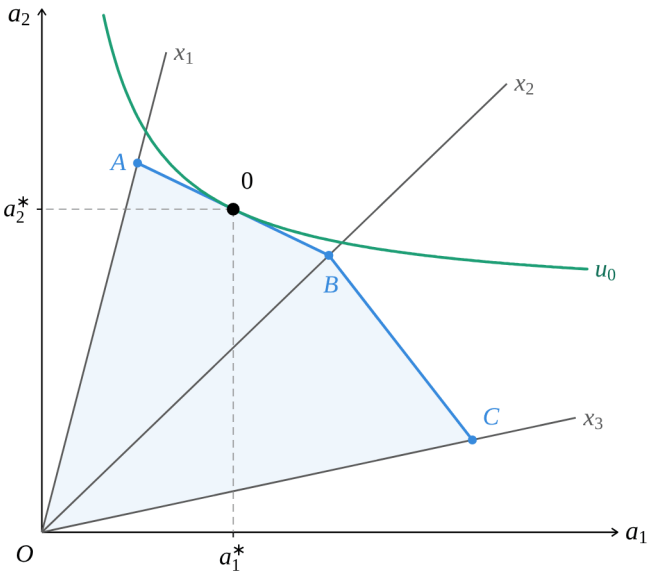


Figura A18.4: Teoría de la demanda de características (Lancaster, 1966). Cada bien (x_1, x_2, x_3) es un rayo desde el origen en el espacio de características (a_1, a_2), y A, B y C son las combinaciones que se obtienen gastando toda la renta en él. La frontera eficiente que los une es cóncava respecto al origen, y el óptimo 0 se sitúa donde la curva de indiferencia u_0 es tangente al tramo AB, que combina los bienes x_1 y x_2.

Estática comparativa: una subida del precio de un bien acorta su recta y puede sacarlo de la frontera eficiente, de modo que deja de consumirse aunque siga existiendo. La aparición de una nueva variedad añade una recta. Si su punto queda por debajo de la frontera eficiente (dominado por las combinaciones de las variedades existentes), nadie la compra, mientras que, si queda por encima, la nueva variedad amplía la frontera y desplaza a sus vecinas. La demanda de cada variedad es así discontinua en los precios y en el conjunto de variedades disponibles.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: al desplazar la elección del espacio de bienes al de características, Lancaster explica la diferenciación de producto y la aparición y desaparición de variedades como fenómenos de demanda, y proporciona la base de la teoría hedónica de precios (tema A08).

Sus aplicaciones van desde las carteras de inversión, donde rentabilidad esperada y riesgo forman un espacio de características media-varianza, hasta los bienes tecnológicos y las estrategias de mercado. En la estrategia comercial, un nuevo vector entre dos existentes es una segmentación, un vector muy inclinado es un nicho, y la posición de las curvas de indiferencia es el posicionamiento de marca sobre el que actúa la publicidad.

▪ *Limitaciones*: el modelo supone que las características son objetivas y medibles y que la tecnología de consumo es lineal, lo que excluye las interacciones entre atributos. Además, como el de Hotelling, es un modelo de demanda que no determina por sí solo el número de variedades ofrecidas.

2.1.2. Modelo de la ciudad circular (Salop, 1979)

Origen: Steven Salop (1979) llevó el enfoque espacial al caso de libre entrada, con lo que lo aproximó al planteamiento de Chamberlin[6].

Idea: cerrar la calle de Hotelling en una circunferencia elimina los extremos y con ellos la asimetría entre empresas, lo que permite estudiar cuántas empresas entran en un mercado con costes fijos y cuánto se diferencian, en lugar de dónde se sitúan dos empresas dadas.

Supuestos:

▪ *Entorno*: el mercado es una ciudad circular de perímetro unitario (los horarios de vuelo o la programación televisiva son sus ejemplos naturales).

▪ *Agentes*:

- *Empresas*: el número n es endógeno. Todas tienen costes idénticos, con un coste marginal c y un coste fijo de entrada f, y se sitúan equidistantemente sobre la circunferencia, de modo que la diferenciación es máxima por construcción y la decisión que se estudia es la de entrar.
- *Consumidores*: se distribuyen uniformemente sobre la circunferencia, con demandas unitarias y costes de transporte lineales t por unidad de distancia.

Planteamiento (análisis de la demanda): con n empresas equidistantes, el consumidor indiferente entre la empresa 1 y su vecina se sitúa a la distancia $d \in (0, 1/n)$ en la que el coste total de comprar a una y a otra coincide, $p_1 + td = p + t(1/n - d)$. La demanda de la empresa 1 son los consumidores situados a menos de d por cada lado, $x_1^d = 2d = 1/n + (p - p_1)/t$.

Gráficamente, en la ciudad circular (figura A18.5), las n empresas se sitúan a una distancia $1/n$ entre sí. La demanda de la empresa 1 es el arco $x_1^d = 2d$ comprendido entre los dos consumidores indiferentes, que distan d de ella y $1/n - d$ de cada vecina.

[6] Aunque aquí cada empresa solo rivaliza de forma directa con las dos que tiene al lado.

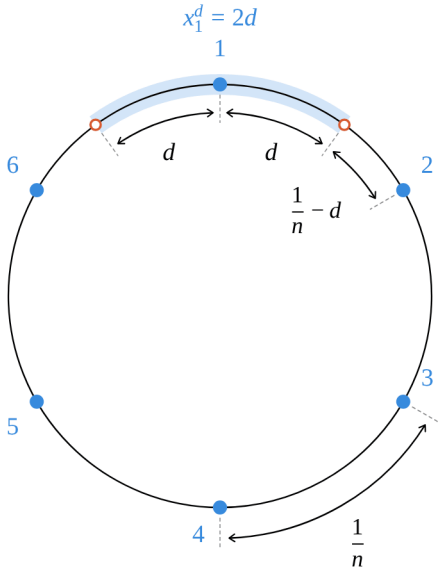


Figura A18.5: Ciudad circular (Salop, 1979). Las $n = 6$ empresas son equidistantes sobre una circunferencia de perímetro unitario y están separadas por $1/n$. Los consumidores indiferentes entre la empresa 1 y sus vecinas están a la distancia d de ella y $1/n - d$ de la vecina, y la demanda de la empresa 1 es el arco sombreado, $x_1^d = 2d$.

En el análisis de la oferta, cada empresa elige su precio maximizando el beneficio, $\pi_1 = (p_1 - c)[1/n + (p - p_1)/t] - f$, tomando como dados el precio p de las vecinas y el número de empresas.

CPO: da la función de reacción, en la que el precio óptimo de cada empresa iguala su ingreso marginal al coste marginal c. Ese precio crece con el de las vecinas, con el coste de transporte y con la distancia entre empresas, $1/n$, pues cuanto más lejos está la rival, mayor es el margen que la empresa puede fijar sin perder clientes:

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(p + c + \frac{t}{n}\right)$$

CSO: $\partial^2 \pi_1 / \partial p_1^2 = -2/t < 0$, luego la CPO define la mejor respuesta.

Equilibrio: imponiendo la simetría, $p_1 = p$, se obtiene el precio de equilibrio a corto plazo, y de la condición de libre entrada, $\pi = 0$, el número de empresas a largo plazo:

$$p^* = c + \frac{t}{n} \qquad n^* = \sqrt{t/f} \qquad p^{**} = c + \sqrt{tf}$$

Estática comparativa: el margen $p^* - c$ aumenta con el coste de transporte t, que mide la diferenciación, y disminuye con el número de empresas n, que mide la competencia. A largo plazo, el número de empresas crece con la diferenciación y decrece con el coste fijo, $n^* = n^*(t^+, f^-)$, porque a las empresas les interesa diferenciarse para aprovechar la diversidad de gustos que recoge t[7], y la libre entrada las multiplica hasta agotar los beneficios. Por su parte, el precio de largo plazo crece con t y con f.

[7]Tirole (1988, cap. 7) señala tres fuerzas que empujan hacia la diferenciación mínima: la tendencia a situarse donde está la demanda, las ventajas de la aglomeración (externalidades, reducción de costes) y la ausencia de competencia en precios (p. ej. con precios regulados).

Bienestar: un planificador que minimizase la suma de los costes fijos y los costes de transporte elegiría $n^{\text{opt}} = \frac{1}{2}\sqrt{t/f}$, la mitad del número de equilibrio, de modo que la libre entrada genera un *exceso de variedades*. Este exceso se debe a una externalidad, pues cada entrante roba demanda a sus vecinas, lo que hace rentable su entrada, sin internalizar que esa demanda ya estaba servida y que su coste fijo es un coste social adicional.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el modelo de Salop formaliza la competencia monopolística en el enfoque espacial, porque reproduce con microfundamentos explícitos el resultado de Chamberlin (beneficio nulo con poder de mercado). Además, determina el número de variedades y muestra que la libre entrada no garantiza el número óptimo.

- *Limitaciones*: la localización equidistante se impone en lugar de derivarse, de modo que el modelo no dice nada sobre dónde se sitúan los entrantes. Además, el resultado de exceso de variedades depende de los supuestos sobre costes de transporte y demandas unitarias, pues con demandas elásticas la entrada puede ser insuficiente.

2.2. Modelos neochamberlinianos: Dixit y Stiglitz (1977)

Origen: Michael Spence (1976) y Avinash Dixit y Joseph Stiglitz (1977) reformularon las ideas de Chamberlin con microfundamentos, en un modelo de equilibrio general con un consumidor representativo que valora la variedad.

Idea: la variedad es un bien en sí mismo. Si el consumidor prefiere repartir su gasto entre muchas variedades a concentrarlo en pocas, cada variedad tiene una demanda decreciente en su propio precio aunque sea sustituible por las demás. El número de variedades que el mercado sostiene depende de cuánto valora el consumidor la variedad y de cuánto cuesta producir cada una.

2.2.1. Supuestos

Entorno: el mercado de bienes es de competencia monopolística, con libre entrada de variedades, y los recursos están plenamente empleados, de modo que el trabajo total de la economía limita el número de variedades y la escala de cada una.

Agentes:

- *Empresas*: tienen una tecnología idéntica con rendimientos crecientes a escala y un único factor, el trabajo. La función de costes es lineal, $\text{CT}(x_i^s) = w(l_0 + lx_i^s)$, con x_i^s la producción de la empresa, $l_0 > 0$ empleados fijos y $l > 0$ empleados por unidad producida, lo que genera economías de escala internas[8]. Cada empresa fabrica una variedad diferenciada ($\sigma_{ji} \in (0, \infty)$ para todo $i \neq j$) y se comporta de forma miope, con variación conjetural nula.

- *Consumidores*: tienen preferencias idénticas con *preferencia por la variedad*, es decir, con un mismo gasto prefieren repartirlo entre n variedades antes que entre $n-1$[9]. El parámetro de sustituibilidad $\theta \in (0, 1)$ determina la elasticidad de sustitución entre variedades, $\sigma = 1/(1-\theta) \in (1, \infty)$. Como preferencias y costes son idénticos, en equilibrio todas las variedades tienen el mismo precio.

[8] No hay economías de alcance, de modo que cada empresa produce una sola variedad, y ninguna imita la de otra, porque perdería beneficios frente a mantenerse en su nicho.

[9] Dixit y Stiglitz (1977) argumentan que la preferencia por la variedad se encuentra implícita en las curvas de indiferencia convexas. Se puede demostrar que $u^* = n^{(1-\theta)/\theta} \cdot M_0/p$, creciente con n.

2.2.2. Modelo

Consumidores: son idénticos y se resumen en un consumidor representativo, que valora la variedad y decide cuánto consume de cada una.

▪ *Planteamiento*: maximiza una utilidad de elasticidad de sustitución constante (CES) sujeto a su renta:

$$\max_{x_i} u = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\theta} \right)^{1/\theta} \qquad \text{s.a.:} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M_0$$

donde x_i es la cantidad consumida de la variedad i, n el número de variedades, $\theta \in (0,1)$ el parámetro de sustituibilidad, p_i el precio de la variedad i, M_0 la renta del consumidor y λ el multiplicador de la restricción presupuestaria en el problema equivalente que maximiza $\sum_i x_i^{\theta}/\theta$, transformación monótona de u.

▪ *CPO*: se obtienen tres expresiones. En el óptimo, la utilidad marginal de cada variedad iguala a su precio multiplicado por el valor marginal de la renta, de modo que la relación marginal de sustitución entre dos variedades cualesquiera coincide con su precio relativo:

$$x_i^{\theta-1} = \lambda p_i \qquad \text{(demanda frischiana)} \tag{1}$$

$$\frac{x_i}{x_j} = \left(\frac{p_j}{p_i} \right)^{\sigma} \qquad \text{(demanda relativa)} \tag{2}$$

$$x_i^d = \left(\frac{p_i}{P} \right)^{-\sigma} \frac{M_0}{P} \qquad \text{(demanda marshalliana)} \tag{3}$$

donde $P = (\sum p_i^{\theta/(\theta-1)})^{(\theta-1)/\theta}$ es el índice de precios de las variedades. Las tres condiciones se leen como sigue:

1. *Demanda frischiana*: (1) relaciona la cantidad demandada de cada variedad con su precio y con el precio sombra de la renta, λ. Así, dado el valor marginal de la renta, cada variedad se consume hasta que su utilidad marginal iguala a su precio ponderado.

2. *Demanda relativa*: (2) muestra que la proporción en que se consumen dos variedades depende solo de sus precios relativos y del grado de sustituibilidad[10], y cuanto mayor es σ, más responde la composición del consumo a las diferencias de precio.

3. *Demanda marshalliana*: (3) expresa la cantidad demandada de cada variedad en función de los precios y la renta, $x_i = f(p_i^-, P^+, M_0^+)$, decreciente en su propio precio, creciente en el índice de precios de las demás variedades y en la renta, e isoelástica con $|\varepsilon_{xp}| = \sigma$[11]. Como los consumidores son idénticos, la demanda de mercado de cada variedad es proporcional al tamaño del mercado, L, y conserva la elasticidad σ. En lo que sigue, x_i^s denota la producción de la empresa i, que iguala esa demanda de mercado.

▪ *CSO*: la función CES con $0 < \theta < 1$ es estrictamente cuasicóncava (curvas de indiferencia estrictamente convexas) y la restricción es lineal, de modo que las CPO son suficientes.

[10] Cuanto mayor es la preferencia por la variedad (menor θ), menor es σ y menor la elasticidad-precio de cada variedad (demanda más rígida). Como $\sigma = 1/(1-\theta) > 1$, esa elasticidad tiende a la unidad, no a cero, cuando $\theta \to 0$.

[11] Con n grande, cada empresa ignora el efecto de su precio sobre P, de modo que $|\varepsilon_{xp}| = \sigma$.

Empresas: cada una produce una variedad, con rendimientos crecientes a escala, y fija su precio.

- *Planteamiento*: maximiza el beneficio frente a la demanda isoelástica anterior:

$$\max_{p_i} \pi_i = p_i x_i^s - w(l_0 + l x_i^s) \quad \rightarrow \quad p_i = \frac{\sigma}{\sigma - 1} wl = \frac{1}{\theta} wl \tag{4}$$

donde p_i es el precio de la variedad i, x_i^s su producción (igual a su demanda de mercado), w el salario, l_0 los empleados fijos, l los empleados por unidad producida, σ la elasticidad de sustitución entre variedades, θ el parámetro de sustituibilidad y π_i el beneficio.

- *CPO*: la estrategia óptima es un margen μ sobre el coste marginal wl, con $1+\mu = \sigma/(\sigma-1) > 1$, independiente del precio de las demás variedades. Cuanto menor es la elasticidad de sustitución, mayor es el margen[12].

- *CSO*: con demanda isoelástica ($\sigma > 1$) y coste marginal constante, el beneficio es estrictamente cóncavo en p_i en el óptimo, de modo que (4) es un máximo.

Equilibrio: por simetría y elasticidad constante, todas las empresas producen la misma cantidad y fijan el mismo precio. La condición de libre entrada, $\pi = 0$, determina la escala de cada empresa, y la de pleno empleo, $L = \sum_i (l_0 + l x_i^s)$, el número de variedades:

$$x_i^s = \frac{l_0}{l}(\sigma - 1) \tag{5}$$

$$n = \frac{L}{l_0 + l x_i^s} = \frac{L}{l_0 \sigma} \tag{6}$$

Estática comparativa: la escala de cada empresa, $x_i^s = f(l_0^+, \sigma^+, l^-)$, crece con el coste fijo, que exige más unidades para recuperarlo, y con la sustituibilidad, que reduce el margen (4) y obliga a vender más para cubrirlo.

Por su parte, el número de variedades, $n = f(L^+, l_0^-, \sigma^-)$, crece con el tamaño del mercado y decrece con el coste fijo y con la sustituibilidad, porque el trabajo total no da para más empresas de mayor escala. El tamaño del mercado, en cambio, no altera la escala de cada una.

Finalmente, el salario real, $w/p = \theta/l$, no depende del tamaño del mercado. Así, las ganancias de un mercado mayor llegan al consumidor por la variedad, no por el precio. En presencia de economías de escala internas, el número de variedades está, por tanto, limitado por el tamaño del mercado. Krugman explota este resultado al tratar la apertura comercial como un aumento de ese tamaño.

Bienestar: con preferencias CES, el equilibrio de mercado produce el número de variedades óptimo desde el punto de vista de un planificador sujeto a la restricción de beneficio nulo (el óptimo restringido). En el modelo de un solo sector aquí expuesto, el equilibrio coincide también con el óptimo sin restricción, mientras que en el modelo original de Dixit y Stiglitz (1977), con un segundo sector numerario, produce menos variedades que ese óptimo. El margen de precios no distorsiona la variedad porque afecta por igual a todas ellas. Con preferencias más generales, en cambio, el mercado puede producir demasiadas o demasiado pocas variedades, según que domine el efecto de robo de demanda entre empresas o el excedente del consumidor que cada nueva variedad genera y del que la empresa no puede apropiarse.

[12] A la hora de derivar: $\partial\pi/\partial p = 0 \Rightarrow x + p(\partial x/\partial p) - wl(\partial x/\partial p) = 0$. Sustituyendo $\partial x/\partial p$ de (3) se obtiene (4).

2.2.3. Extensión: economía abierta (Krugman, 1979b)

> La extensión del modelo a la economía abierta se desarrolla en el tema B06, apartados 2.1.1 (Extensiones, con elasticidad constante) y 2.1.2 (Krugman, 1979b, con elasticidad decreciente).

Paul Krugman (1979b) extendió el modelo de Dixit-Stiglitz a la economía abierta, en la que la apertura entre países idénticos equivale a un aumento del tamaño del mercado y genera comercio sin ventaja comparativa. Con la CES del apartado anterior, la escala y el número de empresas de cada país no cambian (ecuaciones (5) y (6)), y toda la ganancia procede de la mayor variedad. Krugman supone, en cambio, que la elasticidad de la demanda de cada variedad aumenta al disminuir su consumo individual. Con ello, el número de empresas de cada país cae, y cada superviviente gana escala y baja su precio (*efecto escala*), aunque los consumidores disponen de más variedades que en autarquía.

Ambos países ganan bienestar sin diferir en recursos ni en tecnología, lo que explica el comercio intraindustrial entre países similares, pero el patrón de comercio, qué país produce qué variedades, queda indeterminado. Con empresas heterogéneas (Melitz, 2003) se añade el *efecto selección*, que expulsa a las menos eficientes.

2.2.4. Conclusiones

Aspectos positivos: la estructura del modelo, una función de utilidad con preferencia por la variedad y una tecnología con costes fijos, se ha convertido en el bloque básico de tres literaturas:

- *Nueva economía keynesiana*: fundamenta la competencia monopolística de los modelos de precios rígidos (Blanchard y Kiyotaki, 1987; tema A07).

- *Crecimiento endógeno*: las variedades son bienes intermedios producidos con I+D (Romer, 1990; tema A44).

- *Nueva teoría del comercio*: explica el comercio intraindustrial (Krugman, 1979b; tema B06).

Limitaciones: el enfoque presenta tres:

- *Características implícitas*: al no explicitarlas, el enfoque del consumidor representativo ofrece una intuición limitada sobre por qué las variedades se diferencian.

- *Simetría*: da por hecho que todos los pares de variedades del grupo comparten la misma elasticidad cruzada, así que ninguna está más próxima a otra.

- *Margen constante*: la elasticidad de sustitución constante hace que el margen no dependa del número de competidores, lo que excluye que la entrada intensifique la competencia en precios.

2.3. Conclusiones

La segunda generación conserva el punto de partida de cada familia y corrige sus carencias. Lancaster lleva la elección al espacio de características, donde la aparición y la desaparición de variedades se explican por la demanda. Salop cierra la calle para determinar con libre entrada el número de empresas, que crece con la heterogeneidad de gustos y decrece con el coste fijo. Por su parte, Dixit y Stiglitz lo determinan desde el consumidor representativo, con un margen constante y un número de variedades proporcional al tamaño del mercado. Los modelos de Salop y de Dixit y Stiglitz difieren, sin embargo, en su valoración normativa. En Salop el número de empresas de equilibrio dobla el óptimo, porque cada entrante roba demanda ya servida, mientras que con preferencias CES el margen afecta por igual a todas las variedades y el mercado alcanza el óptimo restringido. Krugman trata la apertura comercial como un aumento del tamaño del mercado, que amplía las variedades disponibles. En todos ellos las variedades se diferencian por gustos, y el apartado 3 extiende la diferenciación a la calidad y a la información.

3. Otros desarrollos

Los modelos anteriores suponen que las variedades se diferencian horizontalmente, por gustos. Dos desarrollos amplían el marco, la diferenciación vertical y la informacional, definidas en el apartado 1.1.

3.1. Diferenciación vertical: competencia en calidad (Shaked y Sutton, 1982; 1983)

Origen: Avner Shaked y John Sutton (1982 y 1983) mostraron que la diferenciación vertical limita el número de empresas que sobreviven, con independencia del tamaño del mercado. En el artículo de 1982 la calidad no tiene coste, mientras que el de 1983 toma las calidades como dadas y sus costes fijos (incluida la I+D) como hundidos, de modo que solo atiende al coste variable. La exposición que sigue combina estos resultados con la versión de Sutton (1991), en la que la calidad se elige junto con un coste fijo de I+D creciente en ella.

Idea: en la diferenciación vertical (apartado 1.1), como la calidad alta atrae a todos los consumidores si su precio no es mucho mayor, pocas empresas pueden coexistir.

3.1.1. Modelo en economía cerrada (Shaked y Sutton, 1982)

Supuestos:

- *Agentes*:

- *Consumidores*: forman un continuo con preferencias idénticas (todos prefieren mayor calidad) y se distribuyen uniformemente según su renta. Cada uno demanda una unidad y obtiene una utilidad neta $u = vs_i - p_i$, donde $s_i > 0$ es la calidad de la empresa i y $v > 0$ la disposición a pagar por ella. Aunque las preferencias son idénticas, la disposición al pago difiere con la renta, de modo que los consumidores de mayor renta pagan más por una mayor calidad[13].

- *Empresas*: son inicialmente muchas, cada una con un producto verticalmente diferenciado. Una vez dentro del mercado, el coste variable unitario es idéntico para todas e independiente de la calidad y del *output*. La calidad se obtiene, sin embargo, mediante I+D, un coste fijo y hundido creciente y convexo en la calidad, de modo que también lo es el coste total.

Planteamiento: la conducta de las empresas se modeliza como un juego en tres etapas[14]. Primero deciden si entrar, lo que exige una inversión en I+D que queda hundida. Después eligen la calidad, que determina la cuantía de esa I+D (creciente y convexa en la calidad) y no afecta al coste variable. Por último fijan el precio, con la I+D ya hundida y solo el coste variable, común a todas, en juego. El juego se resuelve hacia atrás, porque cada decisión se toma anticipando las que vendrán después.

1. *Tercera etapa*: con las calidades fijadas y la I+D hundida, las empresas compiten en precios. La de calidad alta puede cobrar más sin perder a los consumidores de mayor disposición al pago. Sin embargo, si las calidades son próximas, basta una pequeña rebaja para arrebatar al rival casi toda su clientela y los márgenes tienden a cero, como en Bertrand.

[13] Un valor crítico de renta divide el mercado, de modo que los bienes de calidad superior los compran los consumidores con renta por encima de ese umbral, y los de calidad inferior, el resto.

[14] Intuición: los precios se cambian con facilidad, la calidad requiere cambios en instalaciones, y la entrada requiere su construcción.

2. *Segunda etapa*: cada empresa elige su calidad sabiendo que acercarla a la del rival endurece la competencia en precios y alejarla la relaja. De ahí que la que no puede alcanzar la calidad alta prefiera situarse deliberadamente por debajo, aunque la calidad le cueste poco, lo que traslada a la calidad la diferenciación máxima y da origen a la *erosión de la calidad*.

3. *Primera etapa*: las empresas deciden si entrar. Solo sobreviven con beneficios las que tienen calidades suficientemente separadas, y el rango de calidades que los consumidores pagan es limitado (lo fija la dispersión de la renta). Por eso solo caben unas pocas, ya que un entrante adicional quedaría tan cerca de alguna que la competencia en precios eliminaría sus beneficios, y el entrante no recuperaría la I+D. La entrada se detiene en un número finito de empresas, sea cual sea el tamaño del mercado.

Equilibrio:

- *Corto plazo*: la competencia en precios expulsa a las empresas cuya calidad no encuentra compradores dispuestos a pagarla.

- *Largo plazo*: si la distribución de la renta es suficientemente estrecha[15], el equilibrio de Nash sostiene solo dos empresas en lo que se conoce como *oligopolio natural*. Ambas obtienen beneficios positivos, mayores para la de calidad alta, y se cumple el principio de diferenciación máxima en calidad.

Desarrollo gráfico: la elección de calidad se representa en el plano calidad-ingreso y coste, para el estado final del juego (el oligopolio natural con dos empresas), con el ingreso de cada una en función de su propia calidad, dada la calidad de equilibrio de la rival (figura A18.6):

1. *Coste total*, $\mathrm{CT}(s)$: es creciente y convexo en la calidad y común a ambas empresas.

2. *Ingreso total de la empresa 1*, $\mathrm{IT}_1(s)$: la empresa 1 fabrica la calidad inferior. Mientras su calidad queda lejos de la de la empresa 2, s_2^*, el ingreso crece con ella, pero a partir de cierta calidad acercarse a s_2^* endurece la competencia en precios y el ingreso cae. De ahí resulta su forma de campana.

3. *Ingreso total de la empresa 2*, $\mathrm{IT}_2(s)$: la empresa 2 fabrica la calidad superior y obtiene un ingreso mayor, porque cobra más por su calidad a los consumidores de mayor disposición al pago. Si bajara su calidad hacia la de la empresa 1, su ingreso se hundiría por la competencia en precios.

4. *Equilibrio*: dada la calidad de la rival, cada empresa elige la calidad en la que su ingreso marginal (la pendiente del ingreso total) iguala al coste marginal (la pendiente del coste total), donde las tangentes de la figura son paralelas. Las dos calidades quedan separadas y el equilibrio de Nash cumple el principio de diferenciación máxima en calidad:

- *Empresa 1*: elige s_1^*, con beneficio π_1. Subir la calidad no le compensa, porque acercarse a la de la empresa 2 reduce la diferenciación, endurece la competencia en precios y hace caer su ingreso hasta generar pérdidas.

- *Empresa 2*: elige s_2^*, con beneficio π_2, mayor que π_1. Bajar la calidad reduciría su beneficio, que se anula en $\tilde{s}$, donde su ingreso total iguala al coste total (por debajo tendría pérdidas). Superar s_2^* no le conviene, porque ahí el coste marginal ya excede al ingreso marginal.

[15] A la vez, lo suficientemente ancha para que una empresa de calidad baja pueda abastecer al estrato inferior.

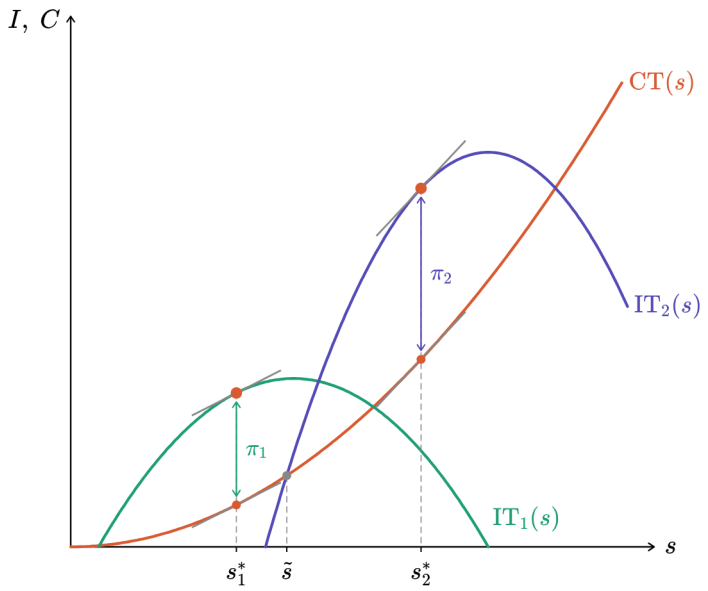


Figura A18.6: Competencia en calidad (Shaked y Sutton, 1982). La figura muestra el estado final del juego, un oligopolio natural con dos empresas. Cada una elige la calidad en la que su ingreso marginal iguala al coste marginal, dada la calidad de la rival ($s_1^* < s_2^*$), y la de calidad alta obtiene más beneficio ($\pi_2 > \pi_1$).

Estática comparativa: el resultado es un caso particular de la *propiedad de finitud*. En diferenciación vertical, el número de empresas con cuota positiva está acotado, por grande que sea el mercado y por pequeño que sea el coste de entrada, a diferencia de los modelos horizontales (Salop, Krugman), en los que un mercado mayor sostiene más variedades. La propiedad se cumple si, con todas las calidades a un precio igual a su coste marginal, todos los consumidores eligen la más alta (Shaked y Sutton, 1983). La condición se da cuando las mejoras de calidad recaen sobre todo en los costes fijos (I+D) y no en los variables, porque entonces la calidad alta no encarece la unidad y ninguna empresa de calidad baja puede competir en precio.

3.1.2. Extensión a economía abierta (Shaked y Sutton, 1984)

En economía abierta[16] la propiedad de finitud se mantiene y, a corto plazo, el mercado integrado sostiene menos empresas que la suma de las dos autarquías, porque el mercado integrado no sostiene la suma de los oligopolios nacionales sino un único oligopolio.

A largo plazo se produce un **duopolio natural internacional**, sin que el modelo determine en qué país se sitúa cada empresa, y comercio intraindustrial de calidades distintas, que es el patrón que se observa entre países de renta similar.

3.1.3. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo da un fundamento no tecnológico a la concentración, porque, si los consumidores valoran la calidad y esta no encarece mucho el coste variable, solo un número finito de empresas puede coexistir con beneficios positivos por mucho que crezca el mercado.

[16] Los resultados no dependen de que la distribución de la renta de los países sea idéntica o no.

Ello explica los oligopolios naturales de las industrias intensivas en I+D y publicidad. El modelo ofrece, además, una intuición nueva sobre la diferenciación, la de la calidad como instrumento para relajar la competencia en precios.

Limitaciones: Bonanno (1986) mostró que los resultados no se mantienen si la variable estratégica es la cantidad en lugar del precio. Además, el modelo supone que los consumidores conocen las calidades, lo que la diferenciación informacional pone en cuestión.

3.2. Diferenciación informacional

La información que los consumidores tienen sobre los productos es en sí misma una fuente de diferenciación, y la publicidad su instrumento principal. Sobre el papel de la publicidad existen dos puntos de vista enfrentados. Para el favorable, la publicidad ofrece información que permite decisiones racionales y reduce los costes de búsqueda. Benham (1972), por ejemplo, mostró que las gafas eran más caras en los estados de EE. UU. que restringían la publicidad.

Para el punto de vista adverso, la publicidad es persuasión y engaño, y la diferenciación que crea no es real (Galbraith, 1967). Cuál de los dos puntos de vista se ajusta mejor depende del tipo de bien.

3.2.1. Bienes de búsqueda y bienes de experiencia (Nelson, 1970)

Phillip Nelson (1970) clasificó los bienes según el momento en que el consumidor puede conocer su calidad:

- *Bienes de búsqueda*: su calidad puede comprobarse antes de comprar, inspeccionándolos o comparándolos (p. ej. la ropa o los muebles). La publicidad informa sobre la existencia y el precio de los productos, con un contenido que el consumidor puede verificar.

- *Bienes de experiencia*: su calidad solo se conoce tras consumirlos (p. ej. un restaurante o un libro). La publicidad no puede transmitir la calidad de forma creíble, pero el propio gasto puede señalarla, porque solo a la empresa con un buen producto le compensa anunciarse si espera compras repetidas (Nelson, 1974). La reputación, la marca y las garantías cumplen la misma función.

Darby y Karni (1973) añadieron una tercera categoría, los *bienes de confianza* (*credence goods*), cuya calidad no llega a conocerse ni siquiera después de consumirlos (p. ej. una reparación o un tratamiento médico). Por eso, en ellos la diferenciación descansa en la reputación del vendedor y en la regulación profesional.

3.2.2. Bienes de búsqueda: modelo de Butters (1977)

Origen: Gerard Butters (1977) fue el primero en modelizar la publicidad informativa en un mercado con precios dispersos.

Idea: en los bienes de búsqueda la publicidad informa sobre precios y existencia, y la cuestión es si el mercado genera la cantidad de publicidad socialmente óptima.

Supuestos:

- *Entorno*: la información es imperfecta y el mercado, de competencia monopolística.

- *Agentes*:

- *Empresas*: ofrecen el mismo producto, sin diferenciación horizontal ni vertical, con rendimientos constantes, y la única forma de transmitir información sobre su precio es enviar anuncios aleatorios, que tienen un coste.

- *Consumidores*: tienen demandas unitarias con utilidad $u = s_0 - p$, y cada uno recibe cada anuncio con probabilidad $1/N$, siendo N el número de consumidores. No compran si el precio anunciado excede su precio de reserva y, en otro caso, eligen el menor de los precios recibidos. La probabilidad de no recibir ningún anuncio con m anuncios enviados es $1-\phi \equiv (1-1/N)^m \cong e^{-m/N}$.

Planteamiento: cada empresa elige cuántos anuncios enviar y a qué precio. El equilibrio es una distribución de precios anunciados, porque una empresa que anuncia un precio alto vende solo a quienes no han recibido otro anuncio, y una que anuncia un precio bajo vende a todos los que lo reciben.

Bienestar: el planificador social maximiza $\phi(s_0 - c) - c' \ln[1/(1-\phi)]$, es decir, el excedente total que generan las compras de los consumidores informados menos el coste de la publicidad, ambos por consumidor. En esta expresión, ϕ es la proporción de consumidores informados, c el coste unitario de producción y c' el coste de cada anuncio (pues $\ln[1/(1-\phi)] \cong m/N$ es el número de anuncios por consumidor); ϕ_c denota la proporción de informados en el equilibrio de competencia monopolística.

▪ *CPO*: de $s_0 - c = c'/(1-\phi^*)$ resulta $\phi^* = \phi_c$, es decir, el nivel de publicidad de la competencia monopolística es socialmente óptimo. La razón es que el incentivo de la empresa es independiente del precio y coincide con el del planificador. Los dos coinciden porque un anuncio aumenta el bienestar en $s_0 - c$ siempre que el consumidor no reciba otro, y eso es exactamente lo que la empresa gana con él.

▪ *CSO*: la función objetivo del planificador es estrictamente cóncava en ϕ (su segunda derivada es $-c'/(1-\phi)^2 < 0$), por lo que la CPO caracteriza el óptimo.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: con bienes de búsqueda la publicidad informa sobre precios y existencia, y el equilibrio de mercado puede reproducir el óptimo social, lo que da fundamento al punto de vista favorable.

▪ *Limitaciones*: el resultado descansa en supuestos muy específicos (demandas unitarias, producto homogéneo), y el argumento cambia por completo con los bienes de experiencia.

3.2.3. Bienes de experiencia: diferenciación experimental (Bain, 1956; Schmalensee, 1982)

Origen: Joe Bain (1956) señaló que la lealtad a las marcas ya experimentadas constituye una barrera a la entrada, y Richard Schmalensee (1982) formalizó la ventaja del pionero.

Idea: los bienes cuya diferenciación proviene de la experiencia *ex post* difieren de los bienes de búsqueda porque experimentar tiene un coste, de modo que los consumidores no tratan igual los productos ya probados que los no probados.

Razonamiento: con entrada secuencial y consumidores *a priori* escépticos sobre la calidad de las marcas nuevas, los bienes inicialmente preferidos se convierten en estándar de mercado, porque el consumidor que conoce una marca satisfactoria no tiene incentivo a asumir el coste de probar otra. Ello da lugar a la *ventaja del pionero* (*first-mover advantage*), incluso sin que

el pionero baje sus precios, y a una barrera a la entrada que no procede de la tecnología ni de la conducta estratégica, sino de la información. En los bienes de experiencia la publicidad, la reputación y las garantías sustituyen a la inspección previa como mecanismos de información.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: este resultado conecta la diferenciación de producto con la economía de la información (tema A13) y da fundamento, en este caso, al punto de vista adverso sobre la publicidad.

- *Limitaciones*: supone que los entrantes no pueden vencer el escepticismo de los consumidores, cuando los precios de introducción, las muestras gratuitas, las garantías o la publicidad como señal de calidad pueden reducir la ventaja del pionero. Además, esa ventaja puede reflejar una calidad realmente superior, por lo que la valoración normativa de esa ventaja y de la publicidad es ambigua.

Conclusiones

La diferenciación de producto permite que un mercado con muchas empresas conserve poder de mercado, y lo libra de la paradoja de Bertrand, propia de los bienes homogéneos[17]. En la primera generación, Hotelling muestra que la distancia entre variedades relaja la competencia en precios y, con la corrección de d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979) y costes de transporte cuadráticos, que el efecto estratégico lleva a la diferenciación máxima. Chamberlin concluye que la libre entrada elimina el beneficio pero no el poder de mercado, a costa de un exceso de capacidad, y Dorfman y Steiner relacionan la intensidad publicitaria con las elasticidades de la demanda respecto de la publicidad y del precio. Los modelos posteriores endogenizan el número de variedades. Así, Salop muestra que la libre entrada puede generar un exceso de variedades, y Dixit y Stiglitz microfundamentan la preferencia por la variedad. La diferenciación vertical (Shaked y Sutton) explica por qué la competencia en calidad conduce a oligopolios naturales por grande que sea el mercado, y la informacional, por qué el papel de la publicidad depende de si la calidad se conoce antes o después de comprar.

La preferencia por la variedad de Dixit y Stiglitz permite obtener ganancias del comercio sin ventaja comparativa, el punto de partida de la nueva teoría del comercio (tema B06). El poder de mercado de cada variedad explica, además, por qué las empresas fijan precios en el modelo neokeynesiano (tema A07), y la expansión del número de bienes intermedios es un motor del crecimiento endógeno (tema A44). En la política de competencia, la diferenciación obliga a delimitar el mercado relevante por la sustituibilidad entre variedades (tema A20), y la demanda estimada en el espacio de características (Berry, Levinsohn y Pakes, 1995) permite medir el poder de mercado de cada producto y simular los efectos de las fusiones.

Sigue abierto si el mercado ofrece demasiadas o demasiado pocas variedades. Spence (1976) mostró que el resultado depende de dos efectos de signo contrario, el excedente del que la empresa que entra no puede apropiarse, que lleva a ofrecer pocas variedades, y el robo de demanda a las rivales, que lleva a ofrecer demasiadas (apartado 2.2.2), y Mankiw y Whinston (1986) generalizaron el argumento a cualquier mercado con libre entrada. La cuestión tiene además una vertiente empírica. Broda y Weinstein (2006) estiman que la expansión de las variedades importadas por EE. UU. entre 1972 y 2001 supuso para sus consumidores una ganancia equivalente al 2,6 % del PIB, que los índices de precios convencionales no recogen.

[17] La paradoja puede evitarse también sin diferenciación, con las restricciones de capacidad de Edgeworth o con modelos de competencia dinámica.

A19. Oligopolio

Análisis de mercados (IV). Teoría del oligopolio: soluciones no cooperativas y soluciones cooperativas.

Introducción

> **Introducción común.** Los temas A15 a A21 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A15**. Ordena los mercados en cuatro estructuras según el poder de mercado (competencia perfecta, competencia monopolística, oligopolio y monopolio) y resume la evolución de su análisis, de Cournot y Marshall a la nueva organización industrial y la teoría de la regulación.

El **oligopolio** es la estructura de mercado en la que un número reducido de empresas abastece la demanda y cada una sabe que su resultado depende de lo que hagan las demás. Esa interdependencia estratégica, ausente en la competencia perfecta y en el monopolio, hace de la teoría de juegos su instrumento natural. En muchos sectores, de la aviación a la telefonía, la banca o la energía, unas pocas empresas concentran la mayor parte de la producción. Los primeros modelos fueron de Cournot (1838), con competencia en cantidades, y de Bertrand (1883), con competencia en precios, que llegan a resultados opuestos. En el primero el precio queda entre el de monopolio y el competitivo, y en el segundo dos empresas bastan para llevarlo al coste marginal, la **paradoja de Bertrand**. Stackelberg (1934) añadió la competencia secuencial entre un líder y un seguidor. Como cada empresa influye en el precio y depende a la vez de lo que hagan sus rivales, la teoría ofrece tantos modelos como formas de competir.

Desde los años cincuenta, el **equilibrio de Nash** dio a todos esos modelos un concepto de solución común y convirtió la teoría de juegos (tema A14) en el lenguaje del oligopolio. Con ella se explica por qué la **colusión** es rentable pero difícil de sostener, ya que cada empresa tiene incentivos a desviarse del acuerdo, y cómo la repetición del juego puede hacerla estable (Friedman, 1971). También se explica cómo las empresas instaladas pueden disuadir la entrada de competidores con un compromiso creíble, como una capacidad productiva superior a la de monopolio (Dixit, 1980), y por qué, según la teoría de los **mercados impugnables** de Baumol, Panzar y Willig (1982), la mera amenaza de entrada puede disciplinar a un mercado con pocas empresas. La estructura de un oligopolio deja así de ser un dato y pasa a depender de la tecnología y de las estrategias de las empresas.

Esos resultados fundamentan la política de defensa de la competencia, desde la persecución de los **cárteles**, con los programas de clemencia que explotan la fragilidad de los acuerdos, hasta el control de las concentraciones, que se apoya en índices como el de Herfindahl-Hirschman (tema A20).

El tema se organiza en tres partes:

- *Juegos no cooperativos*: el tema explica cómo compiten las empresas cuando no cooperan.
- *Colusión*: se analiza cuándo pueden las empresas sostener la cooperación.
- *Entrada y disuasión*: el tema termina con las razones por las que la entrada no disuelve los beneficios de las empresas establecidas.

1. Modelos de oligopolio basados en juegos no cooperativos

Cuando las empresas no pueden firmar acuerdos vinculantes, cada una elige su estrategia por separado, como mejor respuesta a lo que espera que hagan sus rivales. Los modelos se distinguen por la variable estratégica (cantidades o precios) y por el orden de las decisiones (simultáneas o secuenciales), y las cuatro combinaciones de ambos criterios ordenan la sección.

1.1. Competencia simultánea en cantidades (Cournot, 1838)

Origen: el oligopolio lo estudió por primera vez el economista matemático francés Augustin Cournot (1838), cuyo modelo sigue siendo la respuesta clásica a la interdependencia estratégica entre empresas.

Idea: las empresas eligen simultáneamente sus cantidades y el precio se ajusta para vaciar el mercado. Cada una fija así sobre su coste marginal un margen relativo (índice de Lerner) proporcional a su cuota de mercado, entre el resultado competitivo y el de monopolio.

1.1.1. Supuestos

Entorno: salvo por el poder de mercado de las empresas, es el de la competencia perfecta. El bien es homogéneo, la información es completa y compartida por todas las empresas, y los consumidores son precio-aceptantes. Existen varias empresas oligopolísticas, cada una con un poder de mercado proporcional a su tamaño, y ninguna fija el precio. Como en el modelo walrasiano de equilibrio general, un *subastador walrasiano* ficticio anuncia el precio que vacía el mercado dada la producción total, $p = p(X)$, sin que se realicen intercambios a otros precios (tema A21, apartado 1.2.3). El análisis es, no obstante, de equilibrio parcial, porque se limita a un solo mercado.

Agentes:

- *Empresas*: producen y venden simultáneamente un bien homogéneo ($X = \sum_{i=1}^{n} x_i$). Cada empresa tiene una función de costes $\mathrm{CT}_i(x_i)$ con $\partial \mathrm{CT}_i/\partial x_i > 0$ (no se exige convexidad). La variable estratégica es la cantidad, mientras que el precio no lo decide ninguna empresa, sino que lo anuncia el subastador.

Las empresas son, además, miopes en el sentido de que, aunque reconocen que su cantidad afecta al precio ($\partial p/\partial x_i \neq 0$), consideran que su conducta no afecta a las otras ($\partial x_j/\partial x_i = 0$, $\forall i \neq j$). Dicho de otro modo, sus variaciones conjeturales son nulas[1].

- *Consumidores*: la demanda inversa de mercado es decreciente, $D^{-1}(X) \equiv p(X)$, con $\partial p/\partial X < 0$.

Restricciones: se cumplen las condiciones de Hahn, de modo que:

- *Primera condición*: las cantidades son *sustitutos estratégicos* ($\partial^2 \pi_i/\partial x_i \partial x_j < 0$)[2], es decir, un aumento de la cantidad de una empresa reduce el beneficio marginal de la otra, lo que la lleva a elegir una cantidad menor.

[1] La variación conjetural refleja la reacción que cada empresa espera de la otra (Varian, 1992, p. 302). Sus valores y los modelos que generan se recogen en el tema A15, apartado 1.4.1.

[2] Habitual con cantidades y capacidades. Los precios suelen ser complementarios estratégicos (Bulow, Geanakoplos y Klemperer, 1985; Tirole, 1988, cap. 8).

▪ *Segunda condición*: la pendiente del coste marginal es mayor que la de la demanda inversa ($p' - \mathrm{CT}_i'' < 0$).

Juntas, ambas condiciones hacen que las funciones del modelo cumplan dos propiedades:

▪ *Funciones de reacción*: tienen, respecto a la cantidad de la rival, pendiente no positiva e inferior a la unidad en valor absoluto, y son continuas.

▪ *Función de beneficios*: es estrictamente cóncava en la propia cantidad ($\partial^2 \pi_i / \partial x_i^2 < 0$), de modo que la mejor respuesta de cada empresa es única.

Además, las condiciones de Hahn garantizan la existencia, la unicidad y la estabilidad del equilibrio de Cournot, propiedades que el desarrollo gráfico permite comprobar.

1.1.2. Modelo

Planteamiento: cada empresa elige su cantidad maximizando el beneficio, dado el resto:

$$\max_{x_i} \ \pi_i = p(X) \cdot x_i - \mathrm{CT}_i(x_i)$$

donde $p(X)$ es la función inversa de demanda del mercado, $X = \sum_i x_i$ la producción total, x_i la cantidad de la empresa i y $\mathrm{CT}_i(x_i)$ su función de costes.

CPO:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = \frac{dp}{dX} \cdot x_i + p(X) - \frac{d\mathrm{CT}_i}{dx_i} = 0$$

$$\mathrm{Img}_i = \mathrm{Cmg}_i \tag{1}$$

$$p = \frac{1}{1 - s_i/|\varepsilon|} \cdot \mathrm{Cmg}_i \equiv (1 + \mu) \cdot \mathrm{Cmg}_i \tag{2}$$

donde $s_i = x_i/X \in [0, 1]$ es la cuota de mercado, $|\varepsilon| \equiv |\varepsilon_{Xp}|$ el valor absoluto de la elasticidad-precio de la demanda de mercado y $s_i/|\varepsilon|$ el índice de Lerner.

La condición (1) indica que los oligopolistas igualan ingreso marginal y coste marginal, al igual que en competencia perfecta o en monopolio. La condición (2), en cambio, muestra que el oligopolista fija un margen μ sobre su coste marginal. El precio es así superior al de competencia perfecta pero inferior al de monopolio, ya que el poder de mercado está repartido entre varias empresas. La distorsión existe porque la elasticidad de su demanda es finita.

Además, la condición (2) anida los casos polares de la teoría de mercados:

▪ *Competencia perfecta*: si la cuota de la empresa tiende a cero o la demanda es infinitamente elástica ($s_i \to 0$ o $|\varepsilon| \to \infty$), el margen desaparece y $p = \mathrm{Cmg}_i$.

▪ *Monopolio*: si la cuota es la unidad ($s_i = 1$), la condición (2) se reduce a $p(1 - 1/|\varepsilon|) = \mathrm{Cmg}_i$, la regla del monopolio.

▪ *Oligopolio*: entre ambos extremos, las empresas con menor coste marginal producen más y tienen mayor cuota ($s_i > s_j \Leftrightarrow \text{Cmg}_i < \text{Cmg}_j$), por lo que la eficiencia relativa determina la estructura del mercado.

CSO: $\partial^2\pi_i/\partial x_i^2 = 2p' + p''x_i - \text{CT}_i'' < 0$, condición que se cumple si la demanda no es demasiado convexa y el coste marginal no decrece. En ese caso, la CPO define la mejor respuesta[3].

Solución: de la condición (1) se obtiene la *función de mejor respuesta* o *función de reacción*, que indica la cantidad óptima de una empresa dada la cantidad de la otra[4], $x_i^* = \varphi_i(x_j)$. A través de las funciones de reacción se demuestra que existe un equilibrio de Nash en estrategias puras de producción[5].

Equilibrio: el *equilibrio de Cournot-Nash* es el par de cantidades (x_1^*, x_2^*) en el que ambas funciones de reacción se cumplen a la vez, es decir, en el que cada empresa produce su mejor respuesta a lo que efectivamente produce la otra. Con empresas simétricas, $x_i^* = x^*$ para todas.

Desarrollo gráfico: el duopolio de Cournot se representa en el plano de cantidades (x_1, x_2)[6] (figura A19.1):

1. *Curvas isobeneficio*, π_1^* y π_2^*: cada una reúne las combinaciones de cantidades de ambas empresas que dan a la empresa respectiva un mismo beneficio. Su forma es cóncava vista desde el eje de esa empresa, y el beneficio que representan crece a medida que se aproximan a ese eje, es decir, a la cantidad de monopolio. De la unión de sus puntos máximos se obtiene la función de reacción[7].

2. *Funciones de reacción*, $\varphi_1(x_2)$ y $\varphi_2(x_1)$: son simétricas (costes iguales) y tienen pendiente negativa, porque un aumento de x_1 implica una disminución de x_2 al repartirse el mercado. Sus cortes con los ejes representan los casos polares, la cantidad de monopolio y la cantidad de competencia perfecta.

3. *Equilibrio*: se alcanza en (x_1^*, x_2^*) (punto 0), en la intersección de las funciones de reacción, y se sitúa sobre la bisectriz si las empresas tienen costes idénticos. Como, en el plano (x_1, x_2), $\varphi_1(x_2)$ es más inclinada que $\varphi_2(x_1)$, el equilibrio es estable, y de no ser así sería inestable.

[3] Con coste marginal no decreciente, la condición algo más fuerte $p' + p''x_i < 0$ asegura además que las funciones de reacción son decrecientes y el equilibrio estable (Hahn, 1962).

[4] Cuando las decisiones son simultáneas nadie puede reaccionar ante el otro, de ahí que se prefiera hablar de "función de mejor respuesta".

[5] En un juego de "una vez" resulta indiferente hablar de acciones y estrategias.

[6] Como $\varphi_1(x_2)$ se representa con los ejes invertidos, en el plano (x_1, x_2) aparece más inclinada que $\varphi_2(x_1)$. Respecto a su propio eje, con costes simétricos, ambas tienen la misma pendiente.

[7] *A priori* no tienen por qué ser rectas, si bien suele suponerse.

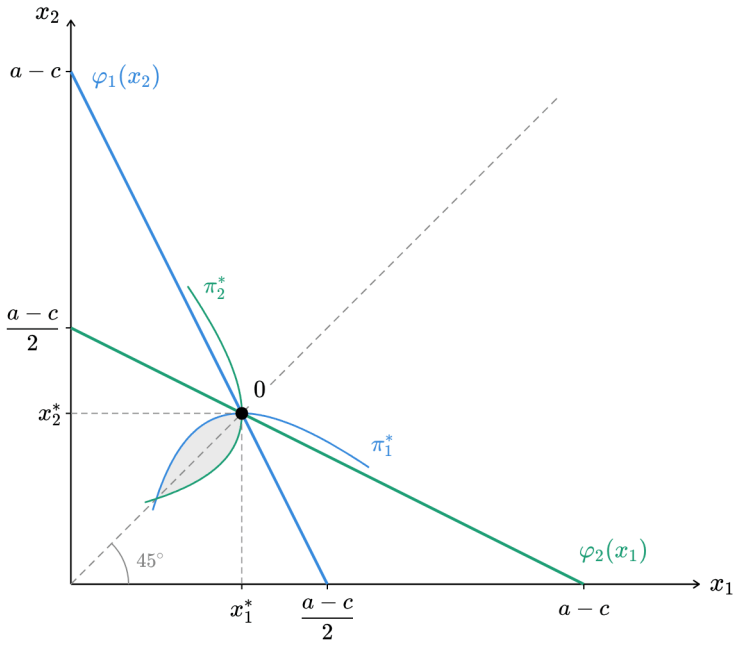


Figura A19.1: Duopolio de Cournot. Las curvas de reacción se cortan en el equilibrio de Nash en cantidades.

Estática comparativa:

▪ *Número de empresas*: con n empresas simétricas de coste marginal constante c y demanda lineal $p = a - X$, cada una produce $x^* = (a-c)/(n+1)$, el precio es $p^* = (a+nc)/(n+1)$ y el margen de Lerner es $(p^* - c)/p^* = 1/(n|\varepsilon|)$.

Al crecer n, la producción total tiende a la competitiva y el precio al coste marginal, de modo que la competencia perfecta es el límite del oligopolio de Cournot cuando el número de empresas crece sin límite.

▪ *Costes*: una reducción del coste marginal de una empresa desplaza hacia fuera su función de reacción. En el nuevo equilibrio esa empresa produce más y gana cuota, y la rival produce menos (las cantidades son sustitutos estratégicos). La reducción de la rival es, sin embargo, menor, porque la pendiente de su función de reacción es inferior a la unidad en valor absoluto. Por ello, la producción total aumenta y el precio baja.

Dinámica: el razonamiento desde la teoría de juegos parte de (x_1^0, x_2^0), donde la empresa 2, confiando en que la 1 mantiene x_1^0, ha escogido su mejor respuesta, $x_2^0 = \varphi_2(x_1^0)$. La empresa 1 también puede deducir esto y ajustar su cantidad, y el razonamiento se repite hasta alcanzar el equilibrio de Nash (x_1^*, x_2^*), cuya producción total en el oligopolio de Cournot (OC) cumple $X_M < X_{\text{OC}} < X_C$. El análisis muestra así que el equilibrio de Cournot es estable, pues las desviaciones se corrigen por las reacciones sucesivas.

Bienestar: el equilibrio de Cournot-Nash no es eficiente en el sentido de Pareto, ni para el conjunto de la sociedad (el precio supera el coste marginal) ni para las propias empresas, porque sus

curvas isobeneficio no son tangentes. El área encerrada entre ellas se conoce como *lente de Pareto*, que representa cómo ambas empresas podrían obtener mayores beneficios si cooperasen[8].

Extensiones: con costes asimétricos, ponderando por las cuotas el índice de Lerner de cada empresa (condición (2)), el margen medio de la industria es igual al índice de Herfindahl-Hirschman, calculado con cuotas en tanto por uno, dividido por la elasticidad, $\sum_i s_i(p - \text{Cmg}_i)/p = \sum_i s_i^2/|\varepsilon| = \text{HHI}/|\varepsilon|$. Este resultado fundamenta el uso de los índices de concentración (tema A20, apartado 3.2.1).

1.1.3. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo obtiene una predicción razonable y anidada en las estructuras polares, $X_C > X_{\text{OC}} > X_M$ y $p_C < p_{\text{OC}} < p_M$, y su equilibrio, con las condiciones de Hahn, existe, es único y es estable. El modelo es, además, la referencia de la teoría del oligopolio y la base de los índices de concentración que relacionan estructura y conducta (tema A20).

Limitaciones: se le reprocha, por un lado, su poco realismo, pues las empresas compiten en cantidades y un subastador fija el precio, y, por otro, la miopía de unas empresas que no aprenden de cómo responden las rivales. En respuesta a lo primero, Bertrand desarrolló un modelo alternativo basado en precios, y en respuesta a lo segundo Stackelberg introdujo la anticipación.

1.2. Competencia secuencial en cantidades (Stackelberg, 1934)

Origen: Stackelberg (1934) propuso el liderazgo en cantidades en respuesta a la miopía de las empresas del modelo de Cournot.

Idea: las decisiones son secuenciales. Una empresa líder elige primero su cantidad anticipando la reacción de la seguidora, lo que le confiere la ventaja de mover primero.

1.2.1. Supuestos

Entorno: los supuestos son idénticos a los de Cournot (información completa, competencia en cantidades, bien homogéneo), con la diferencia de que la toma de decisiones es secuencial, en un juego en dos periodos.

Agentes:

- *Empresa líder*: elige en primer lugar la cantidad a producir. Su ventaja es exógena (p. ej. una inversión previa en capacidad) y constituye un compromiso creíble. Conoce la función de reacción de la seguidora (no es una ventaja informacional, porque con información completa ambas la conocen). Por tanto, su variación conjetural no es nula, sino $\partial x_2/\partial x_1 = \varphi_2'(x_1) < 0$, ya que anticipa que la seguidora reducirá su producción cuando ella aumente la suya.

- *Empresa seguidora*: no toma su decisión hasta observar la cantidad de la líder. Como esa cantidad ya está fijada cuando decide, su variación conjetural es nula, igual que en Cournot.

[8] No coluden porque el juego es de una sola jugada, y para hacerlo haría falta un acuerdo vinculante o castigos creíbles (Gravelle y Rees, 2004).

1.2.2. Modelo

Planteamiento: el juego se resuelve por inducción hacia atrás. La elección de la seguidora, en el segundo periodo, es idéntica a la de Cournot:

$$\max_{x_2} \ \pi_2 = p(x_1 + x_2) \cdot x_2 - \mathrm{CT}_2(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_2 = \varphi_2(x_1)$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades de la líder y de la seguidora, $p(x_1 + x_2)$ la demanda inversa, $\mathrm{CT}_2(x_2)$ el coste de la seguidora y $\varphi_2(x_1)$ su función de reacción.

La elección de la líder, en el primer periodo, maximiza su beneficio anticipando la respuesta de la seguidora, cuya función de reacción entra como restricción:

$$\max_{x_1} \ \pi_1 = p(x_1 + x_2) \cdot x_1 - \mathrm{CT}_1(x_1) \quad \text{s.a.: } x_2 = \varphi_2(x_1)$$

donde $\mathrm{CT}_1(x_1)$ es el coste de la líder y la restricción recoge que la seguidora responderá según su función de reacción $\varphi_2(x_1)$.

CPO: sustituyendo la función de reacción en el beneficio de la líder y derivando respecto a x_1:

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_1} x_1 + p}_{\mathrm{Img}_1} + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \cdot x_1}_{\text{efecto estratégico}>0} = \mathrm{Cmg}_1$$

Se llega a la misma CPO que en Cournot, pero con un término adicional, el efecto estratégico, que refleja cómo la líder anticipa su impacto sobre la seguidora.

CSO: la de la seguidora es la de Cournot. Para la líder, el beneficio ha de ser cóncavo en x_1 a lo largo de la función de reacción de la seguidora, lo que se cumple con demanda lineal y costes convexos.

Equilibrio: el equilibrio de Stackelberg es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) en el que la líder produce la cantidad que maximiza su beneficio sobre la función de reacción de la seguidora, y esta elige su mejor respuesta. Respecto a Cournot, la líder produce más y obtiene mayor beneficio, y la seguidora produce menos y obtiene menos.

Como la seguidora reduce su producción en menos de lo que la líder la aumenta (siempre que la pendiente de su función de reacción esté entre -1 y 0), el *output* total es mayor y el precio inferior. El liderazgo tiene, por ello, un efecto procompetitivo. La ordenación de las estructuras de mercado por cantidad y precio es, entonces, $X_C > X_S > X_{\mathrm{OC}} > X_M$ y $p_C < p_S < p_{\mathrm{OC}} < p_M$, y Stackelberg se sitúa entre Cournot y la competencia perfecta.

Ejemplo: Stackelberg frente a Cournot con demanda lineal

Sea $p = a - X$, con $X = x_1 + x_2$, y coste marginal constante $c < a$ en ambas empresas. La CPO de la seguidora da su función de reacción, $\varphi_2(x_1) = (a-c-x_1)/2$, de pendiente $-1/2$. Sustituyéndola en el beneficio de la líder:

$$\pi_1 = \left(a - c - x_1 - \frac{a-c-x_1}{2}\right) x_1 = \frac{(a-c-x_1)\,x_1}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{a-c}{2}, \quad x_2 = \varphi_2(x_1) = \frac{a-c}{4}$$

Así, $X_S = 3(a-c)/4$, $p_S = (a+3c)/4$, $\pi_1 = (a-c)^2/8$ y $\pi_2 = (a-c)^2/16$. En Cournot (con $n = 2$) cada empresa produce $(a-c)/3$ y gana $(a-c)^2/9$, con la siguiente ordenación de las producciones totales:

$$X_C = a - c \;>\; X_S = \tfrac{3}{4}(a-c) \;>\; X_{\text{OC}} = \tfrac{2}{3}(a-c) \;>\; X_M = \tfrac{1}{2}(a-c)$$

La líder aumenta su producción en $(a-c)/6$ y la seguidora la reduce solo en $(a-c)/12$, de modo que la líder gana más que en Cournot ($1/8 > 1/9$), la seguidora menos ($1/16 < 1/9$) y el liderazgo es procompetitivo.

Desarrollo gráfico: el liderazgo de Stackelberg se representa en el plano de cantidades (x_1, x_2) (figura A19.2):

1. *Funciones de reacción*, $\varphi_1(x_2)$ y $\varphi_2(x_1)$: son las de Cournot, que se cortan en el punto OC, y la de la seguidora, $\varphi_2(x_1)$, es la restricción de la líder.

2. *Curvas isobeneficio de la líder*, $\pi_{1,\text{OC}}$ y $\pi_{1,S}$: reúnen las combinaciones de cantidades que dan a la líder un mismo beneficio, mayor cuanto más baja es la curva, porque la seguidora produce menos.

3. *Equilibrio*: no se produce en el cruce de las funciones de reacción, como en Cournot, sino en el punto de la función de reacción de la seguidora tangente a la curva isobeneficio más baja alcanzable de la líder, $\pi_{1,S}$ (punto 0). La líder elige así sobre la curva de reacción de la seguidora el punto que más le conviene, con una cantidad $x_{1,S}$ a la derecha de la de Cournot, mientras la de la seguidora, $x_{2,S}$, queda por debajo.

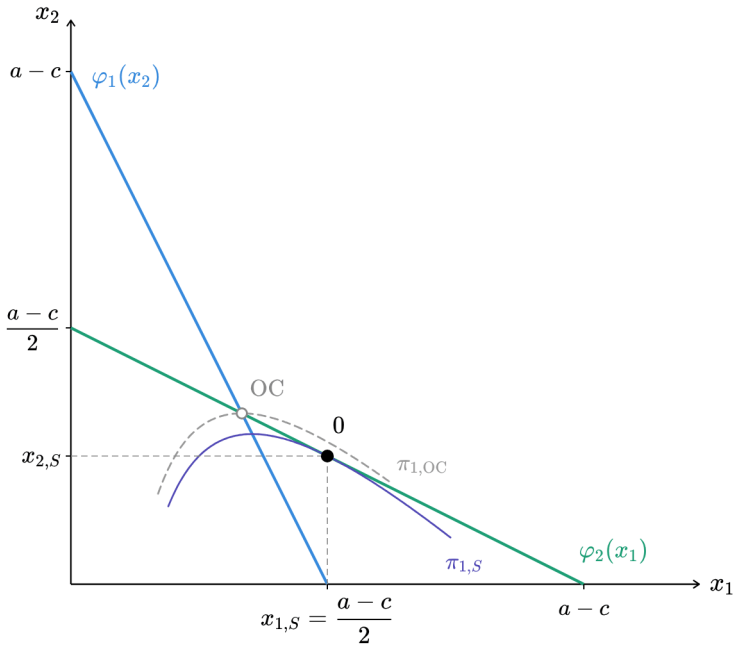


Figura A19.2: Liderazgo de Stackelberg. El líder elige, sobre la curva de reacción del seguidor, el punto de su isobeneficio más baja, que es la de mayor beneficio.

Estática comparativa:

▪ *Tamaño del mercado y coste común*: con demanda lineal y coste marginal común (ejemplo anterior), las cantidades de equilibrio son proporcionales a $a-c$. Por tanto, un aumento de a o una reducción de c las eleva en la misma proporción, y la líder conserva dos tercios de la producción total. El precio, $p_S=(a+3c)/4$, sube con a y con c.

▪ *Coste de la líder*: una reducción de su coste marginal eleva su cantidad y, a lo largo de la función de reacción de la seguidora, reduce la de esta en menor cuantía, con lo que la producción total aumenta y el precio baja.

Bienestar: el equilibrio de Stackelberg no es eficiente en el sentido de Pareto, porque el precio sigue superando el coste marginal y las empresas obtendrían un beneficio conjunto mayor coludiendo. Sin embargo, al ser mayor la producción total y menor el precio, el excedente del consumidor aumenta respecto a Cournot y, con costes marginales constantes e idénticos, la pérdida irrecuperable de eficiencia es menor.

Extensiones: con precios, el liderazgo invierte el resultado y la ventaja pasa a la seguidora. El liderazgo con precios tiene un antecedente anterior a la teoría de juegos, el modelo de la empresa dominante (Anexo A.2).

1.2.3. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo de Stackelberg introduce el tiempo y la ventaja de mover primero (*first-mover advantage*) en la competencia oligopolística, una ventaja que se observa en muchos sectores, como el petrolero.

Limitaciones: la asignación de los papeles de líder y seguidor es exógena y no se explica, y si ambas empresas intentan liderar no existe equilibrio (guerra de Stackelberg). Además, el compromiso del líder solo es creíble si su decisión es irreversible, lo que remite a la teoría de juegos dinámicos del tema A14.

1.3. Competencia simultánea en precios (Bertrand, 1883)

Origen: Bertrand (1883) desarrolló, como crítica al escaso realismo del modelo de Cournot, un modelo alternativo basado en precios.

Idea: con producto homogéneo, costes marginales constantes e idénticos y sin restricciones de capacidad, la competencia simultánea en precios entre solo dos empresas reproduce el resultado competitivo.

1.3.1. Supuestos

Entorno: los supuestos son los de Cournot, con la diferencia decisiva de que la variable estratégica es el precio, que las empresas fijan de manera simultánea.

Agentes:

▪ *Empresas*: producen un bien homogéneo con rendimientos constantes y costes idénticos, y sin restricciones de capacidad, de modo que cada una puede abastecer a todo el mercado.

Como en Cournot, la variación conjetural de cada empresa es nula, pero referida a su variable estratégica, el precio ($\partial p_j/\partial p_i = 0$). Dicho de otro modo, cada empresa fija su precio suponiendo que la rival mantendrá el suyo, lo que, expresado en cantidades, equivale a la conjetura $v_i = -1$ del modelo de variaciones conjeturales (tema A15, apartado 1.4.1).

▪ *Consumidores*: como los bienes son homogéneos, compran al vendedor más barato y, si los precios coinciden, se reparten a partes iguales entre las dos empresas. La demanda de cada empresa es por ello discontinua en el precio del rival:

$$d_i(p_i, p_j) = \begin{cases} X(p_i) & \text{si } p_i < p_j \\ X(p_i)/2 & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

1.3.2. Modelo

Planteamiento (funciones de reacción): como la función de beneficios no es diferenciable, las funciones de reacción se obtienen directamente de la lógica de la demanda:

$$p_i \equiv \varphi_i(p_j) = \begin{cases} p_M & \text{si } p_j > p_M \\ p_j - \eta & \text{si } c < p_j \leq p_M \\ c & \text{si } p_j \leq c \end{cases}$$

Ante cualquier precio de la empresa 2 que supere su coste marginal, la empresa 1 puede cobrar apenas un poco menos ($p_2 - \eta$, con $\eta > 0$ arbitrariamente pequeño), quedarse con toda la demanda y ganar beneficios extraordinarios. Ninguna de esas combinaciones de precios es, por tanto, un equilibrio de Nash (EN).

Equilibrio: en estrategias puras de precios hay un solo equilibrio de Nash, $p_1^* = p_2^* = c$, con $\pi_1^* = \pi_2^* = 0$, en el que las dos cobran lo mismo y ese precio coincide con su coste marginal. A ninguna le conviene apartarse de él, porque una subida en solitario la deja sin clientes, y una bajada la obliga a vender cada unidad por menos de lo que le cuesta, con pérdidas.

Desarrollo gráfico: la competencia de Bertrand se representa en el plano de precios (p_1, p_2) (figura A19.3):

1. *Función de reacción de la empresa 1*, $\varphi_1(p_2)$: discurre paralela a la bisectriz y justo por encima de ella (rebaja infinitesimalmente el precio del rival) entre el coste marginal y el precio de monopolio. Es vertical en $p_1 = p_M$ cuando el rival fija un precio superior al de monopolio y en $p_1 = c$ cuando lo fija por debajo del coste marginal.

2. *Función de reacción de la empresa 2*, $\varphi_2(p_1)$: es la simétrica de la anterior respecto a la bisectriz, con esos tramos horizontales.

3. *Equilibrio*: las dos funciones solo se cortan en (c, c) (punto 0), que es el único equilibrio.

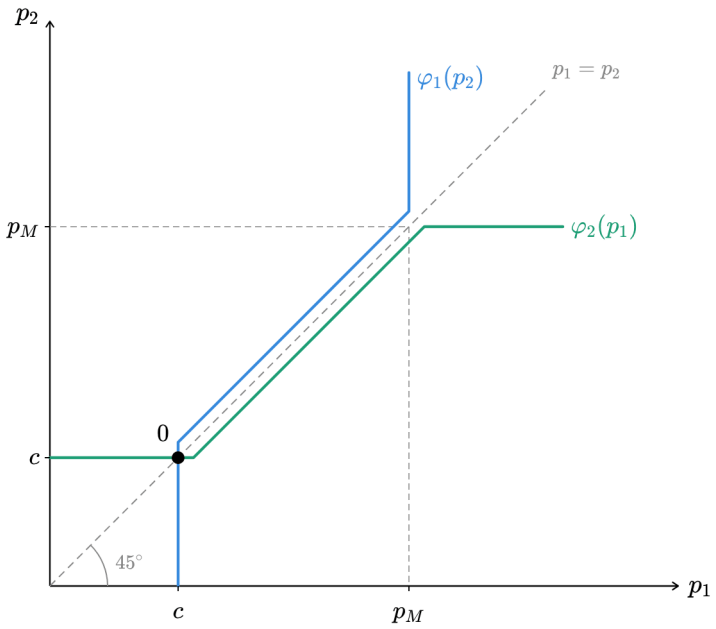


Figura A19.3: Competencia de Bertrand con bienes homogéneos. Las curvas de reacción en precios llevan al equilibrio en el coste marginal.

Estática comparativa:

- *Costes*: el precio de equilibrio es igual al coste marginal común, de modo que una variación de c se traslada íntegramente al precio y los beneficios siguen siendo nulos.

- *Número de empresas*: a partir de dos, no altera el equilibrio ($p = c$), a diferencia de Cournot, donde el margen se reduce gradualmente al aumentar n.

Bienestar: el equilibrio de Bertrand-Nash es ineficiente para las propias empresas, que, si cooperasen, obtendrían mayores beneficios. A diferencia de Cournot, sí es eficiente en el sentido de Pareto para el conjunto de la sociedad, ya que el precio es el competitivo y no hay pérdida irrecuperable de eficiencia.

1.3.3. La paradoja de Bertrand y sus soluciones

Origen: la primera objeción al resultado de Bertrand vino de Edgeworth (1897), que limitó la capacidad de producción de las empresas.

Idea: que las empresas compitan en precios[9] es más verosímil que el supuesto de Cournot, que las hace competir en cantidades, pero la conclusión del modelo lo es menos. Esa conclusión, la *paradoja de Bertrand*, es que bastan dos empresas para reproducir el resultado de la competencia perfecta ($p = c$, $\pi = 0$). Cuesta aceptarla, porque en las industrias con pocos competidores las empresas logran fijar precios supracompetitivos, y la literatura ha buscado qué supuesto del modelo la genera.

Razonamiento: cada una de las soluciones a la paradoja relaja uno de los supuestos:

1. *Restricciones de capacidad*: si las empresas no pueden abastecer a todo el mercado, se rompe la lógica de acaparar toda la demanda bajando el precio. Dos resultados precisan sus consecuencias:

- *Ciclos de Edgeworth* (Edgeworth, 1897): el equilibrio puede no existir en estrategias puras y los precios siguen un comportamiento cíclico (suben y caen), análogo al observado con los precios del carburante.

- *Solución de Kreps y Scheinkman* (1983): si las empresas eligen primero su capacidad (con coste) y compiten después en precios, con racionamiento eficiente y demanda cóncava, el resultado del juego completo coincide con el equilibrio de Cournot. La competencia en precios a corto plazo es, así, compatible con la competencia en cantidades a largo plazo, y la capacidad es la verdadera variable estratégica. Este resultado justifica, *a posteriori*, la competencia en cantidades que suponen los modelos de disuasión de la entrada mediante inversión en capacidad (apartado 3.2.2).

2. *Diferenciación de producto*: si el bien no es homogéneo (tema A18, apartado 1.2), las funciones de reacción se vuelven continuas y de pendiente positiva (los precios son *complementarios estratégicos*). Con ello, el equilibrio se produce con precios por encima del coste marginal y beneficios positivos (figura A19.4).

3. *Costes asimétricos*: la empresa de menor coste marginal puede fijar un precio ligeramente inferior al coste de la rival y obtener beneficios.

4. *Interacción repetida*: si las empresas se encuentran periodo tras periodo, la cooperación tácita puede sostenerse mediante amenazas de castigo, como se desarrolla en el apartado 2.

Gráficamente, con producto diferenciado (solución 2), en el plano de precios (p_1, p_2) (figura A19.4), las funciones de reacción, $\varphi_1(p_2)$ y $\varphi_2(p_1)$, son crecientes, porque los precios son complementarios estratégicos, y se cortan en el punto 0, con precios p_1^* y p_2^* superiores al coste marginal, c.

[9] Los costes de ajuste de precios son previsiblemente menores que los de cantidades.

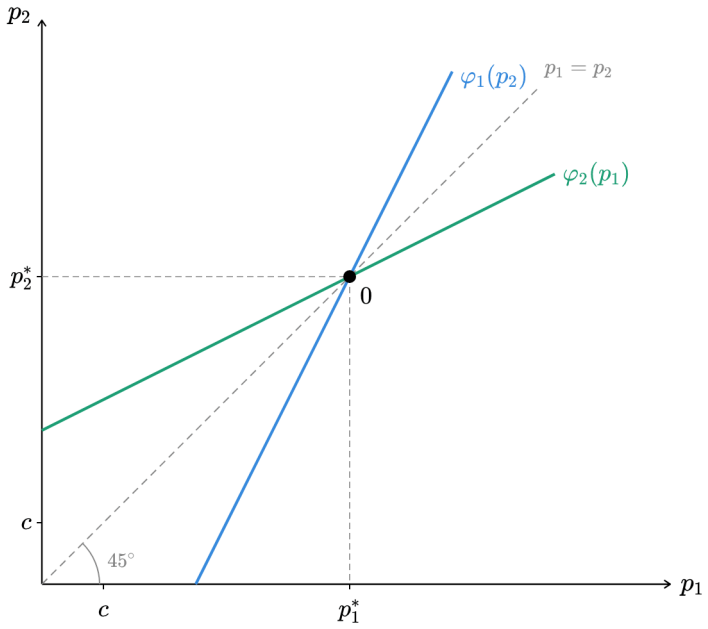


Figura A19.4: Bertrand con productos diferenciados. Las funciones de reacción son crecientes (los precios son complementarios estratégicos) y en el equilibrio los precios quedan por encima del coste marginal.

1.3.4. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo de Bertrand muestra que la variable estratégica importa, y su resultado competitivo se convierte en la referencia frente a la que se miden los demás modelos.

Limitaciones: la paradoja de Bertrand descansa en supuestos extremos (costes marginales idénticos y constantes, capacidad ilimitada, producto homogéneo, interacción única). Relajarlos, como hacen Edgeworth, la diferenciación de producto o los juegos repetidos con horizonte indefinido y empresas suficientemente pacientes, restablece precios por encima del coste marginal.

1.4. Competencia secuencial en precios (Gal-Or, 1985)

> **Sobre esta sección**
>
> En la exposición, este apartado puede presentarse de forma simplemente gráfica, con las funciones de reacción en precios del desarrollo gráfico (figura A19.5), sin el álgebra del apartado 1.4.2. Basta mostrar que la líder elige, sobre la función de reacción creciente de la seguidora, el punto de mayor beneficio.

Origen: Gal-Or (1985) mostró que, entre empresas idénticas, mover primero es una ventaja si las funciones de reacción son decrecientes, como con cantidades, y una desventaja si son crecientes, como con precios y producto diferenciado.

Idea: en la versión en precios del modelo de Stackelberg, la líder sube su precio para que la seguidora también suba el suyo. Los dos precios superan los de Bertrand, y la seguidora, que cobra algo menos, gana más que la líder (*ventaja de mover segundo*).

1.4.1. Supuestos

Entorno: los supuestos son los de Bertrand, con decisiones secuenciales, en dos periodos, y producto diferenciado. La demanda de cada empresa es lineal y simétrica:

$$x_i = a - p_i + \gamma\, p_j, \qquad i \neq j$$

donde x_i son las ventas de la empresa i, p_i y p_j los precios propio y de la rival, $a > (1-\gamma)\, c$ el tamaño del mercado, c el coste marginal común y $\gamma \in (0,1)$ el grado de sustituibilidad entre los productos. La diferenciación es necesaria, porque con producto homogéneo la seguidora rebajaría cualquier precio de la líder superior a c y se quedaría con todo el mercado, y el resultado seguiría siendo el de Bertrand ($p = c$).

Agentes:

- *Empresa líder* (empresa 1): fija primero su precio, p_1, con un compromiso creíble, y conoce la función de reacción de la seguidora.
- *Empresa seguidora* (empresa 2): observa p_1 y fija p_2 como mejor respuesta.

1.4.2. Modelo

Planteamiento: por inducción hacia atrás, la seguidora responde a p_1 como en Bertrand, y la líder maximiza su beneficio sujeta a esa respuesta:

$$\max_{p_1}\ \pi_1 = (p_1 - c)\,(a - p_1 + \gamma\, p_2) \quad \text{s.a.: } p_2 = \varphi_2(p_1) = \frac{a + c + \gamma\, p_1}{2}$$

donde π_1 es el beneficio de la líder y $\varphi_2(p_1)$ la función de reacción de la seguidora, que resulta de su CPO y es creciente en el plano (p_1, p_2), con pendiente $\gamma/2$.

CPO: sustituyendo la función de reacción de la seguidora en el beneficio de la líder y derivando respecto a p_1, la CPO de la líder añade a la condición de Bertrand un efecto estratégico:

$$\underbrace{a - 2p_1 + \gamma\, p_2 + c}_{\text{CPO de Bertrand}} + \underbrace{(p_1 - c)\,\gamma \cdot \varphi_2'(p_1)}_{\text{efecto estratégico}>0} = 0$$

Una subida de p_1 lleva a la seguidora a subir p_2, lo que devuelve a la líder parte de la demanda perdida. La líder percibe así una demanda menos elástica que en Bertrand y cobra más, mientras que con cantidades el efecto estratégico la lleva a producir más.

CSO: sustituida la función de reacción, el beneficio de la líder es cuadrático en p_1, con segunda derivada $-(2-\gamma^2) < 0$, y el de la seguidora lo es en p_2, con segunda derivada -2, por lo que las CPO caracterizan máximos.

Equilibrio: en el ENPS, con $p^* = (a+c)/(2-\gamma)$ como precio de Bertrand simultáneo, los precios de la líder y de la seguidora son

$$\hat{p}_1 - c = \left[1 + \frac{\gamma^2}{2(2-\gamma^2)}\right](p^* - c), \qquad \hat{p}_2 - c = \left[1 + \frac{\gamma^3}{4(2-\gamma^2)}\right](p^* - c)$$

Los dos corchetes superan la unidad y el primero es mayor, de modo que $\hat{p}_1 > \hat{p}_2 > p^*$, y los beneficios cumplen $\hat{\pi}_2 > \hat{\pi}_1 > \pi^*$. La líder gana más que en Bertrand, porque podría fijar p^* y obtener π^*. La seguidora gana aún más, pues copiando el precio de la líder obtendría lo que la líder ganaría frente a un rival igual de caro. Ese beneficio supera $\hat{\pi}_1$, porque la rival real de la líder cobra menos, y la mejor respuesta de la seguidora le da todavía más. Por tanto, al revés que en Stackelberg con cantidades, la ventaja es de mover segundo.

Desarrollo gráfico: la competencia secuencial se representa en el plano de precios (p_1, p_2) (figura A19.5):

1. *Funciones de reacción*, $\varphi_1(p_2)$ y $\varphi_2(p_1)$: son las de Bertrand, crecientes, que se cortan en (p^*, p^*) (punto 0), y la de la seguidora es la restricción de la líder.

2. *Curvas isobeneficio de la líder*, π_1^* y $\hat{\pi}_1$: tienen forma de U, con el mínimo sobre $\varphi_1(p_2)$, y cuanto más altas, mayor es el beneficio, porque la líder vende más cuanto más cobra su rival.

3. *Equilibrio*: la líder elige sobre $\varphi_2(p_1)$ el punto de tangencia con su isobeneficio más alta, $\hat{\pi}_1$ (punto 1). Los dos precios superan p^*, y el punto queda bajo la bisectriz, porque la seguidora cobra menos que la líder.

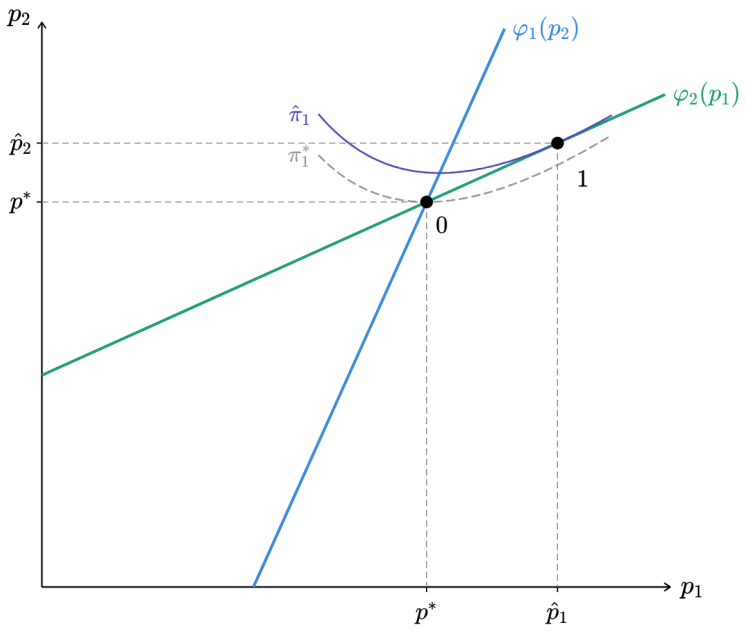


Figura A19.5: Competencia secuencial en precios. La líder elige, sobre la función de reacción de la seguidora, el punto de tangencia con su isobeneficio más alta (punto 1), con los dos precios por encima de los de Bertrand simultáneo (punto 0).

Estática comparativa: las subidas de precio respecto a Bertrand, de orden γ^2 en la líder y γ^3 en la seguidora, crecen con la sustituibilidad, y con ellas la ventaja de la seguidora. Si $\gamma \to 0$, cada empresa fija su precio de monopolio y el orden de juego deja de importar.

Bienestar: las empresas ganan y los consumidores pierden, y, con esta demanda lineal, la pérdida de excedente del consumidor supera la ganancia de beneficios y el bienestar total cae. Por ello, al contrario que con cantidades, el liderazgo es anticompetitivo.

Extensiones: Hamilton y Slutsky (1990) hacen endógeno el orden de juego, con empresas que anuncian antes si fijarán su precio pronto o tarde (juego con espera observable). Si las dos ganan con el juego secuencial, como aquí, el equilibrio es secuencial, con cualquiera de ellas como líder. Con cantidades, en cambio, la seguidora pierde frente a Cournot y las dos deciden a la vez.

1.4.3. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo completa la clasificación de la sección y muestra que la pendiente de las funciones de reacción decide quién gana con el orden de juego. Da, además, un fundamento no colusivo al liderazgo en precios (Anexo A.2), que eleva los precios sin acuerdo alguno.

Limitaciones: los papeles son exógenos, como en Stackelberg, y el compromiso de la líder es menos verosímil con precios, que se revisan con facilidad, que con capacidades. El grado de diferenciación se toma, además, como dado (tema A18, apartado 1.2).

1.5. Conclusiones

Los modelos estáticos de oligopolio comparten un resultado central, el de que la variable estratégica determina el grado de competencia. Se distinguen dos casos:

- *Competencia en cantidades*: el equilibrio se sitúa entre el monopolio y la competencia perfecta y se aproxima a esta última conforme aumenta el número de competidores.

- *Competencia en precios*: con los supuestos de Bertrand bastan dos empresas para replicar el resultado competitivo, lo que constituye la paradoja de Bertrand. Con producto diferenciado, el liderazgo eleva los dos precios y favorece a la seguidora.

De ahí procede la relevancia de los supuestos que matizan la paradoja. Las restricciones de capacidad, la diferenciación del producto, la asimetría de costes y, sobre todo, la interacción repetida devuelven poder de mercado a las empresas y explican por qué la evidencia empírica rara vez muestra precios iguales al coste marginal en mercados concentrados. Ese último factor, la repetición, abre el análisis de la colusión. Las variaciones conjeturales, que reunían estos modelos en una sola condición de primer orden, se desarrollan en el tema A15, apartado 1.4.1.

2. Modelos de oligopolio basados en la colusión: soluciones cooperativas

Ninguna empresa gana desviándose de las soluciones estáticas no cooperativas anteriores, que son por ello equilibrios de Nash. Sin embargo, para las empresas no son óptimos de Pareto, ya que coordinándose ganarían más. El problema es que esa cooperación no es estable.

Antes de la teoría de juegos, la coordinación tácita se explicaba con dos modelos, la demanda quebrada (Sweezy, 1939) y el liderazgo en precios de la empresa dominante, que se recogen en el Anexo.

Una forma de enriquecer el análisis de la cooperación sin salir de los juegos no cooperativos es considerar aspectos dinámicos. La introducción de un marco dinámico supone:

- *Repetición*: considerar más de un periodo, con un superjuego que suma juegos independientes[10].

- *Respuesta a la historia*: las empresas pueden reaccionar a las acciones anteriores de sus competidores.

- *Credibilidad y compromiso*: con información completa, el equilibrio relevante es el ENPS, y ambos conceptos (y el de coste hundido) desempeñan un papel central.

- *Inducción hacia atrás*: con horizonte finito, el juego se resuelve desde el último periodo.

2.1. Alianzas no sostenibles

Conviene mostrar primero que introducir aspectos dinámicos no implica por sí solo la cooperación. Para ello, los acuerdos entre empresas se clasifican según dos criterios independientes.

Según su exigibilidad:

- *Vinculantes*: un tercero (un tribunal o un árbitro, que aplican el contrato o la ley) obliga a cumplirlos, y los estudian los juegos cooperativos.

- *No vinculantes*: nadie puede obligar a cumplirlos, solo los sostienen los incentivos de las partes y los estudian los juegos no cooperativos.

Según su forma:

- *Explícitos*: media comunicación y un acuerdo formal entre las empresas, como en el cártel[11][12].

- *Tácitos*: la coordinación surge sin comunicación, de la mera repetición de la interacción[13].

Por último, los acuerdos colusivos ilegales son siempre no vinculantes, sean explícitos o tácitos, porque ningún tribunal hará cumplir un cártel.

[10] Siempre que no se produzcan cambios en la estructura del juego (p. ej. inversiones o cambios en el entorno competitivo).

[11] Los acuerdos deben incluir cómo repartir beneficios, lo cual aumenta los costes de transacción.

[12] Los cárteles privados suelen estar prohibidos (la Ley Sherman de EE. UU., de 1890, nació contra ellos y contra los *trusts*). Hay, sin embargo, cárteles legales o tolerados: de exportación, agrícolas, como los de la política agrícola común (PAC), o intergubernamentales, como la Organización de Países Exportadores de Petróleo (OPEP).

[13] Desde el punto de vista jurídico, la colusión tácita no suele ser ilegal, puesto que no hay acuerdo formal ni voluntad explícita.

2.1.1. Cártel o colusión: el cuasimonopolio multiplanta

Idea: el cártel se modeliza como el monopolista multiplanta del tema A17. Si las empresas coordinan precios y cantidades, el conjunto de la industria se comporta como un único monopolista con varias plantas, que fija la cantidad de monopolio y la reparte entre las empresas según sus costes.

Planteamiento: el cártel maximiza el beneficio conjunto como un monopolista multiplanta:

$$\max_{\{x_1,\dots,x_n\}} \pi = p(X)\cdot X - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{CT}_i(x_i)$$

donde $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ es la producción total del cártel, $p(X)$ la demanda inversa de mercado, x_i la cantidad asignada a la empresa i y $\mathrm{CT}_i(x_i)$ su función de costes. Las variables de decisión son las cantidades de cada empresa, que fijan a la vez la producción total y su reparto.

CPO: derivando respecto a cada x_i,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial x_i} &= p(X) + \frac{dp}{dX}\,X - \frac{d\mathrm{CT}_i}{dx_i} = 0 \\ &\Rightarrow\ \mathrm{Img}(X) = \mathrm{Cmg}_i(x_i) = \mathrm{Cmg}_j(x_j) \quad \forall\, i,j \end{aligned}$$

Como todas las unidades se venden al mismo precio, el ingreso marginal, $\mathrm{Img}(X)$, solo depende del total producido, no de la planta que fabrique la última unidad. El cártel asigna la producción a la planta de menor coste marginal, hasta que los costes marginales de todas se igualan entre sí y con el ingreso marginal. Por tanto, las empresas con costes más bajos producen más.

CSO: el ingreso marginal es decreciente y los costes marginales de cada planta no decrecientes, lo cual garantiza que la solución de la CPO es un máximo.

Solución: la forma de los costes marginales condiciona el reparto de la producción entre las empresas:

- *Costes constantes*: si no hay límite de capacidad, la solución es de esquina y la planta de menor coste produce toda la cantidad, fijada por Img = Cmg.

- *Costes crecientes*: la producción se asigna igualando los costes marginales entre plantas.

Los beneficios conjuntos son los máximos posibles dada la demanda y la estructura de costes, si bien se produce una pérdida irrecuperable de eficiencia. Con empresas idénticas, el cártel equivale a dividir la demanda en n partes iguales y dejar que cada empresa se comporte como monopolista en la suya.

Equilibrio: el acuerdo de cártel no constituye un equilibrio de Nash, ya que cada miembro tiene incentivos para desviarse. Si toma como dado el precio pactado (p_M), a cada empresa le conviene ampliar su producción hasta que su coste marginal alcance ese precio[14], y así obtiene beneficios extraordinarios.

Si el resto mantiene el acuerdo, la empresa prefiere incumplirlo, y si el resto lo incumple, esta también preferirá incumplirlo. Por tanto, incumplir es una estrategia dominante y el resultado es el del dilema del prisionero.

[14] La aproximación es aceptable siempre que cada empresa pese poco en el total producido. Con pocas empresas, por el contrario, la que se desvía tiene en cuenta que su expansión rebaja el precio y produce hasta igualar su ingreso marginal individual, $p + p' x_i$, con su coste marginal, cantidad que sigue superando la acordada.

Desarrollo gráfico: la colusión se representa en el plano cantidad-precio de la industria y en el de una empresa del cártel (figura A19.6, paneles a y b):

1. *Demanda e ingreso marginal*, $D(X)$ e $\text{Img}(X)$ (panel a): son los del mercado.

2. *Coste marginal agregado*, $\text{Cmg}(X)$ (panel a): es la suma horizontal de los costes marginales de las empresas, como el $\text{Cmg}_i(x_i)$ de la empresa i (panel b).

3. *Equilibrio*: el cártel produce X_M, donde $\text{Img}(X) = \text{Cmg}(X)$, y fija sobre la demanda el precio p_M. La cuota de la empresa i, x_i^M, es la cantidad en la que su coste marginal iguala el valor común del ingreso marginal, $\text{Img}(X_M)$.

Si la empresa toma p_M como dado, le conviene producir x_i^d, donde $\text{Cmg}_i(x_i) = p_M$. El área sombreada entre p_M y su coste marginal, de x_i^M a x_i^d, mide el beneficio adicional que obtiene rompiendo el acuerdo mientras las demás lo cumplen, $\Delta\pi_i$.

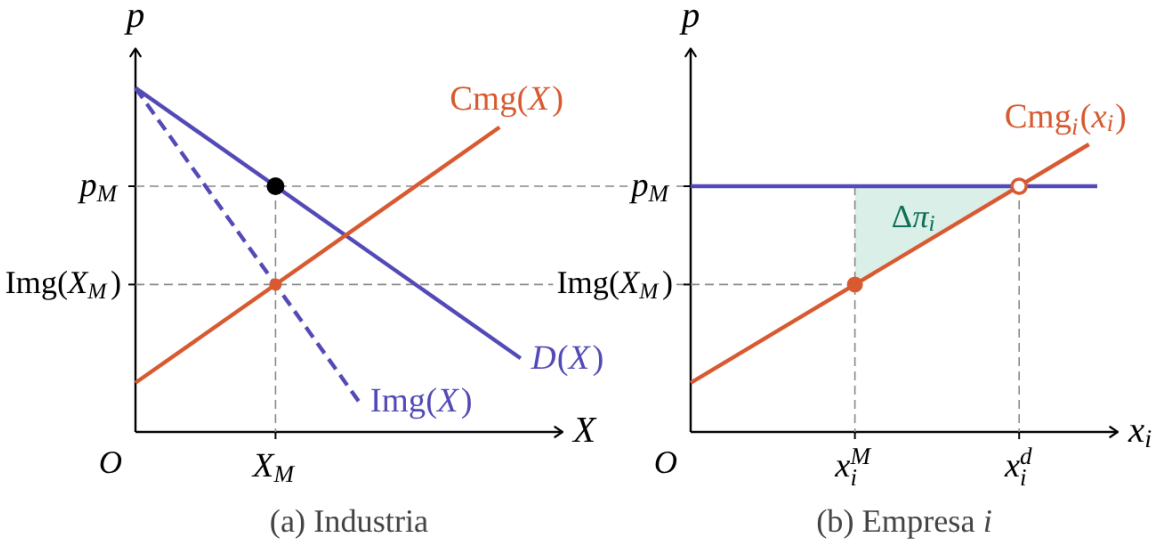


Figura A19.6: Cártel como monopolista multiplanta. (a) La industria produce X_M, donde el ingreso marginal $\text{Img}(X)$ corta al coste marginal agregado $\text{Cmg}(X)$ (suma horizontal de los Cmg_i), y vende a p_M. (b) Cada empresa produce su cuota x_i^M, donde $\text{Cmg}_i(x_i) = \text{Img}(X_M)$, pero, tomando p_M como dado, le conviene ampliar su producción hasta x_i^d, donde $\text{Cmg}_i(x_i) = p_M$, y obtener el beneficio adicional sombreado, $\Delta\pi_i$.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el modelo del cártel fija el beneficio máximo que la industria puede alcanzar y, con él, la referencia frente a la que se mide toda colusión. También permite introducir las intuiciones centrales sobre los acuerdos colusivos: la asignación eficiente de la producción entre

plantas, el incentivo individual a desviarse que los desestabiliza y la razón de ser de las leyes *antitrust*.

▪ *Limitaciones*: en un marco estático el cártel no es sostenible, porque el incumplimiento es una estrategia dominante. Para explicar por qué existen cárteles duraderos, hay que estudiar el oligopolio en un contexto dinámico.

2.1.2. Juegos repetidos en horizonte finito

Idea: se aplica aquí a la colusión la inducción hacia atrás en juegos repetidos con horizonte finito (dilema del prisionero repetido, tema A14, apartado 2.3.2). La cuestión es si la repetición del juego un número finito y conocido de veces permite sostener la cooperación, pues las empresas podrían castigar en el futuro a quien incumpla hoy.

Supuestos:

▪ *Entorno*: la información es completa y hay conocimiento común, el juego no varía de un periodo a otro y el horizonte es finito, con un último periodo, T, conocido por todos.

▪ *Agentes*: en cada periodo las empresas compiten simultáneamente, por ejemplo en precios a la Bertrand, lo que permitirá examinar si la repetición resuelve la paradoja[15].

Razonamiento: el juego se resuelve por inducción hacia atrás:

1. *Periodo T*: como ya no hay futuro, lo ocurrido antes no importa y el juego se reduce a una sola jugada. No cooperar es la estrategia dominante, porque el castigo tendría que llegar en $T+1$, que no existe, y cualquier amenaza carece de credibilidad. Todo ENPS ha de prescribir, por tanto, un EN en la última etapa, es decir, un equilibrio sin cooperación.

2. *Periodo $T-1$ y anteriores*: las dos empresas anticipan que en T nadie cooperará, de modo que el mismo argumento vale para $T-1$ y, retrocediendo, para cada periodo anterior hasta el primero.

Equilibrio: el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de un juego no cooperativo repetido un número finito de veces consiste en T repeticiones del equilibrio de Nash estático, siempre que este sea único, como en Bertrand o en el dilema del prisionero. Con varios equilibrios en el juego de etapa, en cambio, puede sostenerse cierta cooperación en los primeros periodos (tema A14, apartado 2.3.2).

Con equilibrio único, el resultado es el del dilema del prisionero repetido en horizonte finito, en el que la certeza del final deshace la cooperación desde el principio, con la misma lógica que la paradoja de la cadena de tiendas (tema A14, apartado 2.3.4).

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el modelo muestra que la repetición no basta por sí sola para sostener la colusión y precisa qué hace falta para que la sostenga, un horizonte sin final conocido o varios equilibrios en el juego de etapa.

[15] Con competencia a la Cournot el resultado en horizonte finito es el mismo, porque el equilibrio de etapa también es único. La diferencia aparece en horizonte infinito (apartado 2.2), porque, como el castigo de Cournot deja beneficios positivos, sostener la colusión exige un factor de descuento mayor que en Bertrand, y ese umbral depende del precio colusorio que se quiera sostener.

▪ *Limitaciones*: el resultado depende de que el último periodo se conozca con certeza y de que la racionalidad sea de conocimiento común. De hecho, basta una pequeña probabilidad de que el rival sea de un tipo cooperativo para que la cooperación se sostenga durante buena parte de un juego finito (Kreps, Milgrom, Roberts y Wilson, 1982). La incertidumbre sobre la duración del juego conduce, por su parte, al juego repetido en horizonte infinito.

2.2. Alianzas sostenibles: juegos repetidos en horizonte infinito (Friedman, 1971)

Si el horizonte del juego es indefinido, la amenaza de castigos futuros puede sostener la cooperación como equilibrio, siempre que las empresas valoren lo suficiente el futuro.

Origen: James Friedman (1971) realizó un análisis pionero en juegos dinámicos con horizonte infinito que permite ilustrar las ganancias de la cooperación.

Idea: si los agentes prevén un número indeterminado de repeticiones del juego[16], lo que ganan a largo plazo cumpliendo sus compromisos puede compensarles más que la ganancia inmediata de incumplirlos.

Supuestos:

▪ *Entorno*: las estrategias dependen de la historia pasada y una sola desviación provoca la ruptura permanente de la cooperación (*grim trigger*).

▪ *Agentes*: dos jugadores racionales juegan con información completa y horizonte infinito. Entre ellos existe un acuerdo tácito o implícito creíble, sostenido por una *estrategia del gatillo* (*trigger strategy*).

Planteamiento: la estrategia de cada empresa se define sobre la historia del juego, y la cooperación se sostiene si a ninguna le compensa desviarse. El planteamiento consta de tres elementos:

▪ *Historia del juego*: la historia hasta el periodo t es la sucesión de acciones de ambas empresas, $h^{t-1} = \{(s_1^\tau, s_2^\tau)\}_{\tau=1}^{t-1}$, con $s_i^\tau \in \{c, nc\}$ (cooperar o no cooperar). La estrategia de cada empresa en cada periodo es una función de esa historia, $s_i^t(h^{t-1})$. En consecuencia, lo que cada empresa hace hoy depende de lo que el rival ha hecho antes.

▪ *Estrategia del gatillo*: a corto plazo, la estrategia dominante sigue siendo no cooperar, y se trata de comprobar si a largo plazo existe algún ENPS cooperativo. La estrategia del gatillo establece que $s_i^t(h^{t-1}) = c \Leftrightarrow (s_1^\tau, s_2^\tau) = (c, c) \ \ \forall \tau < t$, es decir, cada empresa coopera mientras ambas hayan cooperado en todos los periodos anteriores.

▪ *Condición de cooperación*: los jugadores cooperarán si el beneficio descontado de cooperar es al menos igual al de desviarse y sufrir después el castigo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi_{c,c} \geq \pi_{nc,c} + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \pi_{nc,nc}, \qquad \beta \in (0,1)$$

donde $\beta \in (0,1)$ es el factor de descuento y $\pi_{c,c}$, $\pi_{nc,c}$ y $\pi_{nc,nc}$ son los beneficios por periodo cuando ambas cooperan, cuando la empresa se desvía mientras la otra coopera y cuando ninguna coopera.

[16] Interpretación literal: se repite infinitos periodos, con factor de descuento $\beta = 1/(1+\rho) \in (0,1)$. Interpretación informacional: no se conoce la duración. En cada etapa existe una probabilidad constante, entre cero y uno, de que continúe.

Aplicando la serie geométrica ($\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = 1/(1-\beta)$, $\forall \beta \in (0,1)$):

$$\frac{\pi_{c,c}}{1-\beta} \geq \pi_{nc,c} + \frac{\beta}{1-\beta}\pi_{nc,nc}$$

Operando, con $\pi_{nc,c} > \pi_{c,c} > \pi_{nc,nc}$:

$$\beta \geq \frac{\pi_{nc,c} - \pi_{c,c}}{\pi_{nc,c} - \pi_{nc,nc}}$$

En el caso de un duopolio de Bertrand, en el que quien se desvía captura todo el beneficio de monopolio, $\pi_{nc,c} = \pi_M = 2\pi_{c,c}$, y el castigo lo anula, $\pi_{nc,nc} = 0$, se obtiene $\beta \geq 1/2$.

Equilibrio: la cooperación, Pareto-eficiente para las empresas, solo es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos si se cumple la condición anterior, ya que, si la tasa de descuento es elevada, el factor de descuento será reducido y el beneficio descontado de cooperar insuficiente. La sostenibilidad requiere estrategias del gatillo creíbles, mecanismos de supervisión adecuados, percepción de juego a largo plazo y que los agentes valoren el futuro (tasa de descuento no muy elevada).

Estática comparativa: con n empresas que compiten en precios y se reparten a partes iguales el beneficio de monopolio, $\pi_{c,c} = \pi_M/n$, la que se desvía captura todo el mercado, $\pi_{nc,c} = \pi_M$, y el castigo anula el beneficio. La condición de cooperación se convierte entonces en $\beta \geq 1 - 1/n$. La colusión es más difícil de sostener cuantas más empresas hay, porque la ganancia de desviarse crece con n mientras que la parte de cada una en el beneficio colusivo disminuye. Un factor de descuento menor, por empresas más impacientes o una interacción menos frecuente, la dificulta del mismo modo.

Extensiones: este resultado entronca con la aportación de Stigler (1964), para quien el afán por mayores beneficios que motiva la colusión es el mismo que impulsa a desviarse del acuerdo. Por eso la colusión requiere detectar las desviaciones, y la detección es tanto más difícil cuantas más empresas haya, más heterogéneas sean y menos transparentes sean las transacciones.

Además, el modelo constituye una aplicación del *teorema popular* (*folk theorem*). Según este teorema, si el factor de descuento es suficientemente próximo a la unidad, las sanciones *minimax*[17] pueden sostener cualquier asignación colusiva factible e individualmente racional como EN de un juego infinitamente repetido (tema A14, apartado 2.3.3).

Dos extensiones explican las guerras de precios observadas sin abandonar el marco:

- *Información imperfecta* (Green y Porter, 1984): si las empresas no observan las cantidades rivales sino solo el precio, que también depende de perturbaciones de demanda, un precio bajo puede deberse a una desviación o a un *shock*. La estrategia óptima castiga durante un periodo finito cada vez que el precio cae por debajo de un umbral. De este modo, las guerras de precios ocurren en equilibrio, sin que nadie se desvíe, en las fases de demanda baja.

- *Ciclos de demanda* (Rotemberg y Saloner, 1986): con demanda observable pero fluctuante, la tentación de desviarse es mayor en los auges (la ganancia inmediata es grande y el castigo futuro, medio), por lo que el precio colusivo sostenible debe bajar en las expansiones. Las guerras de precios son, así, procíclicas.

Conclusiones:

[17] Un castigo minimax deja a la empresa castigada con el menor beneficio que la otra puede imponerle cuando aquella elige su mejor defensa (Gravelle y Rees, 2004).

▪ *Aspectos positivos*: el modelo muestra que la colusión descansa en cómo se castiga a quien se desvía. Ha dado lugar, además, a una amplia literatura sobre los factores que la hacen más o menos sostenible: las características del mercado (número de empresas, transparencia, estabilidad de la demanda), la severidad y rapidez del castigo y el papel de las autoridades de competencia. Los programas de clemencia de estas explotan precisamente la fragilidad del acuerdo.

▪ *Limitaciones*: el modelo admite tres matices:

- *Horizonte*: la colusión es también posible en un horizonte finito de duración incierta, modelizable con una probabilidad de continuación en cada periodo, de modo que el supuesto de horizonte infinito no es esencial.

- *Acuerdo y cumplimiento*: el modelo no especifica cómo se ponen de acuerdo las empresas ni cómo hacen cumplir el castigo.

- *Severidad del castigo*: la reversión permanente al equilibrio estático no es, en general, el castigo creíble más severo (p. ej. con Cournot). Por ello, Abreu (1986) propone un enfoque de "zanahoria y palo", con una fase de castigo breve y más dura en lugar de un castigo permanente.

2.3. Conclusiones

La colusión solo se sostiene si los incentivos de cada empresa la hacen estable. El cártel alcanza el beneficio máximo de la industria, pero en una sola jugada no es un equilibrio, porque a cada empresa le conviene producir más de su cuota. La repetición tampoco basta si el final es conocido, ya que la inducción hacia atrás deshace la cooperación desde el último periodo. Con horizonte indefinido, en cambio, las estrategias del gatillo la sostienen como ENPS si el factor de descuento es suficiente, umbral que crece con el número de empresas, y las guerras de precios pueden formar parte del propio equilibrio.

Los modelos dinámicos explican así por qué existen cárteles duraderos que el análisis estático declara imposibles, y con ello las formas explícitas y tácitas de colusión y los acuerdos de cooperación en general, dentro y fuera de la economía industrial. Todos estos resultados toman como dado el número de empresas, que el apartado 3 hace endógeno para estudiar si los beneficios de la colusión resisten la entrada.

3. Oligopolio con número variable de empresas: entrada y disuasión

Cuando el número de empresas pasa a ser endógeno, la pregunta es por qué los beneficios extraordinarios del oligopolio no atraen entrada hasta agotarlos. La respuesta se busca en las barreras a la entrada, en lo que pueden hacer las empresas instaladas para impedirla y en las condiciones en que la mera amenaza de entrada basta para disciplinar el mercado.

3.1. Barreras a la entrada

Las **barreras a la entrada** son uno de los factores que más claramente determinan el número de empresas de un mercado, y de ellas depende que los beneficios extraordinarios del oligopolio persistan.

> El debate definicional y la taxonomía de las barreras se desarrollan en el tema A15, apartado 2.2.1, y su medición empírica (escala mínima eficiente relativa, intensidad de costes hundidos, tasas de entrada y salida), en el tema A20, apartado 3.2.2. Las barreras que sostienen el monopolio se estudian en el tema A17, apartado 1.1.

3.1.1. Definición

En cuanto a su definición, existen diferentes perspectivas:

- *Condiciones*: para Bain (1956), las que permiten a las instaladas mantener precios supracompetitivos sin inducir la entrada (economías de escala, ventajas absolutas de costes, diferenciación).

- *Asimetría de costes*: para Stigler (1968), un coste que el entrante debe soportar y las instaladas no soportaron.

- *Costes hundidos*: para Baumol y Willig (1981), la barrera la crean los costes hundidos, no los costes fijos.

3.1.2. Causas

Las barreras se clasifican según su origen, con la terminología del tema A15, apartado 2.2.1. Son **naturales o estructurales** cuando derivan de la tecnología y la demanda, y **artificiales** cuando las crean las instaladas (estratégicas) o el Estado (legales):

1. *Barreras naturales o estructurales*: la escala mínima eficiente es grande en relación con el tamaño del mercado. En el caso polar, se produce un monopolio natural en el que una sola empresa produce toda la demanda a menor coste que varias (subaditividad de costes).

2. *Barreras estratégicas*: la empresa o empresas con poder de mercado buscan impedir la entrada de competidores potenciales (precio límite, publicidad agresiva, inversión estratégica en capacidad), conductas que se estudian a continuación.

3. *Barreras legales*: privilegios que el Estado concede a la empresa con poder de mercado (patentes, licencias, concesiones, derechos exclusivos).

3.2. Disuasión estratégica de la entrada

Las empresas instaladas pueden impedir la entrada, o expulsar a un rival ya presente, mediante el precio límite, la inversión en capacidad o la predación. Además, la propia competencia en calidad, publicidad o I+D puede consolidar la concentración.

3.2.1. Precio límite (Bain, 1956; Sylos-Labini, 1957; Modigliani, 1958)

Origen: el modelo de *precio límite* se debe a Joe Bain (*Barriers to New Competition*, 1956) y Paolo Sylos-Labini (1957), y fue formalizado por Franco Modigliani (1958) y reformulado como un juego de señalización por Milgrom y Roberts (1982a).

Idea: las empresas instaladas pueden sostener un precio suficientemente bajo para que un entrante potencial, anticipando el precio que regiría tras su entrada, no cubra sus costes medios y desista de entrar.

Supuestos:

- *Entorno*: demanda de mercado $p(X)$ decreciente.

- *Agentes*: una empresa (o grupo) instalada que produce x_I y un entrante potencial que decide entrar o no.

- *Tecnología*: el entrante potencial produce con economías de escala, con un coste medio $\text{Cme}_E(x_E)$ decreciente hasta la escala mínima eficiente x_{EME}.

- *Postulado de Sylos*: el entrante espera que la instalada mantenga su producción x_I tras la entrada, de modo que el precio posterior sería $p(x_I + x_E)$ para cualquier cantidad x_E que él aporte. La demanda que afronta el entrante es, por tanto, la *demanda residual* $p(x_I + x_E)$.

Planteamiento: la instalada elige la menor producción x_I^L (el mayor precio p_L) tal que la demanda residual del entrante (término de la izquierda de la desigualdad) quede en todo punto por debajo de su coste medio (término de la derecha de la desigualdad):

$$p_L = p(x_I^L): \quad p(x_I^L + x_E) \leq \text{Cme}_E(x_E) \;\; \forall\, x_E > 0$$

Equilibrio: en la formulación de Modigliani (1958), en la que el entrante solo puede entrar a la escala mínima eficiente o por encima de ella (indivisibilidad técnica), la condición se cumple con igualdad en esa escala, $p(x_I^L + x_{\text{EME}}) = \text{Cme}_E(x_{\text{EME}})$. La producción x_I^L es la que deja al entrante, si produjera a escala eficiente, exactamente sin beneficio. Con un coste medio de trazado suave, en cambio, la igualdad se alcanza en el punto de tangencia descrito en el desarrollo gráfico, a la izquierda de x_{EME}.

Conocida x_I^L, se obtiene el precio límite, p_L, que, si la entrada no está bloqueada, es superior al competitivo pero inferior al de monopolio ($p_C < p_L < p_M$). La empresa instalada sacrifica así beneficio presente a cambio de conservar el mercado.

Desarrollo gráfico: el precio límite se representa en el plano cantidad-precio (figura A19.7):

1. *Demanda de mercado*, $D(X)$: la instalada se sitúa sobre ella en el punto L, con la producción x_I^L y el precio p_L.

2. *Demanda residual del entrante*, $D_R(x_E)$: es la demanda de mercado desplazada a la izquierda en la cantidad x_I^L, porque el entrante espera que la instalada la mantenga (postulado de Sylos).

3. *Coste medio del entrante*, $\text{Cme}_E(x_E)$: decrece hasta la escala mínima eficiente, x_{EME}, donde su mínimo marca el precio competitivo, p_C.

4. *Equilibrio*: el precio límite, p_L, es aquel para el que la demanda residual resulta tangente por debajo a la curva de coste medio del entrante (punto 0). En cambio, todo precio superior, como p_1, deja un tramo de la demanda residual, $D'_R(x_E)$, por encima del coste medio y hace rentable la entrada.

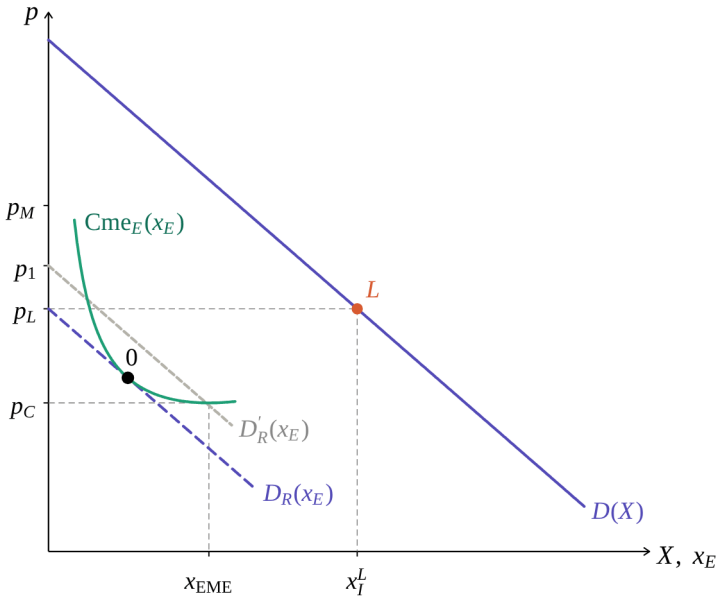


Figura A19.7: Precio límite (Bain-Sylos-Modigliani). La instalada produce x_I^L, para que la demanda residual del entrante, $D_R(x_E)$, sea tangente por debajo a su coste medio, $\text{Cme}_E(x_E)$, en el punto 0. El precio límite, p_L, cumple $p_C < p_L < p_M$. A cualquier precio superior, como p_1, la demanda residual $D'_R(x_E)$ deja un tramo por encima del coste medio y la entrada resultaría rentable.

Estática comparativa: el precio límite es tanto mayor, y la barrera tanto más eficaz, cuanto mayor es la escala mínima eficiente x_{EME} en relación con el tamaño del mercado, porque la entrada a esa escala deprimiría más el precio. Modigliani (1958) aproxima el margen del precio límite sobre el competitivo por $(p_L - p_C)/p_C \approx x_{\text{EME}}/(X_C\,|\varepsilon|)$, donde X_C es la producción competitiva y $|\varepsilon|$ la elasticidad de la demanda en ese punto. El margen crece con la escala mínima eficiente relativa y decrece con la elasticidad de la demanda.

Extensiones: la teoría de juegos ha revisado el modelo en dos direcciones:

- *Credibilidad*: el postulado de Sylos no es creíble. Por inducción hacia atrás, una vez producida la entrada, a la instalada le conviene acomodarla (reducir su producción hasta el equilibrio de Cournot) en lugar de mantener x_I^L. Por ello, el entrante racional no debería creer la amenaza. Spence (1977) y Dixit (1980) resuelven el problema con una inversión irreversible en capacidad.

- *Señalización* (Milgrom y Roberts, 1982a): si el entrante desconoce los costes de la instalada, un precio bajo antes de la entrada puede ser una *señal* de costes bajos, y por tanto de entrada poco rentable. La instalada de costes altos no puede imitar esa señal sin pérdidas. El precio límite opera así no por lo que compromete, sino por lo que revela. Sin embargo, en equilibrio

no reduce necesariamente la entrada, cuya probabilidad puede ser menor, igual o incluso mayor que con información completa (tema A14, apartado 2.2.4).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: es la primera explicación de por qué los precios de los oligopolios se sitúan de forma persistente entre el nivel competitivo y el de monopolio, y vincula ese margen a un parámetro observable, la escala mínima eficiente.

- *Limitaciones*: en su versión original la amenaza no es creíble, y en la de señalización solo opera con información asimétrica sobre costes o demanda. Además, el modelo es estático y no explica cuánto tiempo puede sostenerse el precio límite.

3.2.2. Compromiso en capacidad (Spence, 1977; Dixit, 1980)

> No confundir con el modelo de Dixit y Stiglitz (1977), de competencia monopolística, ni con su antecedente Spence (1976), ambos en el tema A18, apartado 2.2. Spence (1977) y Dixit (1980) son modelos de disuasión de la entrada. Se recomienda presentar este modelo con el diagrama de árbol del juego de entrada (figura A19.9), al ser más ilustrativo e intuitivo.

Origen: Michael Spence (1977) y Avinash Dixit (1980) reconstruyeron el precio límite como un juego en dos etapas en el que la credibilidad la aporta una inversión irreversible.

Idea: la credibilidad que le falta al precio límite la proporciona la capacidad instalada. Si la instalada hunde antes de la entrada el coste de una capacidad elevada, producir mucho tras la entrada pasa a ser su mejor respuesta y no una amenaza vacía. El entrante lo anticipa y, según el coste de entrar, la entrada resulta bloqueada, disuadida o acomodada.

Supuestos:

- *Entorno*: el juego tiene dos etapas. En la primera, la instalada (I) elige una capacidad k con coste r por unidad, irreversible. En la segunda, el entrante (E) decide si entra, pagando un coste fijo F, y ambas compiten a la Cournot. La demanda es lineal, $p = a - X$, y el coste variable unitario, c, es el mismo para ambas.

- *Agentes*: la instalada produce hasta k con coste marginal c (la capacidad ya está pagada) y por encima de k con coste marginal $c + r$. El entrante, en cambio, debe adquirir capacidad y producción a la vez, con coste marginal $c + r$.

Planteamiento: se resuelve por inducción hacia atrás. En la segunda etapa, dado k y supuesta la entrada, cada empresa maximiza su beneficio dada la cantidad de la otra:

$$\max_{x_E} \pi_E = (a - x_I - x_E - c - r)\, x_E - F$$

$$\max_{x_I} \pi_I = (a - x_I - x_E - c)\, x_I - r \cdot \max\{x_I - k, 0\}$$

donde el último término recoge que solo la producción por encima de la capacidad instalada soporta el coste r (el coste rk de la primera etapa ya está hundido).

CPO: la función de reacción del entrante es $x_E = \varphi_E(x_I) = (a - c - r - x_I)/2$. La de la instalada, en cambio, tiene un *quiebro* en k, con $x_I = (a - c - x_E)/2$ si esta cantidad es inferior a k (coste

marginal c), y $x_I = (a-c-r-x_E)/2$ si es superior (coste marginal $c+r$). Entre ambos tramos, $x_I = k$.

CSO: ambos beneficios son cuadráticos y cóncavos en la propia cantidad (segunda derivada $-2 < 0$), por lo que las reacciones anteriores son máximos. La concavidad se mantiene en el quiebro porque el coste marginal salta hacia arriba.

Equilibrio: el beneficio del entrante en el equilibrio de la segunda etapa es decreciente en k y, cuando la instalada utiliza toda su capacidad, vale $\pi_E(k) = [(a-c-r-k)/2]^2 - F$. Sea k_D la capacidad que anula ese beneficio, $k_D = a-c-r-2\sqrt{F}$, y k_M la que elegiría un monopolista sin amenaza de entrada. En la primera etapa la instalada compara tres regímenes:

- *Entrada bloqueada* ($k_D \leq k_M$): el coste de entrada es tan alto que ni siquiera la producción de monopolio deja beneficio al entrante, de modo que la instalada se comporta como monopolista sin hacer nada.

- *Entrada disuadida* ($k_D > k_M$ y disuadir es rentable): la instalada instala k_D, por encima de su producción de monopolio, y la utiliza íntegramente, con lo que sacrifica beneficio presente para excluir al rival.

- *Entrada acomodada* (disuadir es demasiado caro, F pequeño): la instalada instala la capacidad del líder de Stackelberg y comparte el mercado. En ese caso, la ventaja de la instalada se reduce a la de mover primero.

Al elegir k, y con él el quiebro de su función de reacción (CPO), la instalada elige en qué punto de la función de reacción del entrante se sitúa el equilibrio de la segunda etapa. En el plano (x_I, x_E) (figura A19.8), ese equilibrio es el corte del tramo vertical de la función de reacción de la instalada, $\varphi_I(x_E)$, con $\varphi_E(x_I)$. Al aumentar k, el corte recorre $\varphi_E(x_I)$ desde T, el equilibrio de Cournot si la instalada produce con coste marginal $c+r$, hasta V, el equilibrio de Cournot con coste marginal c. Si el coste de la capacidad, r, es suficientemente alto, sobre ese tramo se sitúan el punto de Stackelberg, S, con $k = k_M$, y la capacidad k_D, a partir de la cual el entrante no cubre F.

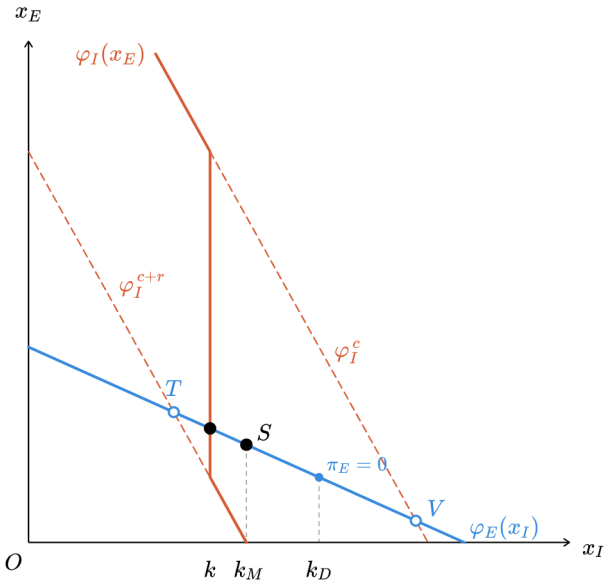


Figura A19.8: Compromiso en capacidad en el plano de cantidades. De abajo arriba, la función de reacción de la instalada, $\varphi_I(x_E)$, sigue la reacción con coste marginal $c + r$, φ_I^{c+r}, es vertical en su capacidad k y sigue después la reacción con coste marginal c, φ_I^c. El corte de esa función con la del entrante, $\varphi_E(x_I)$, es el equilibrio de la segunda etapa. Al aumentar k, ese corte recorre $\varphi_E(x_I)$ entre T y V, pasa por el punto de Stackelberg S en k_M y deja al entrante sin beneficio en k_D.

Desarrollo gráfico: en la forma extensiva del juego de entrada (figura A19.9), el modelo se resume en tres decisiones sucesivas, con los pagos de cada hoja, (π_I, π_E), en el orden (instalada, entrante):

1. *Capacidad*: en el nodo inicial, la instalada elige una capacidad alta, k_D, que la compromete, o una capacidad baja, que no la compromete.

2. *Entrada*: el entrante observa la capacidad instalada y decide si entra, pagando F, o no entra.

3. *Respuesta*: tras la entrada, la instalada acomoda (reduce su producción y comparte el mercado) o lucha (produce a plena capacidad). Con capacidad baja, acomodar es su mejor respuesta, porque ampliar la producción le costaría $c + r$ por unidad. Con capacidad alta, en cambio, el coste de la capacidad ya está hundido, por lo que luchar pasa a ser su mejor respuesta y deja al entrante sin cubrir F.

4. *Equilibrio*: por inducción hacia atrás, el entrante entra si la capacidad es baja y no entra si es alta. La instalada compara, por tanto, el beneficio de monopolio con capacidad k_D con el de acomodar la entrada, y la senda resaltada del ENPS (capacidad alta y no entrada) corresponde al régimen de entrada disuadida. Si F fuera pequeño, el coste de la capacidad alta superaría la ganancia de excluir al rival, y la senda pasaría por la capacidad baja y la entrada acomodada.

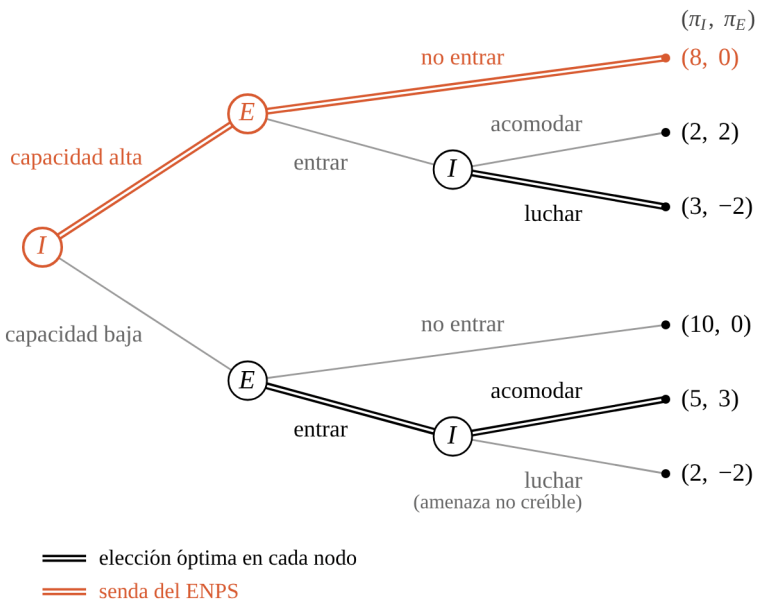


Figura A19.9: Juego de entrada con compromiso de capacidad, con pagos ilustrativos (π_I, π_E). Con capacidad baja, luchar es una amenaza no creíble, la instalada acomoda y el entrante entra. Con capacidad alta, ya pagada, luchar es la mejor respuesta y el entrante no entra, de modo que la instalada elige capacidad alta y disuade la entrada aunque renuncia a parte del beneficio de monopolio (8 frente a 10).

Estática comparativa: con $A \equiv a - c - r$, se tiene $k_M = A/2$ y $k_D = A - 2\sqrt{F}$. En la versión simplificada del modelo, que ignora las restricciones de credibilidad sobre la capacidad, la entrada queda bloqueada si $A \leq 4\sqrt{F}$, se disuade si $4\sqrt{F} < A \leq (8 + 4\sqrt{2})\sqrt{F} \approx 13{,}7\sqrt{F}$ y se acomoda si A es mayor. Cuanto menor es F, mayor es k_D y más caro disuadir, hasta que la acomodación resulta preferible. Un aumento de r (coste de la capacidad) reduce A, porque también el entrante ha de pagar la capacidad, y acerca el mercado a la disuasión o al bloqueo. Un aumento del tamaño del mercado (a) lleva, en cambio, del bloqueo a la disuasión y, finalmente, a la acomodación.

Extensiones: Dixit muestra que en equilibrio la instalada nunca mantiene capacidad ociosa, es decir, la disuasión se logra con capacidad utilizada, no con exceso de capacidad, lo que corrige la intuición de Spence. Bulow, Geanakoplos y Klemperer (1985) generalizan el resultado para el caso en que la entrada se acomoda. Si la inversión hace más agresiva a la instalada, a esta le conviene sobreinvertir, para parecer agresiva, cuando las variables estratégicas son sustitutivas (cantidades), e infrainvertir, para parecer acomodaticia, cuando son complementarias (precios). Fudenberg y Tirole (1984) sistematizan las cuatro estrategias resultantes.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: resuelve el problema de credibilidad del precio límite con el instrumento correcto, los costes hundidos, y muestra que la estructura del mercado (número de empresas) es el resultado de decisiones de inversión estratégicas y no un dato.

- *Limitaciones*: exige que la capacidad sea observable e irreversible y que la competencia posterior sea en cantidades, ya que con competencia en precios el resultado puede invertirse. Además, con varias instaladas la disuasión es un bien público entre ellas y aparece un problema de *free rider*.

3.2.3. Predación (Kreps y Wilson, 1982; Milgrom y Roberts, 1982b)

Origen: la predación en precios es el comportamiento excluyente clásico del derecho de la competencia. Su tratamiento formal moderno se debe a los modelos de reputación (Kreps y Wilson, 1982; Milgrom y Roberts, 1982b) y de predación financiera.

Idea: más allá de disuadir la entrada, la instalada puede expulsar a un rival ya presente mediante acciones agresivas y costosas cuyo rendimiento es el poder de mercado futuro.

Razonamiento: la *predación en precios* consiste en fijar temporalmente precios por debajo del coste para expulsar al rival y recuperar las pérdidas después. En general, el modelo supone que el depredador de precios tiene mayor capacidad financiera que la víctima (*deep pockets*).

- *Información completa*: la predación de precios no resulta creíble (el rival sabe que la guerra cesará).

- *Información incompleta*: la predación es racional como *reputación* de agresividad que disuade entradas futuras en otros mercados o periodos, o como *predación financiera*, que explota la dependencia del rival de la financiación externa para forzar su salida.

Extensiones: la distinción entre competencia agresiva y predación es una de las más difíciles de la política de competencia. Los criterios que consideran predatorios los precios por debajo del coste variable medio siguen siendo la referencia de la jurisprudencia, aunque la teoría de juegos ha mostrado que la predación puede ser racional con precios por encima de ese umbral (tema A15).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica por qué la predación puede ser una estrategia racional con información incompleta, frente al resultado de información completa, y da así un fundamento teórico a su persecución como abuso de posición dominante.

- *Limitaciones*: sus resultados dependen de supuestos sobre la información y la financiación de las empresas difíciles de verificar, de modo que no proporcionan un criterio operativo para separar en cada caso la predación de la competencia agresiva.

3.2.4. Costes hundidos endógenos y oligopolio natural (Shaked y Sutton, 1983; Sutton, 1991)

Origen: lo desarrollaron Avner Shaked y John Sutton (*Natural Oligopolies*, 1983) y John Sutton (*Sunk Costs and Market Structure*, 1991).

Idea: la concentración de un mercado puede no disolverse con la entrada aunque no haya barreras en sentido estricto, si la competencia se libra en atributos (calidad, publicidad, I+D) que se compran con costes hundidos.

Razonamiento: en un mercado con diferenciación vertical, si el coste de la calidad recae sobre todo en costes fijos y no en costes variables, la empresa de mayor calidad puede fijar un precio que deja sin demanda a las de calidad inferior. En consecuencia, solo un número finito de empresas sobrevive con beneficio positivo, cualquiera que sea el tamaño del mercado (*propiedad de finitud*).

Sutton generaliza el resultado distinguiendo dos tipos de costes hundidos:

- *Exógenos* (una planta): el crecimiento del mercado reduce la concentración de forma continua.

- *Endógenos* (publicidad, I+D): la concentración tiene una cota inferior que no tiende a cero, porque la escalada de gasto que acompaña al crecimiento del mercado expulsa a quien no la sigue, y la entrada consolida así el oligopolio en lugar de erosionarlo.

> El modelo de diferenciación vertical de Shaked y Sutton se desarrolla en el tema A18, apartado 3.1, y la noción de coste hundido como barrera, en el tema A15, apartado 2.2.1.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la teoría explica los "oligopolios naturales" de las industrias intensivas en publicidad o I+D y ofrece una predicción contrastable, la cota inferior de la concentración, que ha resistido bien la evidencia.

- *Limitaciones*: dice poco sobre la concentración efectiva por encima de esa cota.

3.3. Mercados impugnables

La teoría de los **mercados impugnables** (Baumol, Panzar y Willig, 1982) invierte el argumento de los apartados anteriores. Si no existen costes hundidos ni barreras de salida, y el entrante puede actuar antes de que la instalada reaccione, la mera amenaza de entrada relámpago (*hit-and-run*) obliga a las instaladas a fijar precios iguales al coste medio, con independencia de su número.

De ahí que, para la teoría del oligopolio, el número de empresas no sea, por sí solo, un indicador del poder de mercado. Lo que importa es la existencia de costes hundidos, que son al mismo tiempo el fundamento de la disuasión estratégica (3.2.2) y de los oligopolios naturales (3.2.4). Los supuestos de los mercados impugnables son extremos, pero la teoría ha influido en la desregulación de industrias con costes hundidos reducidos.

> La teoría se desarrolla, con sus tres condiciones y su crítica, en el tema A15, apartado 2.2.2, y sus implicaciones regulatorias, en el tema A20, apartado 2.3.3.

3.4. Conclusiones

El análisis de la entrada completa la teoría del oligopolio, pues explica por qué los beneficios extraordinarios pueden persistir a largo plazo. Además, hace endógeno el número de empresas, que pasa de ser un dato a ser el resultado de decisiones de inversión estratégicas y de la naturaleza de los costes hundidos.

La distinción entre barreras naturales y estratégicas es, sin embargo, más nítida en la teoría que en la práctica, pues las economías de escala pueden ser a la vez una condición tecnológica y el resultado de una inversión deliberada. Además, los modelos de disuasión dependen de forma crítica de la variable estratégica (cantidades o precios) y de la información disponible, de modo que sus predicciones no son robustas a cambios en esos supuestos.

Conclusiones

El oligopolio es la estructura de mercado en la que la interdependencia estratégica determina tanto la competencia como la cooperación. En los modelos no cooperativos, la variable estratégica y el orden de las decisiones fijan el grado de competencia. Así, con cantidades, el equilibrio de Cournot se sitúa entre el monopolio y la competencia perfecta y el liderazgo de Stackelberg lo acerca a esta última, mientras que con precios, producto homogéneo y sin restricciones de capacidad bastan dos empresas para alcanzar el resultado competitivo. La colusión no es un equilibrio en un juego de una sola jugada ni en uno repetido con final conocido, pero puede sostenerse como ENPS si el horizonte es indefinido y las empresas valoran lo suficiente el futuro. Por último, los costes hundidos explican que los beneficios persistan, porque las instaladas usan esos costes como compromiso creíble frente a la entrada y la competencia en calidad o publicidad los eleva hasta consolidar la concentración.

El oligopolio aplica los conceptos de equilibrio de la teoría de juegos (tema A14) y completa la teoría de mercados entre el monopolio, con un solo vendedor (tema A17), y la competencia monopolística, con muchos vendedores de productos diferenciados (tema A18). El índice de Lerner y las variaciones conjeturales, que resumen la conducta en un parámetro, fundamentan la medición del poder de mercado en la organización industrial empírica (tema A15) y en la regulación (tema A20). Por su parte, la inestabilidad de los cárteles, en los que cada miembro tiene incentivos a desviarse, inspira el programa de clemencia de la política de competencia de la Unión, que premia al primero que confiesa (tema B39).

Ante el aumento de los márgenes empresariales, se discute si la concentración refleja eficiencia o poder de mercado. De Loecker, Eeckhout y Unger (2020) estiman que el margen medio de las empresas cotizadas estadounidenses sobre el coste marginal pasó del 21 % en 1980 al 61 % en 2016. Azar, Schmalz y Tecu (2018) asocian también precios más altos en el transporte aéreo estadounidense a la propiedad común, es decir, a que los mismos inversores institucionales participen en aerolíneas rivales. Por último, Calvano, Calzolari, Denicolò y Pastorello (2020) muestran que algoritmos de precios basados en el aprendizaje por refuerzo aprenden a sostener precios supracompetitivos sin comunicarse, lo que plantea cómo tratar una colusión tácita que nadie ha acordado.

Anexo. Modelos clásicos de oligopolio anteriores a la teoría de juegos

Antes de la teoría de juegos, la coordinación tácita entre oligopolistas se explicaba con los dos modelos siguientes, a los que remite el apartado 2.

A.1. Demanda quebrada (Sweezy, 1939)

Origen: lo propusieron Paul Sweezy (1939) y, de forma independiente, Hall y Hitch (1939), estos últimos a partir de entrevistas a empresarios realizadas por el Oxford Economists' Research Group.

Idea: en un oligopolio las empresas esperan que sus rivales sigan sus bajadas de precio pero no sus subidas. Por ello, la demanda que cada una percibe es más elástica por encima del precio vigente que por debajo, y la curva de demanda presenta un *quiebro* en el precio actual.

Razonamiento: si la empresa sube el precio y las rivales no la siguen, pierde una parte sustancial de su clientela (tramo elástico). Si lo baja, las rivales la siguen y solo gana la parte proporcional del aumento de la demanda de mercado (tramo menos elástico). El quiebro de la demanda produce una discontinuidad vertical en el ingreso marginal justo en la cantidad vigente (figura A19.10), de modo que cualquier coste marginal que corte esa discontinuidad es compatible con el mismo precio, y los desplazamientos moderados de los costes no lo alteran. El modelo explica así la rigidez de los precios oligopolísticos.

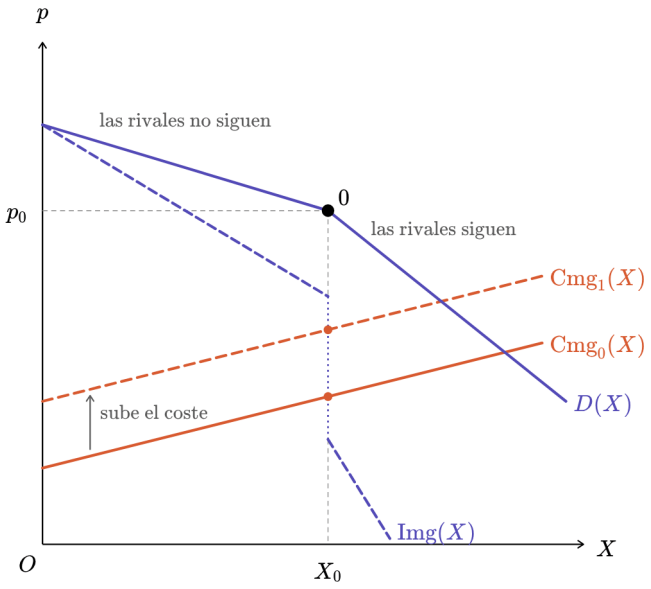


Figura A19.10: Demanda quebrada (Sweezy, 1939). Como las rivales siguen las bajadas de precio pero no las subidas, la demanda $D(X)$ se quiebra en el precio vigente (punto 0) y el ingreso marginal $\text{Img}(X)$ tiene un hueco vertical en X_0. Tanto $\text{Cmg}_0(X)$ como el más alto $\text{Cmg}_1(X)$ cortan ese hueco, de modo que la empresa mantiene X_0 y p_0.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: fue la primera explicación de la estabilidad de los precios en oligopolio y de la asimetría de las reacciones. La teoría de juegos recupera su intuición en los modelos de colusión tácita con castigos (apartado 2.2).

- *Limitaciones*: no determina el nivel del precio (toma como dado el precio vigente, que es lo que había que explicar), y la evidencia de Stigler (1947) no encontró la asimetría de reacciones que supone el modelo.

A.2. Liderazgo en precios y empresa dominante (Forchheimer, 1908)

Origen: modelo de Forchheimer (1908), sistematizado por Stigler (1947) y Markham (1951), que distinguen el liderazgo *dominante*, el *barométrico* (una empresa anuncia los cambios que el resto aceptaría de todos modos) y el *colusivo*.

Idea: el precio lo decide una empresa grande. Un grupo de empresas pequeñas (*franja competitiva*) lo acepta y produce lo que le conviene a ese precio, y la dominante atiende la parte de la demanda que la franja no cubre.

Razonamiento: la franja se comporta como precio-aceptante y ofrece $S_f(p)$, creciente en p (suma horizontal de sus curvas de coste marginal). La empresa dominante afronta, por tanto, la *demanda residual* $D_R(p) = D(p) - S_f(p)$, más elástica que la de mercado (figura A19.11), y la explota como lo haría un monopolista. Produce hasta que su coste marginal alcanza el ingreso marginal asociado a $D_R(p)$ y cobra el precio que esa curva marca para dicha cantidad. La franja vende $S_f(p^*)$ a ese precio, y el resultado se sitúa entre el monopolio y la competencia. Cuanto mayor es la franja o más elástica su oferta, más elástica es la demanda residual y menor el margen de la dominante.

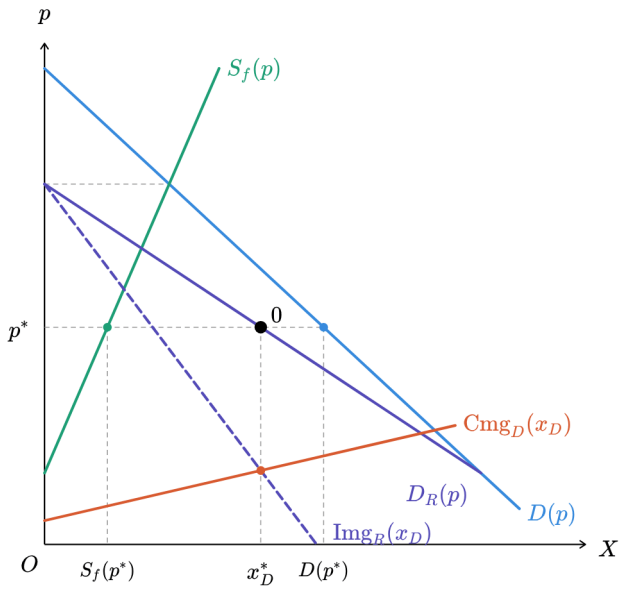


Figura A19.11: Empresa dominante con franja competitiva (Forchheimer, 1908). La dominante produce x_D^*, donde $\mathrm{Img}_R(x_D) = \mathrm{Cmg}_D(x_D)$, y fija p^* sobre la demanda residual $D_R(p) = D(p) - S_f(p)$ (punto 0), más plana que la de mercado. A ese precio la franja vende $S_f(p^*)$ y el mercado compra $D(p^*) = x_D^* + S_f(p^*)$.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el modelo describe bien industrias con una empresa grande y muchas pequeñas (históricamente, el acero o el petróleo) y es el antecedente de la competencia secuencial en precios (apartado 1.4).

- *Limitaciones*: la posición de la dominante es exógena y estática, pues nada impide que la franja crezca hasta erosionarla, salvo las barreras del apartado 3. Además, que las pequeñas acepten el precio sin comportamiento estratégico es un supuesto, no un resultado.

A20. Regulación

Poder de mercado y regulación óptima. Definición del mercado relevante. Desarrollos en presencia de información asimétrica. Aplicaciones prácticas.

Introducción

Introducción común. Los temas A15 a A21 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A15**. Ordena los mercados en cuatro estructuras según el poder de mercado (competencia perfecta, competencia monopolística, oligopolio y monopolio) y resume la evolución de su análisis, de Cournot y Marshall a la nueva organización industrial y la teoría de la regulación.

La economía del bienestar estudia, con un criterio colectivo, qué asignaciones de recursos de un sistema económico son deseables y cuáles no. Atiende a dos preguntas, una positiva (¿cómo medir el bienestar social?) y otra normativa (¿cómo alcanzar el máximo bienestar social?).

Históricamente, la respuesta a estas preguntas ha evolucionado desde el utilitarismo de Bentham (la máxima felicidad para el máximo número), pasando por los marginalistas, que consideraban medible la utilidad, y por la escuela de Cambridge, que admitía además comparaciones interpersonales de utilidad. Vilfredo Pareto (1906) concluyó, por último, que una asignación es óptima si ningún agente puede mejorar sin que otro empeore. El criterio de Pareto se ha convertido en el referente para valorar la eficiencia económica, al descansar sobre un número mínimo de juicios de valor.

Sobre esta base se asientan los dos teoremas fundamentales de la economía del bienestar. Según el primero, el equilibrio de un mercado competitivo sin imperfecciones de ningún tipo asigna los recursos de forma eficiente en el sentido de Pareto. El segundo recorre el camino inverso y, con preferencias y tecnologías convexas, garantiza que todo óptimo de Pareto puede obtenerse como equilibrio competitivo si antes se redistribuyen adecuadamente las dotaciones iniciales.

Los teoremas sirven, así, de defensa del libre mercado y, a la vez, justifican la intervención pública:

- *Primer teorema*: justifica la intervención cuando las condiciones para la eficiencia no se verifican, es decir, cuando existen fallos de mercado, entendidos como situaciones en las que las decisiones descentralizadas no conducen a la eficiencia económica.

- *Segundo teorema*: legitima la intervención *ex ante* sobre las dotaciones incluso cuando el mercado funciona perfectamente, si la asignación resultante se considera indeseable en términos de equidad.

Sobre los teoremas fundamentales de la economía del bienestar, véase el tema A22.

La **teoría de la regulación** analiza los instrumentos con que el Estado interviene cuando la asignación de recursos descansa en el mercado. Regular ha de servir para completar el mercado y mejorar su funcionamiento, nunca para ocupar su lugar. En su seno conviven dos grandes visiones:

- *Visión normativa* o del interés público: la regulación existe (o debe existir) para corregir los fallos de mercado y maximizar el bienestar social.

- *Visión positiva* o teoría económica de la regulación, desarrollada por la escuela de Chicago: la regulación realmente observada responde, en buena medida, a los intereses de los grupos organizados que la demandan.

El tema se divide en tres partes, dedicadas a examinar el poder de mercado y cuál es la manera óptima de regularlo:

- *Poder de mercado*: su concepto y su medida, las estructuras en que aparece y sus causas, así como las de su regulación.

- *Regulación óptima*: con información perfecta y con información asimétrica, con varias empresas y en los mercados de varias caras.

- *Mercado relevante y aplicaciones prácticas*: la delimitación del mercado, la medición empírica del poder de mercado y la experiencia de la regulación.

1. Poder de mercado

El apartado define el poder de mercado y su medida directa, el índice de Lerner, repasa las estructuras en que aparece y estudia sus causas y las de su regulación.

1.1. Concepto y estructuras de competencia imperfecta

El **poder de mercado** se da cuando una o varias empresas tienen capacidad para alterar el precio, lanzando al mercado cantidades inferiores a las competitivas a un precio superior. Se pierde así eficiencia paretiana, porque quedan sin producir unidades cuyo coste de fabricación es inferior a lo que los consumidores darían por ellas.

La medida directa del poder de mercado es el **índice de Lerner**, el margen relativo del precio sobre el coste marginal:

$$I_L = \frac{p - \text{Cmg}}{p}, \qquad I_L \in [0, 1]$$

donde p es el precio y Cmg el coste marginal. El índice está acotado entre cero (competencia perfecta, $p = \text{Cmg}$) y uno (coste marginal nulo) y aumenta con la capacidad de la empresa para fijar el precio por encima del coste marginal.

En el monopolio simple, el índice iguala la inversa de la elasticidad de la demanda, y en el oligopolio de Cournot, el de cada empresa es proporcional a su cuota[1]:

$$I_L = \frac{1}{|\varepsilon_{Xp}|} \in [0, 1], \qquad I_{L,i} = \frac{s_i}{|\varepsilon_{Xp}|} \in [0, 1]$$

donde $|\varepsilon_{Xp}|$ es el valor absoluto de la elasticidad-precio de la demanda de mercado y $s_i = x_i/X$ la cuota de la empresa i. Sin embargo, la medición directa del poder de mercado exige conocer el coste marginal, generalmente inobservable, lo que motiva tanto los índices indirectos del apartado 3.2 como el enfoque estructural de la nueva organización industrial empírica (NEIO). En los mercados de varias caras, además, el margen de cada lado se mide frente al coste neto de la externalidad que genera (apartado 2.4).

El poder de mercado aparece en tres estructuras de competencia imperfecta, que el índice de Lerner permite ordenar:

- *Monopolio*: una sola empresa, cuyo margen iguala la inversa de la elasticidad de la demanda (tema A17).

- *Oligopolio*: pocas empresas interdependientes, cuyo margen depende de la variable estratégica y, en Cournot, de la cuota (tema A19).

- *Competencia monopolística*: muchas empresas con producto diferenciado, con margen positivo pero beneficio nulo a largo plazo (tema A18).

Dentro del monopolio, el diseño de la regulación depende de su tipo. Con independencia de su origen, se distinguen cuatro situaciones:

[1] En el equilibrio de Cournot, la condición de primer orden de cada empresa, $p(1 - s_i/|\varepsilon_{Xp}|) = \text{Cmg}_i \geq 0$, exige $s_i \leq |\varepsilon_{Xp}|$, de modo que cada empresa produce en el tramo elástico de su demanda residual, cuya elasticidad es $|\varepsilon_{Xp}|/s_i$. Por eso $I_{L,i} \leq 1$, como en el monopolio, que es el caso $s_i = 1$.

- *Monopolio discriminador*: el monopolista fija precios distintos a distintos consumidores o unidades (discriminación de primer, segundo y tercer grado). La discriminación puede aumentar la cantidad vendida y, con ella, la eficiencia, pero transfiere excedente del consumidor al productor. Por ello, la regulación suele centrarse en las discriminaciones que restringen la competencia (precios predatorios, descuentos de fidelidad).

- *Monopolio natural*: el que resulta de la subaditividad de la función de costes, por lo que no cabe introducir competencia en el mercado sin pérdida de eficiencia productiva. Su tratamiento depende de que sea *sostenible*, es decir, de que pueda sobrevivir a la entrada sin protección. El sostenible es el objeto central de la regulación de precios (apartado 2.1). El no sostenible, en cambio, se subasta, pues se licita periódicamente el derecho exclusivo a explotarlo, y la competencia por el mercado sustituye a la competencia en el mercado (Demsetz, 1968; apartado 2.3.1).

- *Monopolio de demanda (monopsonio)*: un único comprador frente a muchos vendedores (un gran distribuidor frente a los productores agrarios, un gran empleador en un mercado de trabajo local). La ineficiencia es simétrica a la del monopolio (compra menos y a menor precio) y la regulación toma la forma de precios mínimos, salarios mínimos o normas de contratación.

- *Monopolio bilateral*: un único vendedor frente a un único comprador (un sindicato y una patronal, un fabricante y un distribuidor exclusivo). La teoría no determina el precio, que depende del poder de negociación, aunque con negociación eficiente sí determina la cantidad, la que maximiza el excedente conjunto. En consecuencia, la regulación se limita a fijar el marco de la negociación y a arbitrar.

> El índice de Lerner del monopolio se desarrolla en el tema A17, apartado 1.3.1, y su medición empírica, en el tema A15, apartado 3.3.1. La discriminación de precios se estudia en el tema A17, apartado 2.1, el monopolio natural y una primera aproximación a su regulación, en los apartados 2.2 y 2.3, y el monopsonio y el monopolio bilateral, en el apartado 3.

1.2. Causas del poder de mercado

El origen del poder de mercado está en las **barreras a la entrada**, que impiden que los beneficios extraordinarios atraigan a nuevas empresas. Se distinguen las barreras **naturales o estructurales**, que derivan de la tecnología y la demanda del sector, y las **artificiales**, que crean las instaladas (estratégicas) o el Estado (legales):

- *Naturales o estructurales*: la estrechez del mercado en relación con la escala mínima eficiente, que da lugar al monopolio natural. Esta ventaja, sin embargo, solo protege a la instalada si la entrada exige costes hundidos (Baumol y Willig, 1981).

- *Estratégicas*: los comportamientos de las instaladas para disuadir la entrada o expulsar a los rivales (precio límite, inversión en capacidad, proliferación de marcas, predación, concentración empresarial[2]).

- *Legales*: los privilegios que concede el Estado (patentes, licencias, concesiones, derechos exclusivos).

[2] Conviene que el regulador no se precipite, pues conductas que parecen restringir la competencia pueden responder a razones de eficiencia, como las sinergias (economías de escala y de gama) o la necesidad de economizar en costes de transacción cuando no cabe redactar contratos completos.

La distinción entre barreras naturales y artificiales ordena las causas de la regulación. Las barreras son, además, el determinante central de la estructura de los mercados (apartado 3.2.2).

La propia definición de barrera a la entrada ha sido objeto de debate. Bain (1956) las define por sus resultados, como las condiciones que permiten a las instaladas fijar precios supracompetitivos de forma persistente sin inducir la entrada. En cambio, Stigler (1968) las restringe a los costes que soporta el entrante y no soportaron las instaladas, y Baumol y Willig (1981) sitúan la barrera genuina en los costes hundidos, una idea que anticipa la teoría de los mercados impugnables (apartado 2.3.3).

> La definición y la taxonomía de las barreras a la entrada se desarrollan en el tema A15, apartado 2.2.1, y su papel en el monopolio, en el tema A17, apartado 1.1. El papel de los costes hundidos como mecanismo de compromiso y el juego de entrada se estudian en el tema A14, apartado 2.3.1, y el precio límite y la disuasión de la entrada, en el tema A19, apartado 3.2.

1.3. Causas de la regulación

La intervención sobre el poder de mercado se justifica por dos tipos de motivos:

1. *Motivos de equidad*: la regulación persigue garantizar el acceso a determinados bienes y servicios (energía, agua, telecomunicaciones, transporte, servicios financieros básicos). El acceso ha de ser independiente de la *disparidad geográfica* (zonas rurales o insulares que un operador no regulado no serviría, o serviría a precios prohibitivos) y de la *disparidad de renta* (colectivos que quedarían excluidos por su capacidad de pago). A ese fin responden las obligaciones de servicio universal y las tarifas sociales, que se financian con subsidios cruzados o con cargo al presupuesto.

2. *Motivos de eficiencia*: la regulación persigue corregir la ineficiencia asignativa del poder de mercado. Cabe distinguir el *monopolio no natural*, sostenido por barreras artificiales, cuyo remedio es eliminarlas (liberalización, defensa de la competencia), y el *monopolio natural*, sostenido por la tecnología, que no conviene desmantelar sino regular.

Existe monopolio natural cuando la función de costes presenta subaditividad estricta y, por tanto, ninguna combinación de empresas puede producir un vector de producción dado a menor coste que una sola empresa[3]. La escala mínima eficiente es, en estos casos, grande en relación con la demanda[4].

Frente al monopolio natural, la actuación pública debe evitar dos extremos. Trocearlo sacrificaría su ventaja, la eficiencia productiva, pues una sola empresa produce con los menores costes posibles. Dejarlo libre, en cambio, permitiría al monopolista situar el precio muy por encima del coste marginal, con daño para la eficiencia asignativa.

La regulación tampoco ha de llevar al extremo su exigencia de eficiencia asignativa, porque en el monopolio natural existe una disyuntiva entre esa eficiencia y la viabilidad financiera de la empresa. Puesto que el coste marginal suele quedar por debajo del medio en el tramo de demanda pertinente, el monopolista pierde más cuanto más se le obliga a acercar el precio a la referencia

[3] La definición se debe a Baumol (1977). Formalmente, la función de costes $\mathrm{CT}(\mathbf{x})$ es estrictamente subaditiva en $\mathbf{x}$ si $\mathrm{CT}(\mathbf{x}) < \sum_j \mathrm{CT}(\mathbf{x}^j)$ para toda descomposición $\sum_j \mathbf{x}^j = \mathbf{x}$ en al menos dos vectores no nulos.

[4] Es decir, la empresa suele operar con costes medios decrecientes ($\mathrm{Cmg} < \mathrm{Cme}$) en el tramo relevante de la demanda, aunque la subaditividad puede mantenerse algo por encima de la escala mínima eficiente, que se alcanza donde $\mathrm{Cme} = \mathrm{Cmg}$.

competitiva ($p = \text{Cmg}$). Las modalidades de regulación se ordenan según esa disyuntiva y según la información de que disponga el regulador (apartado 2.1).

1.4. Conclusiones

Aspectos positivos: el índice de Lerner ofrece una medida del poder de mercado comparable entre estructuras, y la distinción entre barreras naturales y artificiales indica el remedio, que es eliminar las artificiales y regular el monopolio natural.

Limitaciones: el índice exige conocer el coste marginal, que rara vez se observa, y la propia definición de barrera sigue en discusión. Por eso la medición práctica se apoya en el mercado relevante y en índices indirectos (apartado 3). Además, la regulación del monopolio natural afronta la disyuntiva entre eficiencia asignativa y viabilidad financiera (apartado 2).

2. Regulación óptima

La regulación óptima se estudia primero con información perfecta, cuando el regulador conoce los costes y la demanda de la empresa. Después se relaja ese supuesto, con el mecanismo de Loeb y Magat y el modelo de Laffont y Tirole, y se estudian la regulación que se apoya en varias empresas y la de los mercados de varias caras.

2.1. Regulación con información perfecta

Suponiendo que el regulador conoce las funciones de coste y de demanda del monopolista, la regulación óptima se ordena en tres niveles según la prioridad que se dé a la eficiencia asignativa frente a la viabilidad financiera de la empresa:

1. *First best*: logra la eficiencia asignativa y financia las pérdidas con transferencias.

2. *Second best*: renuncia a las transferencias y busca el precio eficiente compatible con beneficio nulo.

3. *Third best*: se limita a acotar los beneficios extraordinarios, con un tope a la rentabilidad o a la senda de precios, sin fijar directamente el precio.

2.1.1. Regulación *first best*: precio igual al coste marginal

Planteamiento: el regulador maximiza el bienestar social, suma del excedente del consumidor y del beneficio de la empresa, sin restricción financiera:

$$\max_{p} \; W = \int_0^{x(p)} p(q)\, dq - \mathrm{CT}(x)$$

donde p es el precio regulado, $x(p)$ la función de demanda, $p(\cdot)$ la demanda inversa, q la variable de integración (cada unidad entre 0 y $x(p)$), $\mathrm{CT}(x)$ la función de costes del monopolista y W el bienestar social. La integral es la disposición a pagar por las $x(p)$ unidades.

CPO: $p = \mathrm{Cmg}$, es decir, el precio regulado iguala la disposición marginal a pagar al coste marginal, que es la condición de eficiencia asignativa.

CSO: el bienestar es cóncavo si la demanda inversa decrece más deprisa que el coste marginal, $p'(x) < \mathrm{Cmg}'(x)$, lo que se cumple también con el coste marginal decreciente habitual del monopolio natural si decrece más despacio que la demanda.

Solución: cuando, como es habitual en el monopolio natural, el coste marginal es inferior al medio en el rango relevante, la empresa incurre en una pérdida igual a $x \cdot (\mathrm{Cme} - \mathrm{Cmg})$, que el presupuesto público cubre con una subvención de suma fija. En cambio, si el coste marginal supera al medio, un impuesto de suma fija retira el beneficio.

Desarrollo gráfico: la tarificación al coste marginal se representa en el plano cantidad-precio (figura A20.1):

1. *Coste medio*, $\mathrm{Cme}(x)$: tiene forma de U, decreciente mientras el coste marginal queda por debajo de él y creciente cuando lo supera.

2. *Coste marginal*, $\mathrm{Cmg}(x)$: corta al coste medio en su mínimo y, para cada cantidad, marca el precio regulado.

3. *Equilibrio*: el precio regulado iguala al coste marginal, y el resultado de la empresa depende del tramo del coste medio:

- *Tramo decreciente*: con $p_1^R = \text{Cmg}(x_1) < \text{Cme}(x_1)$, la pérdida es el área "pérdida", $x_1 \cdot [\text{Cme}(x_1) - p_1^R]$, que cubre la subvención.

- *Tramo creciente*: si el coste marginal supera al medio, como en x_2, la tarificación al coste marginal deja un beneficio, $x_2 \cdot [p_2^R - \text{Cme}(x_2)]$ (área "beneficio"), que se detrae con un impuesto de suma fija.

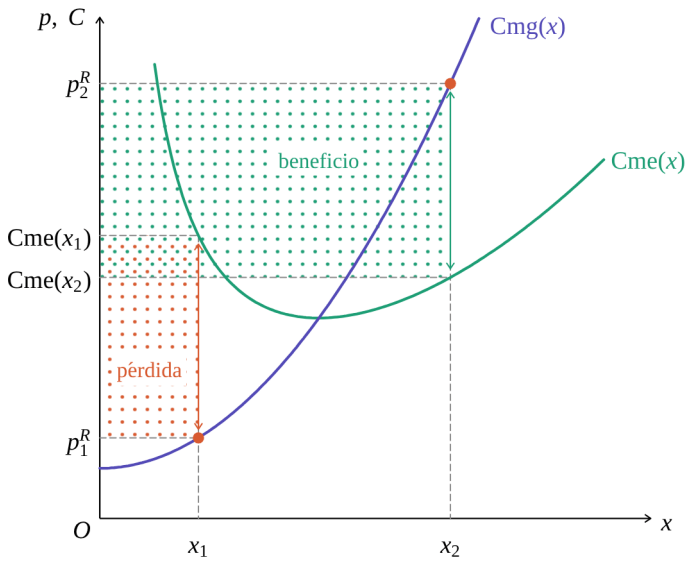


Figura A20.1: Tarificación al coste marginal. Con $p_1^R = \text{Cmg}(x_1) < \text{Cme}(x_1)$ la empresa incurre en una pérdida, que cubre una subvención, mientras que con $p_2^R = \text{Cmg}(x_2) > \text{Cme}(x_2)$ obtiene un beneficio, que se detrae con un impuesto de suma fija.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: es la única solución plenamente eficiente.

- *Limitaciones*: plantea tres problemas:

  - *Información*: requiere información perfecta sobre las funciones de coste y demanda.

  - *Financiación*: la subvención exige impuestos que generan sus propias distorsiones en otros mercados.

  - *Riesgo moral*: la empresa que sabe que sus pérdidas serán cubiertas carece de incentivos a reducir costes.

2.1.2. Regulación *second best*: beneficio nulo

Planteamiento: los mecanismos difieren según el monopolio sea monoproducto o multiproducto. En el monopolio monoproducto, el programa añade la restricción de beneficio no negativo, que resulta saturada:

$$\max_{p} W \quad \text{s.a.:} \quad p \cdot x(p) - \mathrm{CT}(x) \geq 0$$

donde W es el bienestar social ya definido, p el precio regulado, $x(p)$ la función de demanda y $\mathrm{CT}(x)$ la función de costes, de modo que la restricción exige un beneficio no negativo.

CPO: $p = \mathrm{Cme}$, es decir, la restricción de beneficio no negativo se satura.

CSO: el bienestar decrece con el precio por encima del coste marginal, por lo que el máximo es el menor precio compatible con beneficio nulo.

Solución: en el plano cantidad-precio (figura A20.2), el precio se fija donde la curva de demanda corta a la de coste medio, de modo que la cantidad es inferior a la eficiente y el precio superior al coste marginal. La pérdida de eficiencia asignativa resultante (el triángulo entre demanda y coste marginal) es el precio de la viabilidad financiera.

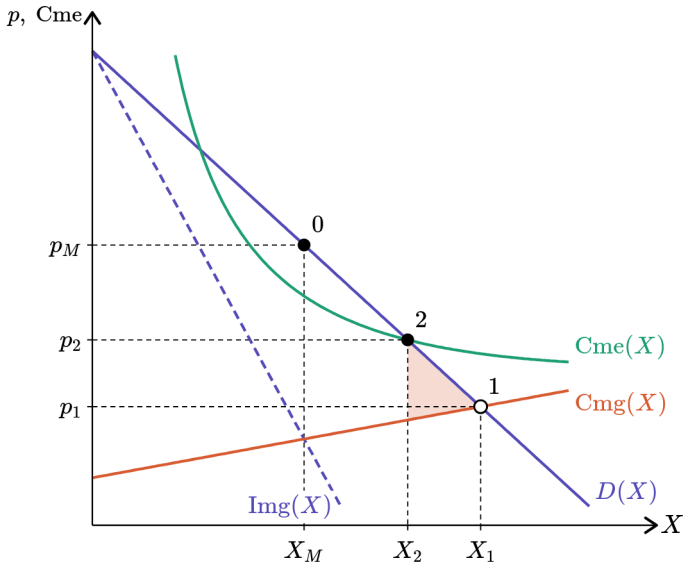


Figura A20.2: Regulación *second best* con beneficio nulo. El precio regulado, p_2, se fija donde la demanda, $D(X)$, corta al coste medio, $\mathrm{Cme}(X)$ (punto 2), con una cantidad, X_2, inferior a la eficiente, X_1, en la que la demanda corta al coste marginal (punto 1). El área sombreada entre la demanda y el coste marginal, de X_2 a X_1, es la pérdida de eficiencia asignativa. El punto 0 es el monopolio sin regular.

Extensiones: dos mecanismos alcanzan la asignación del *first best*, en la que cada unidad marginal se paga a su coste marginal, por lo que pueden considerarse también soluciones de primer óptimo. Se estudian aquí porque responden al problema del *second best*, financiar la empresa sin las transferencias distorsionantes de la regulación *first best*, y lo resuelven sin transferencias públicas, bajo supuestos propios. Un tercero, el de Loeb y Magat (1979), alcanza esa asignación con ellas y aun con información asimétrica.

▪ *Tarifa en dos partes* (Coase, 1946): con n consumidores idénticos, el regulador elige una cuota fija, F, y un precio por unidad, p, de modo que cada consumidor h paga $T(x^h) = F + p \cdot x^h$ por sus x^h unidades. La cuota es una transferencia de los consumidores a la empresa que no altera el bienestar mientras nadie abandone el mercado, y el programa es:

$$\max_{p,F} W = \int_0^{x(p)} p(q)\,dq - \mathrm{CT}(x) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} nF + p \cdot x(p) - \mathrm{CT}(x) \geq 0 \\ F \leq \mathrm{EC}(p)/n \end{cases}$$

donde la primera restricción es la de beneficio no negativo y la segunda, la de participación, porque cada consumidor solo paga la cuota si la cuota no supera su excedente, $\mathrm{EC}(p)/n$. Como F no entra en W, el precio se elige como en el *first best* y la cuota cubre la pérdida:

$$p = \mathrm{Cmg}$$

$$F = \frac{x \cdot (\mathrm{Cme} - \mathrm{Cmg})}{n}$$

Con coste marginal constante, la cuota se reduce a los costes fijos repartidos, $F = \mathrm{CF}/n$. El consumo marginal se decide así eficientemente y la empresa cubre costes. Con consumidores heterogéneos, sin embargo, la cuota excluye a los de baja disposición a pagar, y el precio óptimo se sitúa entonces por encima del coste marginal.

▪ *Tarifas pico-valle* (Boiteux, 1949; Steiner, 1957): cuando la demanda fluctúa en ciclos y el bien no es almacenable, el ciclo se divide en dos periodos de igual duración, valle y pico, con demandas independientes, $x_{\text{valle}}(p_{\text{valle}})$ y $x_{\text{pico}}(p_{\text{pico}})$, un coste de operación por unidad, c, y un coste de capacidad por unidad y ciclo, c_K. El regulador elige los dos precios y la capacidad, K, que comparten ambos periodos:

$$\max_{p_{\text{valle}},\, p_{\text{pico}},\, K} W = \sum_{j \in \{\text{valle},\, \text{pico}\}} \int_0^{x_j(p_j)} p_j(q)\,dq - c \cdot (x_{\text{valle}} + x_{\text{pico}}) - c_K K$$
$$\text{s.a.:} \begin{cases} x_{\text{valle}}(p_{\text{valle}}) \leq K \\ x_{\text{pico}}(p_{\text{pico}}) \leq K \end{cases}$$

donde $p_j(\cdot)$ es la demanda inversa del periodo j. Con λ y μ como multiplicadores de las restricciones de capacidad del valle y del pico, las CPO respecto a los dos precios y a la capacidad son:

$$p_{\text{valle}} = c + \lambda$$

$$p_{\text{pico}} = c + \mu$$

$$\lambda + \mu = c_K$$

Con *pico firme*, la capacidad solo se satura en la punta ($\lambda = 0$), de modo que $p_{\text{valle}} = c$ y $p_{\text{pico}} = c + c_K$, y los consumidores de punta, que determinan la capacidad, soportan todo su coste. Cada periodo paga su coste marginal, de corto plazo en el valle y de largo plazo en la

punta, y como $x_{\text{pico}} = K$, los ingresos, $c \cdot (x_{\text{valle}} + x_{\text{pico}}) + c_K K$, cubren exactamente los costes, sin transferencias. En cambio, si ese precio de punta hiciese caer la demanda del pico por debajo de la del valle (*pico desplazado*), las dos restricciones se saturan y ambos periodos se reparten el coste de capacidad.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: es la solución básica y la más sencilla de aplicar.

- *Limitaciones*: puede no existir (si la demanda no corta al coste medio), mantiene un precio superior al competitivo y, como el coste se cubre siempre, no incentiva su reducción (regulación *cost-plus*).

2.1.3. Regulación *second best* del monopolio multiproducto: precios de Ramsey-Boiteux

Planteamiento: con varios productos de demandas independientes, el regulador maximiza la suma de excedentes sujeto a la cobertura de los costes comunes:

$$\max_{p_1,\dots,p_n} \sum_i \text{EC}_i(p_i) + \pi \quad \text{s.a.:} \quad \sum_i p_i x_i - \text{CT}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

donde p_i y x_i son el precio y la cantidad del producto i, $\text{EC}_i(p_i)$ el excedente del consumidor en ese mercado, π el beneficio de la empresa y $\text{CT}(x_1, \dots, x_n)$ la función de costes conjunta.

CPO: con solución interior y la restricción agotada, derivando el lagrangiano respecto a cada precio, el margen relativo de cada producto sobre su coste marginal varía en razón inversa de la elasticidad de su demanda (*regla de la elasticidad inversa*):

$$\frac{p_i - \text{Cmg}_i}{p_i} = \frac{k}{|\varepsilon_i|}, \qquad i = 1, \dots, n$$

donde $|\varepsilon_i|$ es el valor absoluto de la elasticidad-precio de la demanda del producto i, $k = \lambda/(1+\lambda) \in (0,1)$ el *número de Ramsey* y λ el multiplicador de la restricción financiera. Este último mide el coste en bienestar de exigir a la empresa una unidad monetaria más de beneficio o, lo que es lo mismo, la ganancia de bienestar de relajar esa restricción en una unidad[5].

CSO: con demandas independientes y costes marginales constantes, el excedente total de cada mercado es cóncavo en su precio y el beneficio es cuasicóncavo en el tramo relevante (p. ej. con demandas lineales), de modo que se cumplen las condiciones de suficiencia de Arrow-Enthoven.

Solución: los servicios de demanda más inelástica contribuyen en mayor medida a cubrir los costes fijos comunes, lo que minimiza la pérdida de eficiencia total. Este reparto eficiente de los costes comunes no supone subsidio cruzado mientras cada servicio cubra al menos su coste incremental (no basta con que su precio supere el coste marginal).

Extensiones: si el monopolio no es sostenible, es decir, si no puede sobrevivir a la entrada[6], ninguna regla de precios lo sostiene por sí sola. Una solución es entonces organizar la competencia por el mercado en lugar de en el mercado, licitando el derecho a explotarlo (Demsetz, 1968).

[5] Ramsey (1927) formuló la regla en el contexto de la imposición óptima y Boiteux (1956), en el de la tarificación de los monopolios públicos. Con demandas interdependientes, la regla se generaliza sustituyendo las elasticidades propias por superelasticidades que recogen los efectos cruzados.

[6] Que el monopolio sea sostenible depende a la vez de factores tecnológicos y de demanda. La subaditividad lo justifica por la eficiencia productiva, pero no le asegura sobrevivir sin protección frente a los entrantes.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: ofrece un criterio de *second best* para cubrir los costes comunes cuando el precio igual al coste marginal genera pérdidas, al repartirlos según la elasticidad de cada demanda, y traslada a la tarificación la lógica de la imposición óptima. Este criterio es, por ello, la referencia teórica de las tarifas de las industrias de red multiproducto.

▪ *Limitaciones*: la información que exige (costes y elasticidades de todos los productos) y su posible regresividad, pues los bienes inelásticos pesan más en las cestas de renta baja.

2.1.4. Regulación *third best*: beneficio acotado

Planteamiento: en la *regulación de la tasa de beneficio* (*rate of return*), el regulador fija una tasa máxima de rentabilidad sobre el capital, s, superior al coste del capital r, y la empresa maximiza su beneficio sujeto a no superarla:

$$\max_{L,K} \; p(x)\cdot x - wL - rK \quad \text{s.a.:} \quad \frac{p(x)\cdot x - wL}{K} \leq s$$

donde L y K son las cantidades de trabajo y capital, x la producción obtenida con ellas, $p(x)$ la demanda inversa, w el salario, r el coste del capital y s la tasa máxima de rentabilidad sobre el capital fijada por el regulador.

CPO: con solución interior, la restricción se satura y, derivando el lagrangiano respecto a L y K, la empresa elige una combinación de factores en la que la relación marginal de sustitución técnica no iguala la relación de precios de los factores, w/r, porque el coste efectivo del capital para la empresa es inferior a r.

CSO: la restricción define un conjunto factible no convexo, por lo que la suficiencia de la CPO no está garantizada en general, y el análisis de Averch y Johnson supone que la solución con la restricción saturada es un máximo.

Solución: como cada unidad de capital adicional amplía el beneficio permitido ($s - r > 0$), la empresa se sobrecapitaliza (*efecto Averch-Johnson*, 1962), eligiendo una ratio capital-trabajo superior a la que minimiza los costes.

Desarrollo gráfico: el efecto Averch-Johnson se representa en el plano capital-beneficio (figura A20.3):

1. *Beneficio máximo para cada nivel de capital*, $\pi(K)$: crece con el capital hasta su máximo y decrece a partir de él.

2. *Restricción de la tasa de rentabilidad*, $(s-r)\,K$: es el techo del beneficio, una semirrecta que parte del origen con pendiente $s-r$, y el beneficio ha de quedar por debajo de ella, $\pi \leq (s-r)\,K$.

3. *Equilibrio*: sin regulación, la empresa iría al máximo de $\pi(K)$ (punto 0), con el capital K_0. Regulada, en cambio, se queda con el beneficio más alto que la restricción tolera, en el corte de $\pi(K)$ con la recta (punto 1), lo que exige más capital, K_1, y la distancia entre K_1 y K_0 mide la sobrecapitalización.

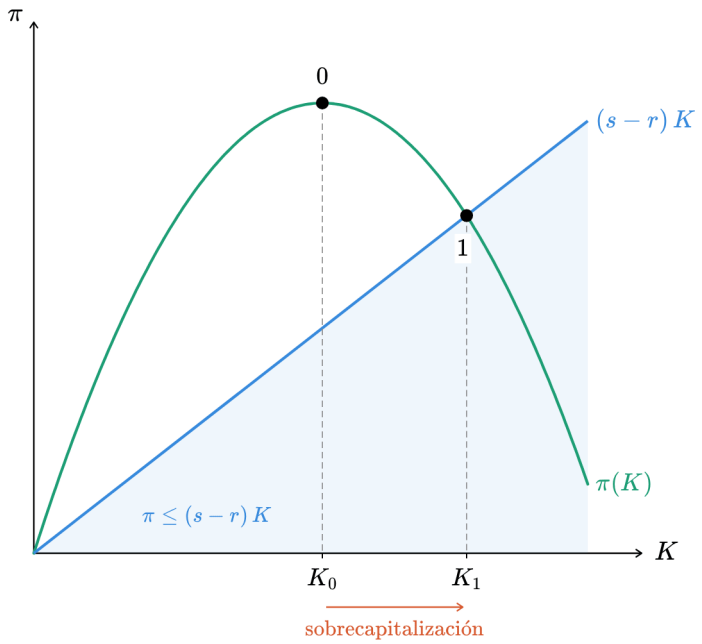


Figura A20.3: Efecto Averch y Johnson (1962). La regulación de la tasa de retorno induce a la empresa a sobrecapitalizarse respecto a la combinación de factores de coste mínimo. La curva $\pi(K)$ es el beneficio máximo para cada nivel de capital.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: exige poca información, pues el regulador no necesita conocer la demanda y le basta con fijar la tasa y comprobar el capital y los costes que declara la empresa.

- *Limitaciones*: la principal es el efecto Averch-Johnson. Además, la tasa se elige sin un criterio objetivo, y la empresa no tiene estímulo para abaratar su producción, porque los costes se trasladan al consumidor.

2.1.5. Regulación *third best*: límites de precios (*price cap*)

Origen: Stephen Littlechild (1983) propuso los límites de precios (*price cap*) en su informe para la privatización de British Telecom, como alternativa a la regulación de la tasa de beneficio.

Idea: el regulador fija una senda máxima de precios para el periodo regulatorio (habitualmente cinco años), desvinculada de los costes propios de la empresa, de modo que esta se apropia de los ahorros que consiga durante el periodo.

Razonamiento: la senda se indexa a la inflación y descuenta las ganancias de productividad esperadas:

$$p_t \leq p_{t-1} \cdot (1 + \text{IPC} - \text{X})$$

donde p_t es el precio regulado (o el índice de precios de la cesta regulada) en el año t, IPC la tasa de inflación y X el factor de productividad esperada de la industria. Como el precio no depende de los costes propios, cada ahorro de costes eleva el beneficio de la empresa hasta la

siguiente revisión. La eficiencia productiva se convierte así en la principal vía para aumentar el beneficio.

Extensiones: la competencia por comparación (*yardstick competition*) de Shleifer (1985) retribuye a cada empresa según los costes de empresas comparables. Se desarrolla en el apartado 2.3.2, pues su lógica es ya la de la regulación con varias empresas.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: genera potentes incentivos a la eficiencia productiva y evita la sobrecapitalización que induce la regulación de la tasa de beneficio.

- *Limitaciones*: es difícil acertar con X, el estímulo a ahorrar se debilita conforme se aproxima la revisión y la empresa puede reducir costes empeorando la calidad.

2.2. Regulación con información asimétrica

Cuando la empresa sabe más que el regulador sobre sus costes, la regulación ha de inducirla a revelarlos y a reducirlos. El apartado estudia un mecanismo que alcanza el *first best* con transferencias (Loeb y Magat, 1979), el menú de contratos de Laffont y Tirole (1986) y su límite dinámico, el efecto trinquete.

2.2.1. Mecanismo de Loeb y Magat (1979)

Idea: el regulador promete a la empresa una subvención igual al excedente del consumidor que genere, $z = \mathrm{EC}(p)$, y le deja elegir el precio.

Razonamiento: la empresa elige el precio que maximiza la suma de su beneficio y la subvención:

$$p \cdot x(p) - \mathrm{CT}(x) + \mathrm{EC}(p)$$

donde $\mathrm{EC}(p)$ decrece con el precio a razón de la cantidad vendida, $d\,\mathrm{EC}/dp = -x(p)$. La CPO es:

$$x(p) + [p - \mathrm{Cmg}]\,\frac{dx}{dp} - x(p) = 0 \;\Rightarrow\; p = \mathrm{Cmg}$$

Al internalizar así el excedente total, la empresa elige por sí misma el precio del *first best*, sin que el regulador necesite conocer los costes[7].

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: alcanza el *first best* aun con información asimétrica sobre costes, a costa de una subvención.

- *Limitaciones*: a diferencia de la tarifa en dos partes y de las tarifas pico-valle, no respeta la renuncia a las transferencias. Además, su coste fiscal y la redistribución masiva a favor del monopolista lo hacen políticamente inviable.

[7] Para que no todo el excedente acabe en la empresa, Loeb y Magat proponen combinar el mecanismo con una subasta previa de la franquicia que devuelva al sector público, por adelantado, el valor de esas rentas.

2.2.2. Modelo de Laffont y Tirole (1986)

> El modelo de Laffont y Tirole (1986), con sus supuestos, el programa del regulador, su CPO y su CSO, se desarrolla en el tema A15, apartado 2.3.3, como aplicación de la teoría de contratos. Aquí se resumen su solución y sus implicaciones para la política regulatoria.

Origen: frente a la teoría tradicional, que supone que el regulador dispone de información perfecta, la nueva teoría de la regulación aborda el problema de la información asimétrica entre el regulador y la empresa regulada y aplica al diseño regulatorio la teoría de los incentivos. Su referencia central es el modelo de Jean-Jacques Laffont y Jean Tirole (1986)[8].

Idea: el regulador se enfrenta a una disyuntiva fundamental entre *eficiencia* (incentivar el esfuerzo de reducción de costes) y *extracción de rentas* (minimizar las transferencias a la empresa), que resuelve ofreciendo un menú de contratos entre los que la empresa se autoselecciona.

Razonamiento: un monopolio natural conoce su eficiencia intrínseca, φ (su "tipo"), y elige un esfuerzo de reducción de costes, e, que le supone una desutilidad, $\psi(e)$, mientras que el regulador solo observa el coste realizado, que, con la producción normalizada a una unidad, es $C = \varphi - e$. El problema combina así selección adversa y riesgo moral. Una empresa eficiente puede hacerse pasar por ineficiente, imitando su coste con menos esfuerzo, y quedarse la diferencia, que constituye la *renta informacional*. Como cada euro transferido cuesta a la sociedad $1+\lambda$, donde $\lambda > 0$ es el coste sombra de los fondos públicos, el regulador quiere incentivar el esfuerzo dejando la menor renta posible.

El mecanismo óptimo es un menú de contratos lineales en el coste realizado, entre los que la empresa elige anunciando un tipo, $\hat{\varphi}$. Además del reembolso del coste, recibe la transferencia neta

$$t(\hat{\varphi}, C) = \underbrace{a(\hat{\varphi})}_{\text{pago fijo por la eficiencia revelada}} - \underbrace{b(\hat{\varphi}) \cdot [C - C^*(\hat{\varphi})]}_{\text{penalización por sobrecoste}}$$

donde $a(\hat{\varphi})$ es el pago fijo del contrato elegido, $C^*(\hat{\varphi})$ su coste objetivo y $b(\hat{\varphi}) \in [0,1]$ la fracción del sobrecoste que recae sobre la empresa, es decir, la potencia del contrato.

Cada contrato funciona como un sistema de premios y penalizaciones en torno al coste objetivo. Cabe distinguir dos casos:

1. *Cumplimiento del objetivo* ($C = C^*$): la empresa cobra el pago fijo, que retribuye el esfuerzo previsto e incluye la renta informacional del tipo revelado.

2. *Desviación del objetivo* ($C \neq C^*$): si el coste realizado supera el objetivo, la transferencia se reduce en la fracción b del sobrecoste y, si queda por debajo, aumenta en la fracción b del ahorro.

Con $b = 1$ el contrato es de precio fijo, porque la empresa soporta todo el sobrecoste y retiene todo el ahorro, y con $b = 0$, de coste más margen, porque la transferencia no depende del coste.

Ante este menú, cada empresa decide qué contrato elige y cuánto se esfuerza. Dentro de un contrato, la empresa reduce costes hasta que la desutilidad marginal del esfuerzo iguala la potencia del contrato:

$$\frac{d\psi}{de} = b(\hat{\varphi})$$

[8] La referencia original es Laffont y Tirole (1986). La síntesis general es su tratado *A Theory of Incentives in Procurement and Regulation* (1993).

El regulador fija, por tanto, el esfuerzo de cada tipo eligiendo la potencia de su contrato, que vale uno para el tipo más eficiente y decrece con φ. La elección entre contratos separa así a los tipos:

1. *Empresa eficiente* (φ bajo): elige el contrato de precio fijo (*fixed-price*, $b = 1$), asume todo el riesgo de costes y retiene todo el ahorro. Su esfuerzo es el del *first best* (no hay distorsión "en la cima"), pero, a cambio, la empresa eficiente obtiene la mayor renta informacional del menú.

2. *Empresa ineficiente* (φ alto): elige el contrato de menor potencia, el más próximo al de coste más margen (*cost-plus*), en el que el regulador absorbe una parte de los sobrecostes mayor que en cualquier otro contrato. Su esfuerzo se distorsiona a la baja respecto del *first best*, aunque no se anula, y su renta informacional es nula. El contrato de coste más margen puro ($b = 0$) es solo el caso límite, que se alcanzaría si la distorsión llevase el esfuerzo a cero.

3. *Tipos intermedios*: eligen contratos lineales situados entre los dos anteriores, con reparto parcial del riesgo, esfuerzo distorsionado a la baja y rentas informacionales decrecientes con φ.

La regulación por incentivos sustituye así el control de costes por la elección entre contratos, y el menú materializa la disyuntiva entre eficiencia y extracción de rentas, porque, para reducir la renta de los tipos eficientes, el regulador acepta menos esfuerzo de los ineficientes.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el modelo muestra que la regulación óptima bajo información asimétrica adopta la forma de un menú de contratos que equilibra incentivos y rentas, y que la asimetría informativa genera necesariamente una pérdida de bienestar respecto del *first best*, porque las rentas informacionales son el precio de los incentivos. Asimismo, el modelo ha influido en el diseño regulatorio práctico (telecomunicaciones, energía, transporte), donde los esquemas reales (del *cost-plus* al *price cap*) pueden leerse como puntos del menú teórico.

- *Limitaciones*: en entornos dinámicos aparece el *efecto trinquete*. El propio Tirole (premio Nobel en 2014, en buena parte por esta obra) insiste, además, en que no existen recetas universales, porque cada mercado exige un análisis específico y ninguno se regula por sí solo.

2.2.3. Efecto trinquete

El menú de contratos tiene un límite dinámico, que procede del propio modelo de Laffont-Tirole. Si la empresa anticipa que los ahorros de costes que consiga hoy serán confiscados en la próxima revisión regulatoria (el regulador aprende su tipo y le retira la renta), la empresa no tiene incentivos a reducir costes.

Este límite se conoce como **efecto trinquete** (*ratchet effect*), y su remedio exige un compromiso creíble del regulador a no usar la información revelada, lo que en la práctica se instrumenta con periodos regulatorios largos y reglas de revisión fijadas de antemano (*price cap* plurianual).

2.3. Regulación con varias empresas

Cuando existe más de una empresa, real o potencial, el regulador puede apoyarse en la competencia para obtener la información que le falta o para disciplinar al monopolista. Puede hacerlo mediante tres mecanismos.

2.3.1. Competencia por el mercado (Demsetz, 1968)

Origen: Harold Demsetz (1968) planteó que, cuando la subaditividad hace ineficiente la competencia en el mercado, la regulación tradicional puede sustituirse por la competencia por el mercado.

Idea: el derecho exclusivo a servir el mercado se subasta cada cierto tiempo (*franchise bidding*) y se adjudica al licitador que se comprometa a cobrar menos al consumidor. Si la licitación es competitiva, las ofertas convergen al precio igual al coste medio y se replica el resultado de una regulación de beneficio nulo sin necesidad de un regulador permanente.

Razonamiento: la competencia *ex ante* entre licitadores sustituye a la competencia *ex post* imposible, pues cada licitador sabe que cualquier oferta por encima del coste medio será batida por otro, de modo que las rentas del monopolio se disipan en la puja.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la competencia por el mercado convierte al regulador en organizador de subastas en lugar de fijador de precios, lo que ahorra información. Este mecanismo es el fundamento de las concesiones de servicios públicos.

- *Limitaciones*: su eficacia depende de que las relicitaciones sean genuinamente competitivas, lo que rara vez ocurre con activos específicos y contratos largos. Williamson (1976) señaló los límites del razonamiento de Demsetz. En particular, los contratos de concesión son inevitablemente incompletos (exigen renegociación ante contingencias, en la que el adjudicatario tiene ventaja), los activos específicos generan problemas de reversión y valoración al final de la concesión, y el incumbente acumula ventajas informativas que erosionan la competencia en las relicitaciones.

2.3.2. Competencia por comparación (Shleifer, 1985)

Origen: Andrei Shleifer (1985) propuso romper la dependencia informativa del regulador respecto de la empresa regulada usando como referencia a otras empresas.

Idea: en lugar de fijar el precio en función de los costes declarados por la propia empresa (lo que destruye los incentivos a reducirlos), el regulador lo fija en función de los costes de empresas comparables que operan en otros mercados (p. ej. distribuidoras regionales).

Razonamiento: como el precio regulado de cada empresa no depende de sus propios costes, cada una se beneficia íntegramente de sus reducciones de costes y el conjunto converge al comportamiento eficiente. La comparación reproduce así la disciplina de la competencia sin que las empresas compitan en el mismo mercado.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la competencia por comparación es hoy la técnica habitual en la regulación de las distribuidoras de electricidad, gas y agua, y una de las aplicaciones más directas de la teoría de la agencia con varios agentes (tema A13).

- *Limitaciones*: sus requisitos son la existencia de comparadores genuinamente similares (o la corrección econométrica de sus diferencias) y la ausencia de colusión entre las empresas comparadas, que podrían acordar inflar sus costes conjuntamente.

2.3.3. Mercados impugnables (Baumol, Panzar y Willig, 1982)

> La teoría de los mercados impugnables se desarrolla en el tema A15, apartado 2.2.2, y su implicación para el oligopolio, en el tema A19, apartado 3.3.

Origen: William Baumol, John Panzar y Robert Willig (*Contestable Markets and the Theory of Industry Structure*, 1982) formularon la teoría como generalización de la competencia perfecta a mercados con pocas empresas. Retomaron la idea de Demsetz (1968) de que la amenaza de competencia puede disciplinar a un monopolio, aunque aquí el mecanismo no es la licitación del derecho exclusivo, sino la competencia potencial de entrantes sin costes hundidos.

Idea: un mercado es *impugnable* si los entrantes potenciales pueden competir sin desventajas respecto de las empresas establecidas.

Supuestos: la impugnabilidad exige el cumplimiento de tres condiciones:

- *Acceso a la tecnología*: es el mismo para entrantes e instaladas.
- *Costes fijos*: pueden existir, siempre que no sean hundidos.
- *Reacción*: un tiempo de entrada inferior al tiempo de reacción del incumbente.

Razonamiento: si se cumplen las condiciones, son posibles las estrategias de entrada y salida rápidas (*hit and run*), en las que un entrante puede aprovechar cualquier precio por encima del coste medio y retirarse sin pérdida antes de que el incumbente reaccione. La mera amenaza de entrada disciplina así el comportamiento del monopolista, que se ve forzado a fijar precios de beneficio nulo ($p = \text{Cme}$) aunque el mercado esté ocupado por una sola empresa.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la implicación de política económica es central para la liberalización, porque lo relevante no es el número de empresas, sino las barreras a la entrada y a la salida, por lo que la política debe concentrarse en eliminarlas.
- *Limitaciones*: la estrategia de *hit and run* puede no ser creíble, y los costes hundidos son frecuentes en la realidad y difíciles de medir.

2.4. Regulación de los mercados de varias caras (Rochet y Tirole, 2003; Armstrong, 2006)

Origen: Jean-Charles Rochet y Jean Tirole (2003) formalizaron los mercados de dos caras a partir del análisis de las tarjetas de pago, con precios por transacción. Mark Armstrong (2006) los modelizó, en cambio, con cuotas de participación, en el marco estilizado que se sigue aquí.

Idea: los *mercados de dos (o varias) caras* son aquellos en los que una plataforma pone en contacto a dos grupos de usuarios entre los que existen *externalidades cruzadas de red*. Por ello, el valor de la plataforma para un lado depende del número de participantes del otro (tarjetas de pago entre comercios y titulares, sistemas operativos entre desarrolladores y usuarios, mercados en línea o *marketplaces* entre vendedores y compradores). En estos mercados la estructura de precios no es neutral, porque no solo importa el nivel agregado de precios, sino su reparto entre los dos lados.

Los mercados de varias caras como determinante de la estructura de los mercados se estudian en el tema A15, apartado 2.2.3.

Razonamiento: en el marco de Armstrong, una plataforma monopolista cobra a cada grupo $i = 1, 2$ una cuota de participación p_i y soporta un coste f_i por miembro, y cada miembro del grupo i obtiene la utilidad neta $u_i = \alpha_i n_j - p_i$, donde n_j es el número de participantes del otro grupo y $\alpha_i > 0$ la externalidad cruzada. La participación de cada grupo crece con su utilidad neta, $n_i = N_i(u_i)$. Al rebajar el precio de un grupo, la plataforma atrae nuevos miembros que elevan lo que puede cobrar al otro lado, y por ello fija

$$p_i = \underbrace{f_i - \alpha_j n_j}_{\text{coste neto de la externalidad}} + \frac{n_i}{dN_i/du_i}, \qquad i, j = 1, 2, \quad i \neq j$$

donde el último término es el margen de monopolio, menor cuanto más responde la participación del grupo a su utilidad neta. Si $\eta_i = p_i\, N_i'(u_i)/n_i$ es la elasticidad de la participación del grupo i respecto de su precio, la condición anterior, con $p_i > 0$, se escribe como un índice de Lerner:

$$\frac{p_i - f_i}{p_i} = \frac{1}{\eta_i} - \underbrace{\frac{\alpha_j n_j}{p_i}}_{\text{término de dos caras}}$$

Frente al monopolio de una sola cara, con $(p - \text{Cmg})/p = 1/|\varepsilon_{Xp}|$ (tema A17, apartado 1.3.1), aparece un término nuevo, que resta del margen el beneficio externo que cada nuevo miembro del grupo i genera en el otro lado, $\alpha_j n_j$, en proporción al precio. La plataforma aplica así a cada lado la regla de la elasticidad inversa, pero frente al coste neto de esa externalidad, $f_i - \alpha_j n_j$, y no frente a f_i.

Un grupo paga menos cuanto más elástica es su participación y cuanto más valora su presencia el otro grupo, y si $\alpha_j n_j$ supera el margen de monopolio su precio queda por debajo del coste, e incluso puede ser nulo o negativo si $\alpha_j n_j$ iguala o supera f_i más ese margen (*subsidio cruzado*). De ahí que el índice de Lerner convencional, medido frente a f_i, sea bajo o negativo en el lado subvencionado y elevado en el que paga. Ninguno de los dos índices convencionales mide por separado el poder de mercado de la plataforma, que se aprecia en el índice ajustado de cada lado, calculado frente al coste neto, y en la estructura de precios en su conjunto.

Extensiones:

- *Política de competencia*: precios por debajo del coste en un lado de la plataforma no son, por sí mismos, evidencia de predación, y el análisis del mercado relevante y del poder de mercado debe considerar ambos lados conjuntamente (apartado 3.1). Ello obliga a redefinir el mercado relevante y las pruebas de abuso en las plataformas digitales, que es el terreno actual de la regulación de la competencia.

- *Competencia entre plataformas*: cuando un grupo se afilia a una sola plataforma y el otro a varias (*multihoming*), cada plataforma controla el acceso a sus usuarios exclusivos. Por ello, compite intensamente por ellos y cobra precios altos al grupo que se afilia a varias (*cuellos de botella competitivos*, Armstrong, 2006).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el modelo explica con pocos supuestos por qué una plataforma fija precios nulos o inferiores al coste en un lado sin que ello revele predación, y ofrece el índice de Lerner ajustado con el que debe medirse el margen de cada lado.

- *Limitaciones*: supone una plataforma monopolista con cuotas fijas de participación. Con varias plataformas o con tarifas por transacción, los resultados dependen de la intensidad de las externalidades y de que los usuarios operen en una o en varias plataformas. Por ello, la teoría ofrece pocas reglas generales y su aplicación exige un análisis caso por caso.

2.5. Conclusiones

La regulación con información perfecta ofrece un criterio claro, la prioridad entre eficiencia asignativa y viabilidad financiera, para ordenar los instrumentos de regulación de precios, y las reglas que siguen aplicándose en las industrias de red (tarifas en dos partes, pico-valle, Ramsey-Boiteux, *price cap*). Pero supone que el regulador conoce los costes y la demanda de la empresa, cuando esta sabe más que él y tiene incentivos a no revelarlo.

Por ello, la teoría moderna cambia la pregunta, que ya no es cuál es el precio óptimo dado el coste, sino qué mecanismo induce a la empresa a revelar su coste y a reducirlo. Su respuesta, el menú de contratos y el uso de la competencia (por el mercado o por comparación) como fuente de información, ha guiado la regulación de las industrias de red desde los años noventa. La competencia potencial añade la disciplina de la amenaza de entrada. Estos mecanismos exigen, no obstante, compromiso creíble del regulador (efecto trinquete), comparadores o licitadores genuinamente independientes (colusión) y ausencia de costes hundidos (impugnabilidad). Los mercados de varias caras plantean, además, un problema distinto, el reparto de los precios entre los lados de la plataforma, que obliga a redefinir el mercado relevante y las pruebas de abuso y que la teoría todavía no ha cerrado.

3. Mercado relevante y aplicaciones prácticas

Los apartados anteriores explican por qué se regula y cuál es la regulación óptima. Este trata de su puesta en práctica, es decir, de cómo las autoridades de competencia y los reguladores sectoriales aplican esos principios. Su herramienta de partida es el **mercado relevante** (en los textos de la Unión, "mercado de referencia"), un concepto operativo del derecho de la competencia. La Comisión Europea lo emplea en el control de concentraciones y en los expedientes de acuerdos restrictivos y de abuso de posición dominante, con la metodología de su Comunicación de 1997, revisada en 2024. En las comunicaciones electrónicas, además, los reguladores nacionales, como la CNMC, analizan los mercados relevantes para identificar a los operadores con peso significativo en el mercado e imponerles obligaciones *ex ante* (Código Europeo de las Comunicaciones Electrónicas, Directiva (UE) 2018/1972). La aplicación sigue tres pasos, que ordenan este apartado:

1. *Medir*: determinar si existe poder de mercado y con qué intensidad (delimitación del mercado relevante e índices).

2. *Intervenir*: en las industrias de red, se ha optado por la liberalización y la reestructuración.

3. *Evaluar*: valorar la intervención y reconocer sus límites, sobre todo los que nacen del propio regulador.

3.1. Definición del mercado relevante

Antes de evaluar si existe poder de mercado es necesario delimitar el **mercado relevante**, es decir, el conjunto de productos y áreas geográficas que ejercen una presión competitiva efectiva sobre la empresa en cuestión. El mercado relevante es el punto de partida de todo expediente de competencia, y se determina en tres pasos.

1. *Dimensión de producto*: se identifica el conjunto de bienes que los consumidores consideran sustitutivos razonables del producto examinado, aproximado en la práctica mediante las elasticidades cruzadas de la demanda.

2. *Dimensión geográfica*: se identifica el área en la que las condiciones de competencia son suficientemente homogéneas, es decir, aquella a cuyos proveedores acudirían los consumidores ante una subida del precio.

3. *Test del monopolista hipotético* (test SSNIP, *small but significant non-transitory increase in price*): se pregunta si un monopolista hipotético que controlase el conjunto candidato de productos y territorios podría imponer de forma rentable un incremento de precios pequeño pero significativo y no transitorio. El incremento de referencia es típicamente del 5-10 %. Si los consumidores sustituirían el producto, o acudirían a otra zona, en medida suficiente para hacer la subida no rentable, el conjunto es demasiado estrecho, por lo que se añade el sustitutivo más próximo y se repite la pregunta. El mercado relevante es el conjunto más pequeño para el cual la subida sería rentable.

El test debe aplicarse a los precios competitivos, no a los vigentes, cuando estos pueden ser ya supracompetitivos (típicamente, en los casos de abuso de posición dominante). Aplicado a los precios de un monopolista, sobrestima el mercado, porque a precios ya monopolísticos la demanda está en su tramo elástico y todo parece sustitutivo (*falacia del celofán*, caso DuPont, 1956).

La Comunicación de la Comisión sobre la definición del mercado de referencia (1997, revisada en febrero de 2024) distingue tres fuentes de presión competitiva. La principal es la *sustituibilidad de la demanda*, la que mide el test. La *sustituibilidad de la oferta* se tiene en cuenta cuando otros productores pueden pasar a fabricar el producto a corto plazo y sin costes ni riesgos significativos, como ocurre con el papel de distintas calidades, que todos los fabricantes producen con las mismas máquinas. La *competencia potencial*, en cambio, no entra en la definición del mercado y se valora después, al analizar el poder de mercado.

La revisión de 2024 mantiene el test SSNIP como herramienta útil pero no obligatoria y admite su variante de reducción de calidad (SSNDQ, *small but significant non-transitory decrease in quality*) cuando los productos tienen precio cero, como muchos servicios digitales. También precisa cómo delimitar los mercados de las plataformas de varias caras y de los ecosistemas digitales.

3.2. Medición empírica del poder de mercado

Delimitado el mercado, los indicadores van desde el más directo, el índice de Lerner (apartado 1.1), que mide la conducta pero exige conocer el coste marginal, hasta los más estructurales, como la cuota, que mide la posición de cada empresa, y los índices de concentración y de barreras, que miden la estructura del conjunto y su sostenibilidad.

3.2.1. Índices de posición y de concentración

La **cuota de mercado** ($s_i = x_i/X$) es el índice de posición básico. Aproxima el poder de mercado individual y es el umbral operativo habitual de las presunciones legales (posición de dominio). No obstante, su lectura exige cautela, pues una cuota alta puede reflejar eficiencia superior y no poder de mercado (la crítica de Chicago), y su valor informativo depende críticamente de la delimitación previa del mercado relevante.

Los **índices de concentración** agregan la estructura del mercado y pueden formularse de dos formas:

Ratios de concentración: miden la cuota conjunta de las k mayores empresas, $\mathrm{CR}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i$. Este indicador es el más simple, pero ignora la distribución de cuotas tanto entre las k mayores como entre las restantes.

Índice de Herfindahl-Hirschman: suma los cuadrados de las cuotas de todas las empresas, de modo que cada una queda ponderada por su propia cuota.

$$\mathrm{HHI} = \sum_{i=1}^{n} (100\, s_i)^2 \in \left[\frac{10\,000}{n},\ 10\,000\right], \qquad s_i \in [0,1]$$

Con las cuotas expresadas en porcentaje, el índice varía entre 0 (atomización) y 10.000 (monopolio). Orientativamente, las *Merger Guidelines* estadounidenses de 2010 distinguían tres tramos:

- *Concentración baja*: $\mathrm{HHI} < 1500$.
- *Concentración moderada*: $1500 \leq \mathrm{HHI} \leq 2500$.
- *Concentración alta*: $\mathrm{HHI} > 2500$.

Además, la variación del índice provocada por una fusión (ΔHHI) es, junto con el nivel, uno de los criterios principales de las autoridades de competencia para decidir si una operación de concentración requiere un examen en profundidad. Lo aplican la Comisión Europea y, en EE. UU., el Departamento de Justicia (DOJ) y la Comisión Federal de Comercio (FTC). Las *Merger Guidelines* de 2023, que sustituyeron a las de 2010 y que la FTC y el DOJ confirmaron en vigor en 2025, endurecen los umbrales. En particular, califican de muy concentrado todo mercado con HHI > 1800 y presumen que reduce sustancialmente la competencia la fusión que crea o refuerza un mercado así con un ΔHHI > 100.

3.2.2. Índices de barreras a la entrada

Los índices anteriores describen la estructura actual del mercado, pero no dicen si esa estructura es sostenible. Una concentración alta es preocupante si la entrada es difícil e irrelevante si es fácil. De ahí que la existencia y la altura de las barreras a la entrada puedan ayudar a completar el análisis anterior.

Los índices de barreras a la entrada, que se utilizan junto con los índices de concentración para calificar un mercado como impugnable o no, se aproximan empíricamente con tres tipos de indicador:

- *Escala mínima eficiente relativa*: la cuota de mercado que necesita un entrante para producir a coste medio mínimo, EME/X. Cuanto mayor es, más difícil es entrar sin desplomar los precios, pues el entrante debe capturar una parte sustancial del mercado para ser viable. Esta cuota es la medida tradicional de Bain de las barreras tecnológicas.

- *Intensidad de los costes hundidos*: el gasto en publicidad, I+D y capital específico como proporción de las ventas. Mide lo que un entrante perdería si fracasa y, por tanto, el riesgo que la entrada supone. Esta intensidad es el indicador que distingue, en la lógica de los mercados impugnables, las barreras que disuaden la entrada de las que no.

- *Tasas de entrada y salida*: el número de empresas que entran y salen de la industria cada año en relación con las existentes. Estas tasas son la contrastación directa de si las barreras operan. Así, tasas altas indican un mercado impugnable aunque esté concentrado, mientras que tasas bajas y estables indican un mercado protegido o uno impugnable en el que basta la amenaza de entrada.

3.3. La liberalización de las industrias de red

Diagnosticado el poder de mercado, la segunda pregunta es cómo intervenir. En las últimas décadas la respuesta ha sido, sobre todo, la reestructuración de las industrias de red, que consiste en introducir competencia donde es posible y concentrar la regulación donde no lo es.

3.3.1. Industrias de red y cuestiones transversales

De la teoría expuesta se ha derivado una transformación, que no eliminación, de los modelos de regulación, particularmente intensa en las industrias de red. En ellas, una misma empresa integrada verticalmente reúne la red, que tiene rasgos de monopolio natural y constituye el componente no competitivo, y la prestación del servicio, una actividad potencialmente competitiva. Así ocurre en el ferrocarril, la electricidad, el gas, el agua o las telecomunicaciones. La dificultad está en que al dueño de la red le interesa frenar también la competencia en el servicio, p. ej. negando a sus rivales el acceso o encareciéndolo.

La estrategia general, por tanto, pasa por regular el componente no competitivo, con el fin de conservar la eficiencia productiva del monopolio natural, y por asegurar la libertad de entrada y salida en el componente competitivo, con el fin de alcanzar la eficiencia asignativa. En la Unión Europea, esta estrategia se ha instrumentado mediante sucesivos paquetes de directivas de liberalización (ferroviarios, energéticos, de telecomunicaciones y postales). Estos paquetes imponen, sobre todo en energía y ferrocarril, la separación entre la gestión de la red y la prestación del servicio y garantizan el acceso de terceros a las redes en condiciones transparentes y no discriminatorias.

Todo proceso de liberalización debe hacer frente a cuatro cuestiones transversales:

- *Costes varados* (*stranded costs*) de las empresas establecidas: las inversiones específicas de largo periodo de amortización que eran rentables bajo la protección regulatoria pero dejan de serlo en competencia.

- *Costes de transición a la competencia* (CTC): las compensaciones que el regulador reconoce al antiguo monopolista por esos costes varados, que es imprescindible vigilar para que no encubran ayudas públicas.

- *Reequilibrio tarifario*: la eliminación de los subsidios cruzados entre actividades liberalizadas y no liberalizadas, que podrían financiar precios predatorios.

- *Garantía del servicio universal*: la prestación de un conjunto mínimo de servicios a todos los usuarios a precio asequible, cuyo coste debe repartirse entre los operadores sin distorsionar la competencia.

3.3.2. Fórmulas de reestructuración

Las formas concretas de reestructuración se ordenan según el grado en que separan el componente no competitivo del competitivo y según quién controla el primero.

Licitación de la titularidad del componente no competitivo: el regulador organiza un proceso de licitación *ex ante* (concurso o subasta) por el derecho a explotar la red (Demsetz, 1968).

- *Ámbito*: el monopolio natural no sostenible (apartado 1.1), cuando el servicio puede especificarse en un contrato de concesión.

- *Ejemplos*: las concesiones de servicios públicos, como el abastecimiento de agua o las autopistas de peaje.

- *Conclusiones*:

  - *Aspectos positivos*: la disipación de las rentas del monopolio en la puja, la selección de la empresa más eficiente y la garantía de objetividad del procedimiento. Las rentas van a los consumidores si se licita por el menor precio, o al sector público si se licita por el mayor canon.

  - *Limitaciones*: el riesgo de colusión entre los licitadores y los límites que Williamson (1976) señaló a la competencia por el mercado (apartado 2.3.1).

Regulación del acceso al componente no competitivo: aunque el monopolista conserve la red, quienes compiten con él en la prestación del servicio pueden utilizarla en las condiciones que fija el regulador, sobre todo en materia de precio.

- *Ámbito*: el monopolio natural sostenible, cuando un operador integrado conserva la red y presta también el servicio.

- *Ejemplo*: la telefonía fija en la UE, donde el operador histórico debe dar acceso a su bucle local a los operadores alternativos a cambio de un precio regulado (desagregación del bucle local)[9].

- *Conclusiones*:

  - *Aspectos positivos*: mantiene la eficiencia productiva del segmento no competitivo y, si el precio de acceso remunera adecuadamente la red, no desanima la I+D de su dueño.

  - *Limitaciones*: la probabilidad de que el monopolista discrimine entre las empresas que utilizan su red, favoreciendo a su propia filial de servicios.

Separación de la propiedad (desintegración vertical): por decisión del regulador, la red y el servicio pasan a manos de propietarios distintos.

- *Ámbito*: el monopolio natural de la red con una actividad competitiva aguas abajo, cuando las economías de alcance entre ambas son pequeñas.

- *Ejemplos*: en el ferrocarril, la separación entre el gestor de la infraestructura, propietario de las vías, y las empresas ferroviarias, que pagan un canon por su uso, impulsada por los paquetes ferroviarios de la UE. En la electricidad, la separación patrimonial (*ownership unbundling*) del gestor de la red de transporte respecto de la generación y la comercialización, una de las opciones que prevé el tercer paquete energético de la UE (2009).

- *Conclusiones*:

  - *Aspectos positivos*: elimina de raíz la discriminación en el acceso a la red.

  - *Limitaciones*: se pierden las economías de alcance que pudiera aportar la integración vertical. Además, la empresa de la red, ya independiente, puede querer volver a integrarse aguas abajo, con lo que el problema reaparecería.

Propiedad compartida del componente no competitivo: la red pertenece en común a las empresas que prestan el servicio, con el visto bueno del regulador.

- *Ámbito*: redes que utilizan pocos operadores, capaces de gestionarlas en común.

- *Ejemplos*: las redes de oleoductos y almacenamiento de hidrocarburos participadas por los propios operadores petroleros que las utilizan, y los sistemas informatizados de reservas participados por las propias aerolíneas (p. ej. Amadeus en su origen).

- *Conclusiones*:

[9] El regulador debe resolver aquí una disyuntiva delicada. Un canon alto actúa como barrera a la entrada y refuerza el poder de mercado del propietario de la red, mientras que un canon bajo genera una entrada excesiva e ineficiente y desincentiva la inversión en la red. La regla de referencia es la del componente eficiente (*efficient component pricing rule*, ECPR; Willig, 1979; Baumol, 1983), según la cual el precio de acceso, a, iguala el coste directo de proporcionarlo, c_a, más el coste de oportunidad del propietario de la red, es decir, el margen que deja de ganar por cada unidad que vende el entrante, de modo que $a = c_a + (p - c)$, donde p es el precio final y c el coste marginal total del propietario. Con ella solo entran los competidores más eficientes que él en el servicio final, pero exige un producto homogéneo y un precio final ya regulado, pues en otro caso preserva el margen de monopolio. Por eso los reguladores europeos suelen fijar el acceso según los costes incrementales a largo plazo (LRIC, por *long-run incremental cost*).

- *Aspectos positivos*: al ser todas las prestadoras dueñas de la red, deja de haber incentivo para discriminar entre ellas, y la cercanía entre red y servicio hace que la primera se adapte enseguida a lo que necesita el segundo.

- *Limitaciones*: las copropietarias pueden pactar trabas para que no entren nuevas empresas en el servicio o coludir en precios, y si los socios son muchos la gestión de la red se complica.

Separación operativa: el regulador disocia propiedad y control del componente no competitivo. El monopolista inicial sigue siendo su dueño, pero la gestión pasa a una entidad independiente[10].

▪ *Ámbito*: casos en que se quiere neutralizar la gestión de la red sin expropiar la propiedad del incumbente.

▪ *Ejemplo*: Openreach, en el Reino Unido. La red de acceso de British Telecom (BT) pasó a gestión funcionalmente separada en 2006 (y jurídicamente separada tras el acuerdo de 2017, efectivo en octubre de 2018), con la obligación de tratar a todos los operadores, incluida la propia BT, en igualdad de condiciones.

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: resuelve las conductas anticompetitivas y los subsidios cruzados sin expropiar la propiedad.

- *Limitaciones*: la entidad independiente puede ser capturada, y quien no controla la red tiene poco interés en invertir en ella.

Separación en partes recíprocas: el regulador divide el componente no competitivo en fragmentos de menor tamaño con acceso recíproco entre ellos. Cada operadora tiene incentivos para abrir su red a los clientes de las demás, porque, de lo contrario, estas le negarían el acceso a las suyas.

▪ *Ámbito*: esta separación encaja cuando el poder de mercado del componente procede de economías de red (cada consumidor gana utilidad cuantos más usuarios hay conectados), y no de economías de escala. En el monopolio natural clásico la subaditividad de costes aporta eficiencia productiva y desaconseja trocearlo. Con economías de red, en cambio, falta esa contrapartida, pues la única ineficiencia es la asignativa, y por eso conviene que la competencia llegue también al segmento "no competitivo".

▪ *Ejemplo*: la telefonía móvil, con interconexión obligatoria y recíproca entre operadoras.

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: la interconexión preserva las externalidades de red para todos los consumidores mientras disuelve el poder de mercado, y facilita la competencia por comparación entre operadoras comparables.

- *Limitaciones*: sirve únicamente donde el acceso funciona en los dos sentidos.

Separación en partes no recíprocas: el regulador trocea también el segmento no competitivo, aunque falte la reciprocidad que sostenía la fórmula anterior.

[10] La fórmula admite grados, según quién gobierne la entidad. Cuando manda el regulador, funciona casi como una regulación del acceso. Con representantes de las empresas en su gobierno, se parece a la propiedad compartida, y con plena independencia, a la separación de la propiedad.

- *Ámbito*: casos en que el consumidor final compra directamente al componente no competitivo, que ocupa en la cadena vertical una posición posterior a la del competitivo.

- *Ejemplos*: la electricidad y el gas, cuyas distribuidoras (componente no competitivo) compraban la energía a los productores (componente competitivo) por cuenta de los consumidores.

- *Conclusiones*:

  - *Aspectos positivos*: las distribuidoras pierden poder de mercado, porque su actividad queda separada de la comercialización y el consumidor elige libremente a quién compra.

  - *Limitaciones*: exige que el consumidor elija comercializador, con los costes de información y de cambio que ello supone, y deja intacto el poder de mercado de la distribución sobre su propia actividad, que sigue requiriendo regulación de precios.

La tabla A20.1 resume las siete fórmulas según quién controla el componente no competitivo, el ámbito en que resultan apropiadas, un ejemplo y su riesgo principal.

Tabla A20.1: Cuadro comparativo de las fórmulas de reestructuración de las industrias de red.

Fórmula	Control de la red	Ámbito	Ejemplo	Riesgo principal
Licitación de la titularidad	Adjudicatario, por concesión temporal	Monopolio natural no sostenible	Concesiones de servicios	Colusión, contratos incompletos y ventaja del incumbente
Regulación del acceso	Monopolista integrado, con acceso regulado	Monopolio natural sostenible	Bucle local de telefonía fija (UE)	Discriminación a favor de la filial propia
Separación de la propiedad	Empresa independiente	Monopolio natural con actividad competitiva aguas abajo	Ferrocarril y transporte eléctrico (UE)	Pérdida de economías de alcance y reintegración
Propiedad compartida	Las prestadoras, conjuntamente	Red usada por pocos operadores	Redes logísticas de hidrocarburos y sistemas de reservas de las aerolíneas	Cierre a entrantes, colusión y gobernanza
Separación operativa	Entidad independiente, con propiedad del incumbente	Cuando no cabe expropiar la propiedad	Openreach (BT)	Captura de la entidad y subinversión
Separación en partes recíprocas	Varias redes interconectadas	Economías de red, acceso en dos direcciones	Telefonía móvil	Solo con acceso bidireccional
Separación en partes no recíprocas	Varias redes sin reciprocidad	Componente no competitivo aguas abajo	Distribución eléctrica y de gas	Poder subsistente de la distribución y costes de cambio

3.4. Evaluación y límites de la regulación

La tercera pregunta es si la intervención merece la pena y qué puede fallar en ella. La primera parte se responde con una técnica, el análisis coste-beneficio, y la segunda, con la teoría de los límites de la regulación, aquí la captura del regulador. El límite que nace de los incentivos de la empresa regulada, el efecto trinquete, se estudia con el modelo de Laffont y Tirole (apartado 2.2.3).

> Los demás fallos del sector público (la maximización del presupuesto de Niskanen, el ciclo político de Nordhaus, la aversión al riesgo burocrática y la ilusión fiscal) y los mecanismos que los corrigen se desarrollan en el tema A23, apartados 3.2 a 3.4.

3.4.1. El análisis coste-beneficio

El **análisis coste-beneficio** (ACB) es una técnica que asigna valores monetarios a las corrientes de costes y beneficios sociales de un proyecto de inversión, generalmente público, con tres finalidades:

- *Deseabilidad social*: determinar si los beneficios sociales de un proyecto superan a sus costes.
- *Criterio de elección*: elegir la mejor alternativa entre varias.
- *Evaluación de actuaciones pasadas*: valorar *ex post* los proyectos ya ejecutados.

Su germen conceptual se debe a Jules Dupuit (1844), que introdujo la noción de excedente del consumidor para valorar las obras públicas, y su primera adopción formal, al Cuerpo de Ingenieros del Ejército de los EE. UU. a raíz de la Flood Control Act (1936).

Sus etapas son la definición de los objetivos, la identificación de las alternativas y la enumeración y cuantificación de las variables. La cuantificación plantea tres cuestiones técnicas centrales:

- *Valoración social*: el uso de precios sombra para valorar costes y beneficios cuando los precios de mercado están distorsionados o no existen.
- *Tasa social de descuento*: su elección, que determina el peso de las generaciones futuras, y la valoración del riesgo.
- *Efectos redistributivos*: su análisis y la presentación de los resultados.

A pesar de sus limitaciones (la dificultad de monetizar los intangibles, la sensibilidad de los resultados a la tasa de descuento, el riesgo de manipulación estratégica de las estimaciones…), el análisis coste-beneficio sigue siendo un instrumento poderoso. De hecho, fue de aplicación obligada en la evaluación de los grandes proyectos cofinanciados por los fondos estructurales hasta el periodo 2014-2020 y es todavía la referencia metodológica de la Comisión Europea y del Banco Europeo de Inversiones (BEI) para evaluar inversiones.

3.4.2. La captura del regulador: la teoría económica de la regulación

Origen: las teorías sobre los grupos de presión plantean que los grupos organizados (la patronal, los sindicatos, las industrias reguladas) interfieren en las decisiones políticas en favor de sus intereses privados. Olson (1965) mostró, además, por qué los grupos pequeños y concentrados (los productores) se organizan más eficazmente que los grandes y difusos (los consumidores), porque los beneficios de la presión están concentrados y sus costes, dispersos[11].

Idea: sobre esta base, George Stigler (*The Theory of Economic Regulation*, 1971) formuló la teoría económica o positiva de la regulación. Según esta teoría, la regulación no se explica por el interés público, sino que "es adquirida por la industria y diseñada y aplicada fundamentalmente en su beneficio".

Razonamiento: las industrias demandan regulación (barreras a la entrada, fijación de precios, subvenciones) y los políticos la ofrecen a cambio de apoyo electoral y financiero. De esta literatura se derivan dos conceptos centrales. El primero es la búsqueda de rentas (*rent seeking*), es decir, la dedicación de recursos a la obtención de rentas mediante la explotación del entorno político, en lugar de a la creación de valor mediante la actividad productiva (*profit seeking*)[12]. La búsqueda de rentas genera una doble ineficiencia, la de los recursos consumidos en la propia actividad de presión (que son un despilfarro social, pues solo redistribuyen rentas) y la de las decisiones públicas favorables a intereses particulares que resultan de ella.

El segundo concepto es la *captura del regulador* (Stigler, 1971), es decir, el proceso por el cual la agencia reguladora acaba sirviendo a los intereses de la industria que debía supervisar. Ello puede deberse a la presión directa, a la dependencia informativa respecto de las empresas reguladas, a las perspectivas de empleo futuro en el sector (las llamadas *puertas giratorias*) o a formas más sutiles de captura cultural. La captura cultural es el sesgo inconsciente derivado de la relación continuada entre regulador y regulado[13]. En la misma línea, el *triángulo de hierro* describe cómo las decisiones políticas quedan determinadas por la relación estable entre políticos, burócratas y grupos de interés.

Extensiones: Peltzman (1976) generalizó el modelo de Stigler mostrando que el regulador reparte las rentas entre los grupos para maximizar su apoyo político, sin entregarse por completo a ninguno. Becker (1983) añadió que la competencia entre grupos de presión limita las ineficiencias, porque las políticas más ineficientes generan más oposición, por lo que tienden a sobrevivir las transferencias menos distorsionantes.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la teoría económica de la regulación desplaza el análisis del interés público al de los intereses organizados. La regulación se explica como un bien que se ofrece y se demanda, lo que fundamenta la desregulación y el diseño institucional (independencia, transparencia) para limitar la captura.

- *Limitaciones*: puede explicar *a posteriori* casi cualquier regulación como fruto de la presión de algún grupo, lo que dificulta su contraste, y le cuesta explicar las desregulaciones que perjudicaron a industrias bien organizadas. Además, describe la captura como un intercambio sin modelizar la asimetría de información entre regulador y regulado, que es la base del enfoque de agencia del apartado 2.2.

[11] Para Olson (1965), la presión (*lobby*) es un bien público para quienes comparten el interés defendido y, por tanto, incentiva el *free riding*, más fácil de contener en los grupos pequeños.

[12] Tullock (1967) identificó los elementos del concepto, si bien el término lo acuñó Anne Krueger (1974) en *The Political Economy of the Rent-Seeking Society*.

[13] La captura se manifiesta, por ejemplo, en normas que debilitan los controles, procedimientos sancionadores deliberadamente complicados o cláusulas favorables en los contratos públicos.

Conclusiones

El poder de mercado nace de barreras a la entrada naturales, como la subaditividad de costes, o artificiales, estratégicas y legales, y su regulación se justifica por motivos de eficiencia y de equidad. La teoría tradicional ordena los instrumentos de regulación de precios según la prioridad entre eficiencia asignativa y viabilidad financiera, del *first best* con subvención a los límites de precios. La teoría moderna parte, en cambio, de que la empresa sabe más que el regulador. Por ello, el menú de contratos de Laffont y Tirole intercambia eficiencia por rentas informacionales. La competencia por el mercado, por comparación o potencial suple la información que falta y, en los mercados de varias caras, el margen de cada lado se mide frente al coste neto de la externalidad que genera. En la práctica, el poder se mide en el mercado relevante, la red se regula y el servicio se liberaliza, y el efecto trinquete y la captura del regulador limitan la intervención.

La regulación se apoya en el análisis del monopolio (tema A17) y en la organización industrial, de la que toma el modelo de Laffont y Tirole y los mercados impugnables (tema A15). Su fundamento normativo son los teoremas del bienestar y la teoría del *second best*, que explican por qué el precio igual al coste marginal no siempre es viable (tema A22), y la asimetría de información entre regulador y empresa es un caso de la teoría de la agencia (tema A13). Por último, la disuasión estratégica de la entrada procede de la teoría del oligopolio (tema A19), y la medición del poder de mercado es también el punto de partida de la política de competencia de la Unión (tema B39).

Los debates actuales se centran en las plataformas digitales. En su informe para la Comisión Europea, Crémer, de Montjoye y Schweitzer (2019) sostienen que los efectos de red y el control de los datos favorecen la concentración y piden adaptar la definición del mercado relevante y las pruebas de abuso. El Reglamento de Mercados Digitales (2022) respondió con obligaciones *ex ante* para los guardianes de acceso, más propias de la regulación sectorial que de la defensa de la competencia. En las industrias de red, la transición energética exige grandes inversiones en redes y reabre la tensión, no resuelta por la regulación por incentivos, entre la presión sobre los costes y la inversión y la calidad del servicio (Joskow, 2008).

A21. Equilibrio general

La teoría del equilibrio general.

Introducción

Introducción común. Los temas A15 a A21 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A15**. Ordena los mercados en cuatro estructuras según el poder de mercado (competencia perfecta, competencia monopolística, oligopolio y monopolio) y resume la evolución de su análisis, de Cournot y Marshall a la nueva organización industrial y la teoría de la regulación.

El enfoque de **equilibrio parcial** o marshalliano estudia cada mercado por separado y hace abstracción del resto de la economía, pero los mercados están interrelacionados. Frente a ese enfoque, la **teoría del equilibrio general** incorpora la interdependencia entre los agentes y considera las relaciones de complementariedad y sustitución entre bienes.

Léon Walras (1874) planteó por primera vez la economía como un sistema de ecuaciones simultáneas, una por mercado, cuyos precios se determinan a la vez. La pregunta de si ese sistema tiene solución no se resolvió hasta que Arrow y Debreu (1954) demostraron la existencia del equilibrio con instrumentos de topología, y la de si es único y estable quedó en buena medida abierta tras los resultados de Sonnenschein, Mantel y Debreu, según los cuales la teoría impone pocas restricciones a la forma de la demanda agregada. Arrow (1972) y Debreu (1983) recibieron el Premio Nobel por estos trabajos.

El equilibrio general es también el marco en el que se demuestran los **teoremas fundamentales del bienestar**. El primero establece que todo equilibrio competitivo es eficiente en el sentido de Pareto, y el segundo, que cualquier asignación eficiente puede alcanzarse como equilibrio competitivo con una redistribución adecuada de las dotaciones iniciales (tema A22). La principal limitación de la teoría es, sin embargo, el subastador walrasiano, que ajusta los precios hasta vaciar todos los mercados a la vez y no describe ningún mecanismo real. La teoría ha estudiado por ello otros procesos de ajuste, como el recontrato de Edgeworth, cuyo **núcleo** se reduce al equilibrio competitivo cuando el número de agentes crece, y ha incorporado el dinero (Patinkin, 1956) y la incertidumbre.

En la práctica, estos modelos permiten cuantificar el impacto de medidas de política económica, como el Tratado de Libre Comercio de América del Norte (TLCAN) o la Asociación Transatlántica de Comercio e Inversión (TTIP), y constituyen el vínculo entre la microeconomía y la macroeconomía.

El objeto del tema es comprender los aspectos fundamentales de la teoría del equilibrio general:

- *Modelo walrasiano*: la competencia perfecta y el concepto de equilibrio general competitivo (EGC).

- *Análisis del equilibrio*: sus propiedades positivas (existencia, unicidad y estabilidad) y normativas (optimalidad de Pareto y teoremas fundamentales del bienestar).

- *Extensiones y aplicaciones*: procesos de ajuste distintos del subastador (Marshall, Edgeworth y el núcleo), introducción del dinero (Patinkin), incertidumbre (Arrow-Debreu) y modelos de equilibrio general computable.

1. El modelo walrasiano de competencia perfecta

Origen: la teoría del equilibrio general nace con Léon Walras (*Elementos de economía política pura*, 1874), que la construyó sobre la competencia perfecta porque buscaba justificarla como mecanismo de asignación óptimo[1].

Idea: los mercados de bienes y de factores se analizan conjuntamente, y un vector de precios que cada agente toma como dado coordina las decisiones de consumidores y empresas hasta vaciar todos los mercados a la vez.

1.1. Supuestos

Metodología: se adopta el enfoque de equilibrio general. A diferencia del modelo de equilibrio parcial (un mercado), existen n mercados interrelacionados, de bienes y de factores, que se analizan simultáneamente.

Entorno: no hay fallos de mercado, es decir, no existen externalidades, bienes públicos, poder de mercado, costes de transacción ni rigideces, pues existe plena flexibilidad de precios, salarios y tipos de interés, y la información es perfecta. Las dotaciones iniciales de bienes y de factores pertenecen a los consumidores, que son también los propietarios de las empresas.

Agentes: existen consumidores racionales, que maximizan su utilidad, y empresas gestionadas por sus propietarios, que maximizan el beneficio. Ambos tipos son numerosos, de modo que el mercado está atomizado y todos actúan como precio-aceptantes ($\partial p/\partial x = 0$). El sector público no participa.

Tecnología: cada empresa produce un único bien, $x = f(\mathbf{z})$, homogéneo y perfectamente divisible, con rendimientos estrictamente decrecientes[2], y todas las empresas de un mismo mercado comparten la misma tecnología. En conjunción con los supuestos sobre el entorno, ello garantiza la ley del precio único en cada mercado.

Mercado de factores: es también perfecto, con agentes precio-aceptantes ($\partial p_l^z/\partial z_l = 0$). La oferta de factores procede de las dotaciones de los consumidores. Los precios de los factores, $\mathbf{p}^z$, aunque cada agente los toma como dados, se determinan endógenamente en el equilibrio.

1.2. Modelo descentralizado con producción

El sistema walrasiano admite varias presentaciones, como el modelo de intercambio puro (sin producción), de las que aquí se sigue la del modelo descentralizado con producción.

1.2.1. Demanda: comportamiento de los consumidores

Planteamiento: los consumidores tienen preferencias racionales, monótonas, continuas y estrictamente convexas. La utilidad es estrictamente cuasicóncava, creciente, continua, ordinal e independiente entre consumidores (no hay externalidades en el consumo).

La renta monetaria de cada individuo, M_0^h, es endógena, porque depende de los precios a los que se valoran sus dotaciones, y se compone de tres tipos:

[1] Walras no era, sin embargo, partidario de un *laissez faire* estricto, pues defendía la intervención pública en numerosos ámbitos (por ejemplo, la propiedad estatal de la tierra).

[2] Los pagos de los factores no agotan el producto y los beneficios son positivos, pero se preserva la concavidad de la frontera de posibilidades de producción. Con rendimientos crecientes, en cambio, podría ser convexa.

- *Renta dotacional de bienes*: $\sum_i p_i x_{i0}^h$ (valor de mercado de las dotaciones iniciales de bienes).

- *Renta dotacional de factores*: $\sum_l p_l^z z_{l0}^h$ (valor de las dotaciones de factores).

- *Renta de las participaciones*: $\sum_f \alpha_f^h \pi^{f*}$ (participaciones en los beneficios máximos de las empresas, que se obtienen a continuación, con $\sum_h \alpha_f^h = 1$).

Formalmente, el consumidor h resuelve:

$$\max_{\mathbf{x}^h} \; u^h(\mathbf{x}^h) \quad \text{s.a.:} \; \sum_i p_i x_i^h \leq \underbrace{\sum_i p_i x_{i0}^h + \sum_l p_l^z z_{l0}^h + \sum_f \alpha_f^h \pi^{f*}}_{M_0^h}$$

donde $\mathbf{x}^h = (x_1^h, \dots, x_n^h)$ es la cesta de consumo del consumidor h (variables de decisión), $u^h(\cdot)$ su función de utilidad, p_i el precio del bien i, x_{i0}^h y z_{l0}^h sus dotaciones iniciales del bien i y del factor l, p_l^z el precio del factor l, α_f^h su participación en el beneficio π^{f*} de la empresa f y M_0^h su renta monetaria endógena.

CPO: con solución interior y la restricción agotada, derivando el lagrangiano respecto a cada bien y eliminando el multiplicador:

$$\frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}, \qquad \forall\, i \neq j, \quad \forall\, h = 1, \dots, H$$

El cociente $(\partial u/\partial x_i)/(\partial u/\partial x_j)$ mide la relación marginal de sustitución (RMS_{ji}^h) entre i y j, es decir, cuántas unidades del bien j cedería el consumidor h, según su propia valoración (subjetiva), para obtener una unidad más de i sin que su utilidad varíe. Depende de las preferencias de cada consumidor, de modo que, en general, varía de un consumidor a otro y de una cesta a otra.

El cociente p_i/p_j es el precio relativo, es decir, la tasa a la que el mercado permite intercambiar ambos bienes. A diferencia de la RMS, es una tasa objetiva y común a todos los consumidores, que la toman como dada porque son precio-aceptantes.

Para cualquier consumidor considerado en el modelo, en el óptimo ambas tasas se igualan, porque, si su RMS fuese superior al precio relativo, ese consumidor podría aumentar su utilidad comprando más de i y menos de j, y viceversa. Por tanto, cualquier desviación respecto de esta igualdad implica que existe una reasignación del gasto que mejora la utilidad del consumidor.

CSO: la cuasiconcavidad estricta de la utilidad y la linealidad de la restricción presupuestaria hacen suficiente la CPO y única la demanda de cada consumidor.

Solución: cada consumidor obtiene una función de demanda $x_i^h(p, M_0^h)$ homogénea de grado cero en precios y renta. Si todos los precios y la renta se multiplican por una misma constante positiva, las cantidades demandadas no varían (ausencia de ilusión monetaria).

De la agregación horizontal de las funciones de demanda individuales se obtiene la demanda de mercado $D_i(p) = \sum_h x_i^h(p, M_0^h)$. Como la renta de cada consumidor es el valor de sus dotaciones y participaciones a los precios vigentes, la demanda de mercado depende, en último término, solo del vector de precios y es homogénea de grado cero en él.

Equilibrio: en un contexto de equilibrio general, la optimización individual de cada consumidor, dado un vector de precios de mercado común, conduce a una condición de equilibrio agregada. Las decisiones que cada consumidor toma por separado quedan así ligadas entre sí a través de los precios.

El consumo estará en equilibrio cuando todos los consumidores estén maximizando simultáneamente su utilidad frente al mismo vector de precios. Puesto que cada consumidor iguala su RMS al precio relativo, y el precio relativo es el mismo para todos, se obtiene, con dos consumidores A y B:

$$\text{RMS}_{ji}^{A} = \frac{u_i'^{A}}{u_j'^{A}} = \frac{p_i}{p_j} = \frac{u_i'^{B}}{u_j'^{B}} = \text{RMS}_{ji}^{B}$$

Esta condición se generaliza a H consumidores, de modo que $\text{RMS}_{ji}^{h} = p_i/p_j$ para todo $h = 1, \ldots, H$. El vector de precios actúa así como mecanismo de coordinación, pues el precio relativo obliga a todos los consumidores a ajustar sus valoraciones subjetivas a una misma tasa objetiva de intercambio. Sin precios comunes, no habría razón para que las RMS se igualaran.

Desarrollo gráfico: con dos bienes y dos consumidores, el equilibrio en el consumo se representa en el plano bien x-bien y de la caja de Edgeworth-Bowley en el espacio de bienes (figura A21.1):

1. *Caja*: sus dimensiones son las dotaciones totales de cada bien ($X = x_0^A + x_0^B$, $Y = y_0^A + y_0^B$). Las cantidades de A se miden desde el origen O_A, en el vértice inferior izquierdo, y las de B desde O_B, en el vértice opuesto, de modo que cada punto de la caja es un reparto factible de las cantidades totales ($x^A + x^B = X$, $y^A + y^B = Y$).

2. *Dotación inicial*: el punto W recoge el reparto de partida.

3. *Curvas de indiferencia*: u_0^A reúne las cestas que dan a A una misma utilidad, y u_0^B, las que dan a B una misma utilidad. Son convexas hacia su origen (O_A y O_B), porque las preferencias son estrictamente convexas.

4. *Recta presupuestaria*: común a ambos consumidores, reúne las cestas cuyo valor a los precios de mercado iguala al de la dotación. Pasa por W y tiene pendiente $-p_x/p_y$, determinada por el vector de precios de mercado.

5. *Curva de contratos* (CC): une las tangencias entre las curvas de indiferencia de ambos consumidores, los repartos en los que sus RMS coinciden.

6. *Equilibrio*: en el punto 0, la recta presupuestaria es tangente a la vez a u_0^A y a u_0^B. El vector de precios selecciona este punto entre las infinitas asignaciones factibles de la caja y lo sitúa sobre la curva de contratos. El vector de precios, tanto de los bienes finales como de los factores productivos, se ajusta mediante un proceso de tanteo hasta equilibrar cada uno de los mercados.

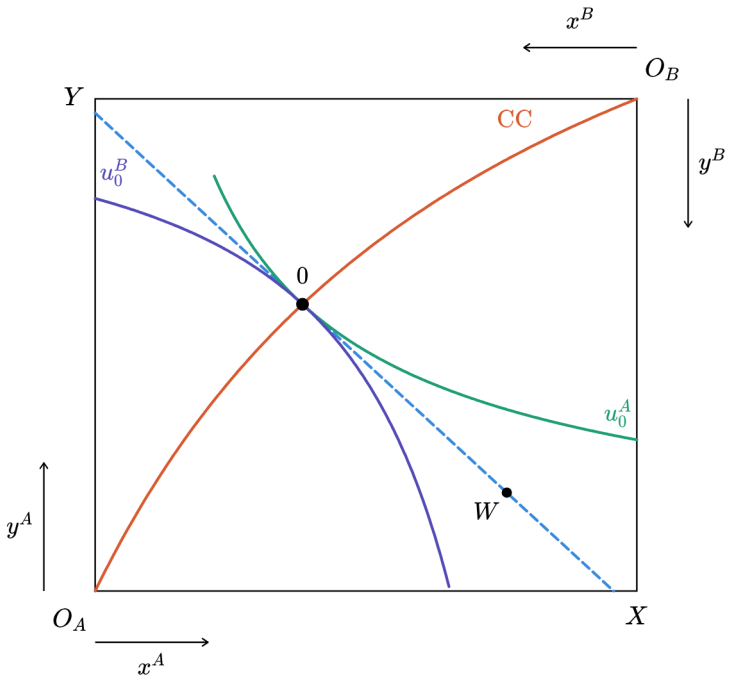


Figura A21.1: Elección óptima del consumidor en el modelo walrasiano, dadas la dotación inicial y los precios.

Bienestar: la igualdad de las RMS de todos los consumidores es, a su vez, la condición de eficiencia de Pareto en el consumo, de modo que la asignación de equilibrio está sobre la curva de contratos en el consumo (apartado 2.2). En cada uno de sus puntos, la RMS común indica el precio relativo que sostendría ese reparto como equilibrio competitivo.

Si cada punto de la curva de contratos se lleva al plano de utilidades (u^A, u^B), se obtiene la *frontera de posibilidades de utilidad* (FPU). Para cada nivel de utilidad de B, la frontera indica el máximo de utilidad al que puede llegar A con las cantidades totales de bienes disponibles. Tiene pendiente negativa, porque a lo largo de la curva de contratos mejorar a un consumidor exige empeorar al otro. El equilibrio competitivo es un punto de la FPU, y cuál de ellos depende de la dotación inicial, que fija la renta de cada consumidor a los precios de equilibrio (apartado 2.2.2).

> La curva de contratos en el consumo y su proyección en la frontera de posibilidades de utilidad se desarrollan, con sus gráficos, en el tema A22, apartado 1.2.2.

1.2.2. Oferta: comportamiento de las empresas

Planteamiento: la tecnología presenta rendimientos estrictamente decrecientes, cada empresa usa varios factores para producir un único bien, y las funciones de producción son independientes (no hay externalidades en la producción). Cada empresa f que produce el bien i elige las cantidades de factores que maximizan su beneficio, dados el precio de su producto y los de los factores (enfoque de la producción):

$$\max_{\mathbf{z}^f} \ \pi^f = p_i \, f_i(\mathbf{z}^f) - \sum_l p_l^z z_l^f$$

donde $\mathbf{z}^f$ es el vector de cantidades de factores que emplea la empresa f (variables de decisión), z_l^f su cantidad del factor l, $f_i(\cdot)$ la función de producción del bien i, común a todas las empresas de ese mercado, p_i el precio del bien, p_l^z el precio del factor l y π^f el beneficio de la empresa.

CPO:

$$p_i \, \mathrm{Pmg}_l^f \equiv p_i \, \frac{\partial f_i(\mathbf{z}^f)}{\partial z_l^f} = p_l^z, \qquad \forall \, l, \quad \forall \, f = 1, \ldots, F \tag{1}$$

Dividiendo (1) para dos factores k y l, y despejando en ella el precio del producto, se obtienen dos formas equivalentes:

$$\mathrm{RMST}_{kl}^f = \frac{\mathrm{Pmg}_l^f}{\mathrm{Pmg}_k^f} = \frac{p_l^z}{p_k^z} \tag{2}$$

$$p_i = \frac{p_l^z}{\mathrm{Pmg}_l^f} = \mathrm{Cmg}_i \tag{3}$$

Las tres condiciones se cumplen para cualquier empresa considerada en el modelo y se leen como sigue:

1. *Maximización del beneficio*: (1) establece que cada factor se contrata hasta que el valor de su productividad marginal (VPmg_l) iguala a su precio. Mientras lo que aporta la última unidad de un factor supere a lo que cuesta, la empresa aumenta su beneficio contratando más.

2. *Minimización del coste*: (2) establece que la relación marginal de sustitución técnica (tasa a la que la empresa puede sustituir un factor por otro manteniendo constante la producción) iguala al precio relativo de los factores. Si ambas tasas fuesen distintas, la empresa podría producir la misma cantidad a menor coste reasignando factores.

3. *Regla de precios*: (3) muestra que el precio del bien iguala a su coste marginal de producción, pues producir una unidad más con el factor l cuesta su precio dividido por su productividad marginal. Esta igualdad es la condición estándar de oferta competitiva, según la cual la empresa produce hasta que el ingreso adicional de la última unidad iguala al coste adicional de producirla.

CSO: la concavidad estricta de $f_i(\cdot)$ (que implica rendimientos estrictamente decrecientes a escala, aunque no se sigue de ellos) hace suficientes las CPO, de modo que la oferta y las demandas de factores de cada empresa están bien definidas para cualquier vector de precios.

Solución: de las CPO se obtienen la función de oferta de cada empresa, $x_i^f(p_i, \mathbf{p}^z)$, y sus funciones de demanda de factores, $z_l^f(p_i, \mathbf{p}^z)$, cuya suma horizontal da la oferta de mercado del bien y la demanda de cada factor. Todas cumplen tres propiedades: unicidad (para un vector de precios dado, cada oferta o demanda es única), continuidad (cambian de forma continua con los precios $\forall p > 0$) y homogeneidad de grado cero en precios (ausencia de ilusión monetaria: si todos los precios cambian en la misma proporción, las cantidades no varían).

Para el análisis del equilibrio general conviene reunir ambas funciones en el *vector de producción neta* de la empresa, $\mathbf{y}^f(\mathbf{p})$, cuyos componentes son positivos para el bien que produce ($y_i^f = x_i^f$) y negativos para los factores que emplea ($y_l^f = -z_l^f$). El beneficio se escribe entonces $\pi^f = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^f$,

con $\mathbf{p}$ el vector de precios de bienes y factores[3], y la función de exceso de demanda puede sumar en una sola expresión la oferta de bienes y la demanda de factores de las empresas.

Equilibrio: de manera análoga al caso del consumo, cuando existen múltiples empresas que emplean los mismos factores, la optimización individual de cada empresa frente a un vector común de precios de factores conduce a una condición de equilibrio agregada. Considerando dos empresas 1 y 2 que emplean capital (K) y trabajo (L), la producción estará en equilibrio cuando ambas estén minimizando costes simultáneamente, es decir, cumpliendo (2), frente al mismo precio relativo de factores:

$$\text{RMST}_{KL}^{1} = \frac{w}{r} = \text{RMST}_{KL}^{2}$$

Esta condición se generaliza a F empresas, de modo que $\text{RMST}_{KL}^{f} = w/r$ para todo $f = 1, \dots, F$. De nuevo, el vector de precios de factores actúa como mecanismo de coordinación, ya que el precio relativo w/r obliga a todas las empresas a ajustar su combinación de factores a la misma tasa de sustitución técnica.

Desarrollo gráfico: el equilibrio en la producción se representa en el plano trabajo-capital de la caja de Edgeworth-Bowley en el espacio de factores (figura A21.2):

1. *Caja*: sus dimensiones son las dotaciones totales de cada factor ($L_0 = L^1 + L^2$, $K_0 = K^1 + K^2$). Las cantidades de la empresa 1 se miden desde el origen O_1, en el vértice inferior izquierdo, y las de la empresa 2 desde O_2, en el vértice opuesto. De este modo, cada punto interior es una asignación factible, de pleno empleo de ambos factores, entre las dos empresas.

2. *Isocuantas*: x^1 reúne las combinaciones de factores con las que la empresa 1 obtiene una misma producción, y x^2, las de la empresa 2. Son convexas hacia su origen (O_1 y O_2), porque las funciones de producción son estrictamente cóncavas.

3. *Recta isocoste*: común a ambas empresas, reúne las combinaciones de factores de igual coste y tiene pendiente $-w/r$, determinada por el vector de precios de factores.

4. *Curva de contratos* (CC): une las tangencias entre las isocuantas de ambas empresas, las asignaciones en las que sus RMST coinciden.

5. *Equilibrio*: en el punto 0, la recta isocoste es tangente a la vez a x^1 y a x^2. El precio relativo de los factores selecciona este punto de la curva de contratos.

[3] El programa en términos de producción neta, $\max_{\mathbf{y}^f} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^f$ sujeto a $g^f(\mathbf{y}^f) \leq 0$, donde $g^f(\cdot)$ es la función de transformación de la empresa, equivale al de la producción cuando la empresa obtiene un solo bien, pues basta definir $g^f(\mathbf{y}^f) = y_i^f - f_i(\mathbf{z}^f)$, con $z_l^f = -y_l^f$. Su CPO, $g_i'/g_j' = p_i/p_j$ para cada par de bienes, reúne en una sola expresión las condiciones (1) a (3). Este planteamiento es más general, porque admite la producción conjunta y que lo que es factor para una empresa sea producto para otra. Supone, además, que las decisiones de producción y de elección de factores se toman simultáneamente (Gravelle y Rees, 2004, p. 168; Mas-Colell, Whinston y Green, 1995, caps. 5 y 16).

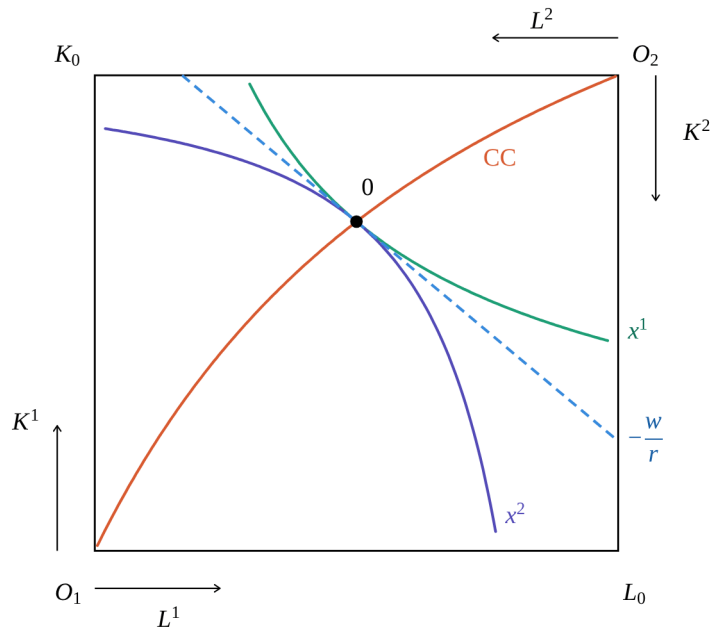


Figura A21.2: Equilibrio en la producción. En la caja de Edgeworth-Bowley de factores, la recta isocoste común es tangente a las isocuantas de ambas empresas en un punto de la curva de contratos.

Bienestar: la igualdad de las RMST de todas las empresas es la condición de eficiencia de Pareto en la producción, de modo que la asignación de factores de equilibrio está sobre la curva de contratos en la producción. En cada uno de sus puntos, la RMST común indica el precio relativo de los factores que sostendría esa asignación como equilibrio.

Si cada punto de la curva de contratos se lleva al plano de bienes (x, y), se obtiene la *frontera de posibilidades de producción* (FPP), o curva de transformación. La frontera da la máxima cantidad de un bien que puede producirse para cada cantidad del otro, dadas la tecnología y las dotaciones de factores. El valor absoluto de su pendiente es la relación marginal de transformación, $\text{RMT}_{yx} = \text{Cmg}_x/\text{Cmg}_y$, el coste de oportunidad de x en unidades de y, y con los rendimientos decrecientes supuestos la FPP es cóncava.

Puesto que cada empresa iguala el precio de su bien a su coste marginal, por (3), en el equilibrio se cumple $\text{RMT}_{yx} = p_x/p_y$. La producción de equilibrio es, así, el punto de la FPP tangente a la recta isoingreso más alejada del origen, de pendiente $-p_x/p_y$.

> La curva de contratos en la producción y su proyección en la frontera de posibilidades de producción se desarrollan, con sus gráficos, en el tema A22, apartado 1.2.1.

1.2.3. El ajuste del sistema

Los planes de consumidores y empresas dependen solo del vector de precios, pero nada garantiza que, a un vector arbitrario, sean compatibles entre sí, pues lo que unos desean comprar puede no coincidir con lo que otros desean vender. Hace falta, por ello, una medida de esa discrepancia, la función de exceso de demanda, y un mecanismo que corrija los precios hasta eliminarla. El enfoque walrasiano propone un ajuste vía precios, en contraste con el enfoque marshalliano, que opera vía cantidades.

Función de exceso de demanda y ley de Walras (1874): la primera es la diferencia entre la demanda de mercado y la oferta total (producción de las empresas más dotaciones iniciales de los consumidores) para cada bien i:

$$Z_i(p) = \underbrace{\sum_{h=1}^{H} x_i^h(p)}_{D_i(p)} - \underbrace{\left(\sum_{f=1}^{F} y_i^f(p) + \sum_{h=1}^{H} x_{i0}^h \right)}_{S_i(p)}$$

donde $y_i^f(p)$ es la producción neta de la empresa f en el bien i, negativa cuando i es un factor, de modo que la demanda de factores de las empresas entra restando en la oferta.

Si $Z_i(p) > 0$, hay exceso de demanda, y si $Z_i(p) < 0$, exceso de oferta. Las propiedades de la función de exceso de demanda son las siguientes:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es una función, y no una correspondencia, porque las demandas y ofertas individuales son únicas. Es continua para precios positivos y diferenciable cuando lo son esas demandas y ofertas. En los precios nulos de los bienes libres, en cambio, la continuidad requiere la saciabilidad condicional del apartado 2.1.1.

2. *Transformaciones*: es homogénea de grado cero en precios, $Z_i(kp) = Z_i(p)$ para todo $k > 0$, porque las rentas de los consumidores son el valor de sus dotaciones y participaciones a esos mismos precios. Por ello el sistema solo determina precios relativos.

3. *Inclinación*: la teoría no le impone un signo general. Con todo, si todos los bienes son sustitutivos brutos, $\partial Z_i/\partial p_j > 0$ para todo $j \neq i$, la homogeneidad de grado cero implica además $\partial Z_i/\partial p_i < 0$, y el equilibrio es único (apartado 2.1.2) y estable (apartado 2.1.3).

4. *Forma*: la teoría no restringe su curvatura, igual que ocurre con las demandas individuales que agrega.

5. *Otras propiedades*:

- *Agotamiento de la renta*: el valor de los excesos de demanda es nulo para cualquier vector de precios (*ley de Walras*), como se desarrolla, con sus corolarios, tras la figura A21.3.

- *Integrabilidad*: no hereda la simetría ni la ley de la demanda compensada de las demandas individuales, como demuestra el teorema de Sonnenschein, Mantel y Debreu (1972-1974). Según este teorema, cualquier función continua, homogénea de grado cero y que cumpla la ley de Walras es, lejos de los precios nulos, la función de exceso de demanda de alguna economía de intercambio con al menos tantos consumidores como bienes. Por ello, la función agregada no puede tratarse como la de un consumidor representativo.

- *Observabilidad*: solo puede medirse en el equilibrio, porque fuera de él recoge demandas y ofertas nocionales, que no llegan a ejecutarse (*tâtonnement*).

Gráficamente, en el plano Z_i-p_i (figura A21.3) y dados los demás precios, la curva $Z_i(p)$ representa el exceso de demanda del bien i a cada precio, y caben dos casos según el tipo de bien:

- *Bien escaso*: la función corta al eje ($Z_i = 0$) para algún precio positivo, por lo que existe un precio de equilibrio $p_i^* > 0$. Cuando la función es decreciente, por debajo de ese precio hay exceso de demanda y, por encima, exceso de oferta (panel a).

▪ *Bien libre*: la función no corta al eje y siempre existe exceso de oferta, incluso a precio nulo. Por ello, para incluir bienes libres en el modelo, su precio de equilibrio debe ser nulo, con $Z_i(0) < 0$ (panel b)[4].

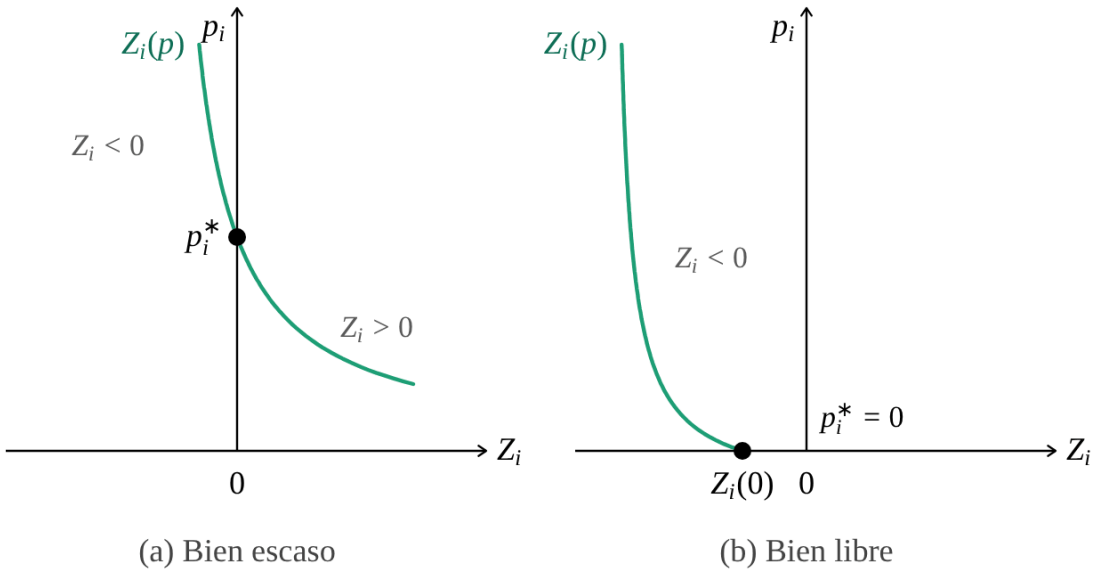


Figura A21.3: Función de exceso de demanda del bien i, dados los demás precios. Si el bien es escaso, $Z_i(p)$ corta al eje en un precio positivo, p_i^* (panel a). Si es libre, hay exceso de oferta a cualquier precio y el equilibrio exige $p_i^* = 0$, con $Z_i(0) < 0$ (panel b).

El número de cortes de la función con el eje, que determina si el equilibrio es único o múltiple, depende a su vez de la relación entre los bienes (sustitutivos brutos o no) y se estudia más adelante (figura A21.5).

La función de exceso de demanda cumple la ley de Walras, según la cual el valor total de los excesos de demanda es nulo para cualquier vector de precios. Formalmente:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i Z_i(p) = 0$$

La ley se cumple para cualquier vector de precios, no solo en equilibrio. El resultado se deriva directamente de la agregación de las restricciones presupuestarias de todos los consumidores. Puesto que cada consumidor gasta exactamente su renta, el valor total de lo que se demanda debe igualar al valor total de lo que se ofrece.

Económicamente, esto significa que los mercados están interconectados, en el sentido de que toda unidad monetaria gastada en un mercado es una unidad que deja de gastarse en otro. Por eso, no puede haber excesos de demanda (o de oferta) para todos los bienes simultáneamente.

De esta ley se siguen cuatro corolarios:

[4]Si los productores obtienen un precio nulo pero pueden eliminar el exceso de producción sin coste, estos bienes se incorporan al modelo (Gravelle y Rees, 2004).

1. *Excesos compensadores*: para un vector de precios cualquiera, si existe un exceso en un mercado, existirá un exceso compensador en otro. Para el vector de equilibrio, no pueden existir excesos de bienes escasos, aunque sí excesos de oferta de bienes libres.

2. *Indeterminación de precios absolutos*: dado que hay $n-1$ ecuaciones independientes con n incógnitas y los excesos de demanda son homogéneos de grado cero, solo se determinan precios relativos. Por ello, se fija un bien como *numerario* (unidad de cuenta) y el resto se define en relación con él.

3. *El dinero es un velo*: en el modelo walrasiano, que es una economía de trueque, el numerario solo cumple el papel de unidad de cuenta, por lo que no se requiere la presencia efectiva del dinero como medio de pago.

4. *Economía abierta*: $\sum_i p_i Z_i(p) = -\text{BC}$, donde $Z_i(p)$ es ahora el exceso de demanda interna del bien i y BC el saldo de la balanza comercial, de modo que un exceso de demanda interna agregado se cubre con importaciones netas (déficit comercial). Si $\text{BC} = 0$, se da el equilibrio externo. En el modelo de dos países y dos bienes, la ley de Walras permite obtener la relación real de intercambio internacional a partir del vaciado de un solo mercado, porque, si se vacía el mercado mundial de un bien, se vacía también el del otro. Gráficamente, la restricción de comercio equilibrado de cada país (valor de las exportaciones igual al de las importaciones) es una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es el precio relativo de los bienes. La relación real de intercambio de equilibrio es la pendiente de la recta sobre la que son compatibles las ofertas de exportación y las demandas de importación de ambos países.

El mecanismo de *tâtonnement* y la función del subastador: en la reconstrucción habitual del modelo de Walras, el *tâtonnement* es un proceso de ajuste previo a las transacciones en el que un subastador ficticio guía la economía hacia el equilibrio. El proceso opera del siguiente modo:

1. *Anuncio de precios*: el subastador propone un vector de precios.

2. *Demandas nocionales*: los agentes calculan sus demandas y ofertas óptimas a esos precios.

3. *Observación de excesos*: el subastador comprueba si hay excesos de demanda u oferta en cada mercado.

4. *Revisión de precios*: si algún mercado no se vacía, no se realizan transacciones y el subastador sube los precios en los mercados con exceso de demanda y los baja en los mercados con exceso de oferta.

5. *Iteración*: el proceso se repite hasta que todos los mercados se vacían simultáneamente, momento en el cual se ejecutan las transacciones[5].

Este mecanismo difiere esencialmente del ajuste marshalliano vía cantidades (apartado 3.1.1). En Walras, el ajuste es simultáneo en todos los mercados, se realiza vía precios y las transacciones solo ocurren en equilibrio. Bajo *tâtonnement*, por tanto, las demandas planeadas (nocionales) coinciden con las efectivas. Esta propiedad se pierde cuando existen rigideces de precios, lo que constituye uno de los puntos de partida de los neokeynesianos del desequilibrio.

Formalmente, la regla de ajuste del subastador puede expresarse como una función que, dado un vector de precios normalizados p', genera un nuevo vector de precios p'':

[5] Argandoña et al. (1997, p. 104).

$$p_i'' \equiv T_i(p') = \frac{\max\{p_i' + \lambda_i Z_i(p'),\ 0\}}{\sum_{j=1}^{n} \max\{p_j' + \lambda_j Z_j(p'),\ 0\}}$$

donde $\lambda_i > 0$ es el factor de velocidad de ajuste. El operador max garantiza precios no negativos (un precio no puede caer por debajo de cero). La función está normalizada ($\sum p_i'' = 1$), de manera que transforma precios normalizados en precios normalizados.

Si $Z_i > 0$ (exceso de demanda), el precio del bien i sube, y si $Z_i < 0$ (exceso de oferta), baja. El equilibrio se alcanza cuando el subastador aplica la regla y el vector de precios se reproduce a sí mismo ($T(p^*) = p^*$). Esta propiedad de *punto fijo* permite conectar el mecanismo del subastador con la prueba de existencia del equilibrio.

1.2.4. El equilibrio general competitivo

El ajuste se detiene cuando el subastador ya no tiene precios que corregir. Se habla entonces de **equilibrio general competitivo**, porque todos los mercados se vacían. Las empresas maximizan su beneficio y ofrecen exactamente lo que se les demanda, mientras los consumidores, al maximizar su utilidad, demandan exactamente lo que se ofrece[6].

Al considerar todos los mercados, hay tantos mercados como mercancías y factores productivos. Dentro de cada mercado hay tres tipos de funciones (demanda, oferta, condición de equilibrio) y dos tipos de incógnitas (precios y cantidades), con lo que se forma un sistema de ecuaciones simultáneas[7].

El equilibrio general emerge como solución a este sistema, en forma de un vector de precios que vacía todos los mercados simultáneamente. Sin embargo, que el número de ecuaciones iguale al de incógnitas no es condición suficiente, ya que se requiere que las ecuaciones sean independientes. De hecho, en un sistema walrasiano, una ecuación es redundante por la ley de Walras y solo se determinan precios relativos.

Definición: el EGC es un vector de precios $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$ tal que consumidores y productores maximizan sus respectivos programas y todos los mercados (bienes, servicios, factores) se vacían. Esta condición puede plantearse formalmente de dos formas:

- *Igualación de valoraciones*: en el EGC, la valoración subjetiva de los consumidores (tasa a la que están dispuestos a intercambiar bienes, la RMS) coincide con la valoración objetiva del mercado (precio relativo). La valoración del mercado, a su vez, coincide con el coste de oportunidad de la producción, es decir, con la RMT, expresada como cociente de costes marginales $(d\mathrm{CT}_i/dx_i)/(d\mathrm{CT}_j/dx_j)$, donde $d\mathrm{CT}_i/dx_i \equiv \mathrm{Cmg}_i$ es el coste marginal del bien i. Formalmente:

$$\mathrm{RMS}_{ji}(p^*) = \frac{p_i^*}{p_j^*} = \frac{d\mathrm{CT}_i/dx_i}{d\mathrm{CT}_j/dx_j} = \mathrm{RMT}_{ji}(p^*)$$

Esta triple igualdad sintetiza la eficiencia del sistema competitivo (primer teorema del bienestar).

[6] "Todos los mercados se vacían" se apoya en la noción de equilibrio general, y "las empresas maximizan…", en la de competitivo. En competencia imperfecta, se hablaría de equilibrio de Nash.

[7] En el modelo 2x2x2x2 (dos bienes, dos factores, dos empresas, dos consumidores) hay 14 incógnitas (cuatro demandas de factores, dos ofertas de bienes, cuatro demandas de bienes y cuatro precios). Las ecuaciones son también 14 (cuatro funciones de demanda de factores, dos de oferta de bienes, cuatro de demanda de bienes y cuatro condiciones de equilibrio).

- *Ausencia de excesos*:

$$Z_i^* \equiv Z_i(p^*) = 0 \;\; \forall\, p_i^* > 0 \qquad Z_i^* \equiv Z_i(p^*) \leq 0 \;\; \forall\, p_i^* = 0$$

Es decir, los mercados de bienes escasos se vacían ($Z_i = 0$) y se admiten excesos de oferta de bienes libres ($Z_i \leq 0$ con $p_i = 0$). El ajuste ante excesos se supone instantáneo. En forma concisa, $Z_i^* \leq 0$, $p_i^* \geq 0$, $p_i^* Z_i^* = 0$.

El equilibrio general competitivo se caracteriza por cuatro condiciones:

- *Consumidores*: cada uno maximiza su utilidad dados los precios.
- *Empresas*: cada una maximiza su beneficio dados los precios.
- *Mercados*: todos se vacían simultáneamente.
- *Precios relativos*: son los únicos que el sistema determina, y un bien se toma como numerario.

Ejemplo: equilibrio walrasiano en una economía de intercambio Cobb-Douglas

Sean $u^h = (x^h)^{1/2}(y^h)^{1/2}$ para $h = A, B$, con dotaciones $(x_0^A, y_0^A) = (3, 0)$ y $(x_0^B, y_0^B) = (1, 8)$, por lo que la caja mide $X = 4$ e $Y = 8$. Tomando y como numerario ($p_y = 1$) y llamando $p \equiv p_x/p_y$, cada consumidor gasta la mitad de su renta $M_0^h = p\, x_0^h + y_0^h$ en cada bien, de modo que $x^h = M_0^h/(2p)$ e $y^h = M_0^h/2$. Por la ley de Walras basta vaciar el mercado de x:

$$\frac{3p}{2p} + \frac{p+8}{2p} = 4 \;\Rightarrow\; p^* = \frac{p_x^*}{p_y^*} = 2 = \frac{Y}{X}$$

Con $p^* = 2$, las rentas son $M_0^A = 6$ y $M_0^B = 10$, y la asignación de equilibrio es

$$(x^A, y^A) = \left(\tfrac{3}{2},\, 3\right), \qquad (x^B, y^B) = \left(\tfrac{5}{2},\, 5\right)$$

que vacía también el mercado de y ($3 + 5 = 8$) y cumple $\mathrm{RMS}_{yx}^A = y^A/x^A = 2 = y^B/x^B = \mathrm{RMS}_{yx}^B$. Así, el precio relativo iguala las RMS de ambos consumidores y la asignación está sobre la curva de contratos.

1.3. Conclusiones

Aspectos positivos: el modelo walrasiano integra en un único sistema las decisiones de consumidores y empresas estudiadas en los temas anteriores y muestra que un vector de precios puede coordinarlas todas simultáneamente. Asimismo, las funciones de exceso de demanda conservan la continuidad y la homogeneidad de grado cero de las demandas individuales y cumplen la ley de Walras, aunque no heredan el resto de su estructura (teorema de Sonnenschein, Mantel y Debreu). Ello basta para plantear con precisión las cuestiones de existencia, unicidad y estabilidad.

Limitaciones: el mecanismo de *tâtonnement* es una ficción (no hay intercambio fuera del equilibrio ni un subastador real), y el modelo es estático y con mercados completos. Además, las condiciones que garantizan sus propiedades (convexidad, ausencia de externalidades y de poder de mercado) son las que los temas A22 y A23 relajan.

2. Análisis del equilibrio

Definido el equilibrio, quedan por responder tres preguntas, relativas a su existencia, su unicidad y su estabilidad. Existencia, unicidad y estabilidad son propiedades deseables del sistema competitivo como mecanismo de asignación y constituyen la base para su valoración normativa. Por ello, en esta sección se introduce el análisis positivo del equilibrio, seguido del análisis normativo.

2.1. Análisis positivo

Se estudian, por este orden, la existencia del equilibrio (que algún vector de precios vacíe todos los mercados), su unicidad (que ese vector sea el único) y su estabilidad (que el ajuste de precios conduzca a él tras una perturbación).

2.1.1. Existencia: el teorema del punto fijo de Brouwer (1912)

Origen: Walras (1874) no llegó a demostrar la existencia del equilibrio, pues se apoyó en la igualdad entre el número de ecuaciones y el de incógnitas, que no la garantiza.

Wald (1936) ofreció una primera prueba formal, aunque laboriosa. La prueba definitiva se debe a Arrow y Debreu (1954), que se apoyaron en la teoría de juegos, con preferencias convexas y conjuntos de producción convexos. Posteriormente, la prueba se simplificó y se extendió:

- *Gale (1955) y Nikaido (1956)*: prueba más sencilla, basada directamente en la función de exceso de demanda.
- *Debreu (1959)*: existencia con incertidumbre, mediante bienes contingentes.

Idea: en la actualidad, la existencia se ilustra mediante el *teorema del punto fijo de Brouwer* (1912). Según este resultado, toda función continua de un conjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo tiene al menos un punto fijo x^* tal que $f(x^*) = x^*$ (figura A21.4). El teorema constituye condición suficiente para la existencia del EGC.

Razonamiento: la conexión con el mecanismo del subastador es directa, pues la función del subastador $T(p)$ definida en el apartado 1.2.3 transforma un vector de precios normalizados en otro vector de precios normalizados. Si se puede demostrar que esta función es continua y que su dominio (el conjunto de precios normalizados) es cerrado, acotado y convexo, entonces el teorema de Brouwer garantiza la existencia de un punto fijo p^* tal que $T(p^*) = p^*$.

La condición $T(p^*) = p^*$ equivale precisamente a $Z_i(p^*) = 0$ para todos los bienes escasos, es decir, al vaciamiento de todos los mercados. Por tanto, demostrar la existencia del EGC se reduce a verificar las tres condiciones del teorema de Brouwer aplicadas a la función del subastador, lo que se hace en tres pasos:

1. *Vector de precios (cerrado, acotado y convexo)*: los precios deben ser no negativos ($p_i \geq 0$), lo que acota el conjunto por debajo. Para acotarlo también por arriba, y dado que solo importan los precios relativos, se normalizan para que sumen uno:

$$p_i' = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j}$$

Los precios normalizados mantienen sus valores relativos ($p_i'/p_j' = p_i/p_j$) y su suma es unitaria ($\sum p_i' = 1$). El vector de precios normalizados está definido siempre que al menos un $p_i > 0$ (al

menos un bien debe ser escaso). Cada $p'_i \in [0,1]$, de modo que el conjunto está acotado, y es cerrado y convexo porque lo definen la igualdad $\sum p'_i = 1$ y las desigualdades $p'_i \geq 0$.

2. *Función del subastador (continuidad)*: la función $T(p')$ transforma precios normalizados en precios normalizados, por lo que su imagen pertenece al mismo conjunto que su dominio. Para bienes escasos ($p_i > 0$) no hay problema de continuidad, mientras que para bienes libres ($p_i = 0$) la demanda podría ser infinita, lo que haría la función discontinua. Para resolver esto, se establece *saciabilidad condicional*, según la cual los consumidores se sacian de todos los bienes excepto de al menos uno de los bienes escasos. Esto garantiza que el exceso de demanda de bienes libres sea finito y, por tanto, que la función del subastador sea continua en todo su dominio.

3. *Demostración del punto fijo*: verificadas las condiciones del teorema, la función del subastador posee un punto fijo p^* tal que $T(p^*) = p^*$. Resta comprobar que este punto fijo implica efectivamente $Z_i(p^*) = 0$ para bienes escasos y $Z_i(p^*) \leq 0$ para bienes libres:

- *Bien libre* ($p_i^* = 0$): la función toma $T_i(p^*) = \max\{\lambda_i Z_i(p^*), 0\}/\sum(\cdot)$. Como $p_i^* = 0$, el punto fijo exige $T_i = 0$, lo cual requiere $\lambda_i Z_i(p^*) \leq 0$. Dado que $\lambda_i > 0$, esto implica $Z_i(p^*) \leq 0$, es decir, el bien libre tiene exceso de oferta o está en equilibrio.

- *Bien escaso* ($p_i^* > 0$): sea $D \equiv \sum_{j=1}^{n} \max\{p_j^* + \lambda_j Z_j(p^*), 0\}$ el denominador de la función. El punto fijo exige $p_i^* D = p_i^* + \lambda_i Z_i(p^*)$, de donde $Z_i(p^*) = p_i^*(D-1)/\lambda_i$. Sustituyendo en la ley de Walras ($\sum p_i^* Z_i(p^*) = 0$, a la que los bienes libres no contribuyen por tener precio nulo) se obtiene $(D-1)\sum_{p_i^*>0}(p_i^*)^2/\lambda_i = 0$, luego $D = 1$ y el punto fijo se reduce a $T_i(p^*) = p_i^* + \lambda_i Z_i(p^*)$. La igualdad $T_i = p_i^*$ solo se cumple si $Z_i(p^*) = 0$, lo cual es precisamente la condición de vaciamiento del mercado.

Desarrollo gráfico: en el caso unidimensional, el teorema del punto fijo se representa en el plano x-$f(x)$ (figura A21.4):

1. *Función* $f(x)$: es cualquier aplicación continua de $[0,1]$ en sí mismo. Parte de la bisectriz o de un punto por encima de ella en $x = 0$ y llega a la bisectriz o a un punto por debajo en $x = 1$.

2. *Bisectriz* (45°): recoge los puntos en los que la función devuelve el mismo valor, $f(x) = x$.

3. *Punto fijo*: como f es continua, necesariamente corta la bisectriz en algún $x^* = f(x^*)$. En la economía, ese punto es el vector de precios que la función del subastador reproduce, $T(p^*) = p^*$.

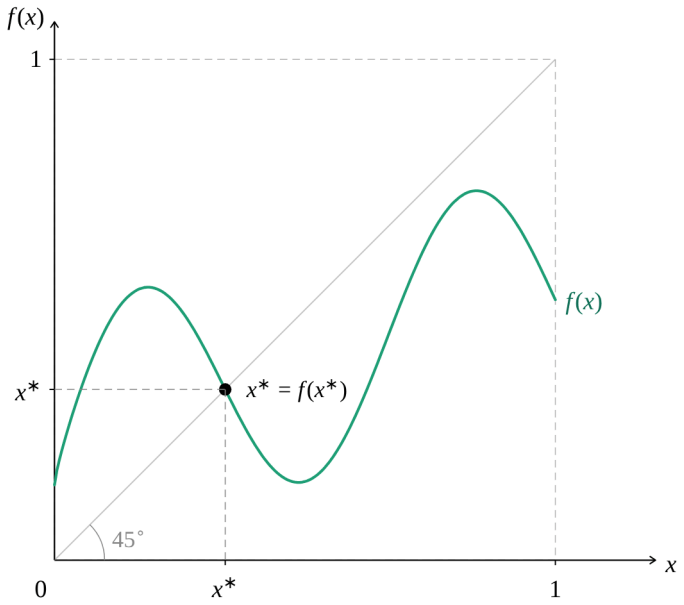


Figura A21.4: Existencia del equilibrio. Toda función continua del simplex en sí mismo tiene un punto fijo (Brouwer), lo que garantiza un vector de precios de equilibrio.

La misma lógica se aplica a la función de exceso de demanda. En efecto, si es continua, para pasar de exceso de oferta a exceso de demanda necesariamente cruza el eje, lo que garantiza la existencia de un precio de equilibrio (figura A21.3, panel a).

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: demuestra la coherencia lógica del sistema walrasiano, al garantizar que existe al menos un vector de precios que vacía todos los mercados, y sustituye el recuento de ecuaciones e incógnitas por una prueba rigurosa. El argumento de punto fijo, el mismo que garantiza la existencia del equilibrio de Nash, es además la herramienta habitual para probar la existencia de equilibrio en economía.

▪ *Limitaciones*: el resultado es solo de existencia, pues no dice cuántos equilibrios hay ni si el ajuste de precios los alcanza, cuestiones que se tratan a continuación. Descansa, además, en supuestos de convexidad y continuidad que excluyen los rendimientos crecientes y las indivisibilidades.

2.1.2. Unicidad

La unicidad importa por dos razones. Si hay equilibrios múltiples, no hay punto de referencia para la estática comparativa, y las propiedades normativas podrían verse afectadas. Para garantizarla se dispone de dos teoremas, que ofrecen condiciones suficientes, no necesarias[8].

Teorema de la preferencia revelada: si la función de exceso de demanda agregada cumple el axioma débil de la preferencia revelada (ADPR, según el cual si $Z(p) \neq Z(p')$ y $pZ(p') \leq 0$, entonces $p'Z(p) > 0$), el conjunto de vectores de precios de EGC es convexo. Si además los equilibrios están localmente aislados (con los precios normalizados), el EGC es único.

[8] Segura (1986, p. 241).

La demostración parte de una consecuencia del ADPR. Si p^* es de equilibrio y p no lo es, $Z(p) \neq Z(p^*)$ y $pZ(p^*) \leq 0 = pZ(p)$ (ley de Walras), luego $p^*Z(p) > 0$.

Sean p^1 y p^2 dos EGC y $p = \alpha p^1 + (1-\alpha)p^2$, con $0 < \alpha < 1$. Por la ley de Walras, $pZ(p) = \alpha\, p^1 Z(p) + (1-\alpha)\, p^2 Z(p) = 0$, lo que sería imposible si p no fuese de equilibrio, pues ambos sumandos serían positivos. Toda combinación convexa de equilibrios es, por tanto, un equilibrio, y si los equilibrios están aislados solo puede haber uno.

Teorema de los sustitutivos brutos: si todos los bienes son sustitutivos brutos en sentido estricto ($\partial Z_i/\partial p_j > 0$, $\forall i \neq j$), el EGC es único.

La idea de la demostración, con dos bienes, es la siguiente. Si se parte de un EGC p^* y se considera un precio alternativo $p_2 < p_2^*$, el encarecimiento relativo del bien 1 produce $Z_1 < 0$ (exceso de oferta). Por la ley de Walras, necesariamente $Z_2 > 0$, de modo que ese vector de precios no puede ser un EGC.

Casos de equilibrios múltiples: pueden darse con ausencia de sustituibilidad bruta (efectos renta intensos), rendimientos crecientes o curvas de oferta de trabajo con pendiente negativa (efecto renta domina al efecto sustitución a salarios altos). En esas situaciones, la función de exceso de demanda corta el eje más de una vez.

Gráficamente, en el plano Z-p (figura A21.5), cada corte de la función de exceso de demanda $Z(p)$ con el eje vertical ($Z = 0$) es un equilibrio. Con sustitutivos brutos la función lo corta una sola vez, en p^* (panel izquierdo). Sin ellos, en cambio, puede cortarlo varias veces, en p^1, p^2 y p^3 (panel derecho).

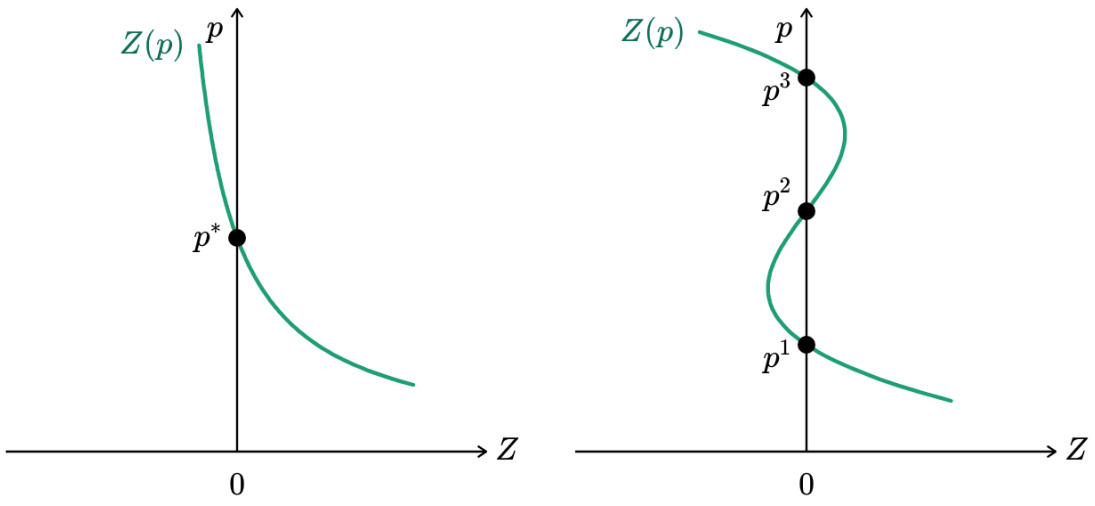


Figura A21.5: Unicidad del equilibrio. El teorema de existencia no la garantiza. Con sustituibilidad bruta entre todos los bienes, la función de exceso de demanda corta una sola vez al eje y el equilibrio es único, pero en otro caso pueden existir equilibrios múltiples.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: los dos teoremas garantizan la unicidad, y con ella un punto de referencia para la estática comparativa, con condiciones sobre la función de exceso de demanda agregada. Ninguno de los dos exige preferencias homotéticas idénticas, aunque estas bastan para que se cumpla el ADPR en el agregado.

▪ *Limitaciones*: el ADPR solo está garantizado para la demanda agregada en casos muy restrictivos, por ejemplo, cuando todos los consumidores tienen preferencias homotéticas idénticas (elasticidad-renta unitaria). La sustituibilidad bruta, por su parte, es también muy restrictiva, ya que excluye la complementariedad bruta entre cualquier par de bienes y exige que los efectos renta no dominen a los efectos sustitución.

2.1.3. Estabilidad

La **estabilidad** se refiere a que, ante una perturbación, el sistema regrese al equilibrio mediante un proceso de ajuste. Se distingue entre estabilidad global (convergencia desde cualquier vector de precios inicial) y local (convergencia solo en un entorno cercano)[9].

Función de distancia al equilibrio: el equilibrio es estable si $\lim_{t\to\infty} p(t) = p^*$. En un mercado aislado, ello exige $\partial Z_i(p)/\partial p_i < 0$ en el entorno de p^*. Para estudiar la estabilidad dinámica se emplea la función de distancia al equilibrio, bajo los supuestos de ley de Walras, bienes sustitutivos brutos y dos bienes, con la regla de ajuste $\dot{p}_i = \lambda_i Z_i(p)$, $\lambda_i > 0$:

$$\Phi(p(t), p^*) = \frac{1}{2\lambda_1}(p_1(t) - p_1^*)^2 + \frac{1}{2\lambda_2}(p_2(t) - p_2^*)^2$$

Para que haya estabilidad basta con que Φ caiga monótonamente con el tiempo ($d\Phi/dt < 0$, $\forall p(t) \neq p^*$), lo cual queda garantizado por los supuestos. En tal caso, el EGC es estable desde el punto de vista walrasiano (Arrow, Block y Hurwicz, 1959).

Gráficamente, la estabilidad del equilibrio se representa en el plano X-p (panel izquierdo) y en el plano Z-p (panel derecho) de las figuras A21.6 y A21.7:

1. *Oferta y demanda*: $D(X)$ recoge la cantidad que se demanda a cada precio y $S(X)$, la que se ofrece, y las dos curvas se cortan en el punto 0, con precio p^* y cantidad X^*.

2. *Exceso de demanda*: $Z(p)$ recoge, para cada precio, la diferencia entre la cantidad demandada y la ofrecida.

3. *Equilibrio*: $Z(p)$ corta el eje vertical ($Z = 0$) en p^*.

▪ *Equilibrio estable* (figura A21.6): $Z(p)$ es decreciente. Por encima de p^* hay exceso de oferta y el subastador baja el precio ($\Delta p < 0$), y por debajo hay exceso de demanda y lo sube ($\Delta p > 0$), de modo que el precio vuelve a p^*.

▪ *Equilibrio inestable* (figura A21.7): $Z(p)$ es creciente. Por encima de p^* hay exceso de demanda y el precio sigue subiendo ($\Delta p > 0$), y por debajo sigue bajando ($\Delta p < 0$), de modo que el tanteo aleja el precio de p^*.

[9] Sin estabilidad, la estática comparativa carece de sentido (Segura, 1986, p. 244).

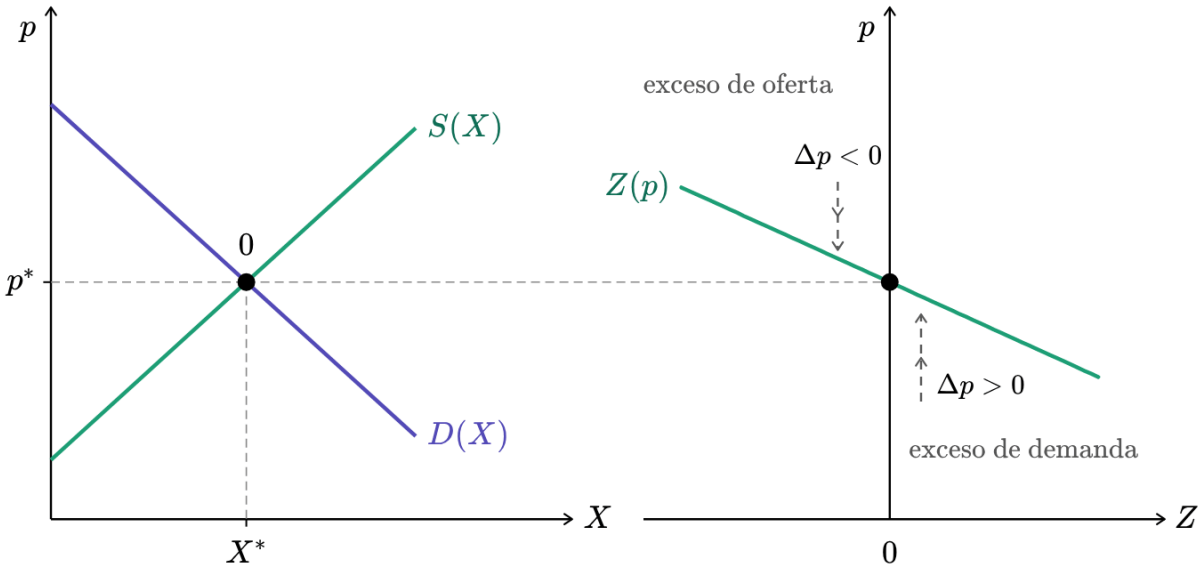


Figura A21.6: Estabilidad walrasiana. El subastador eleva el precio con exceso de demanda y lo reduce con exceso de oferta.

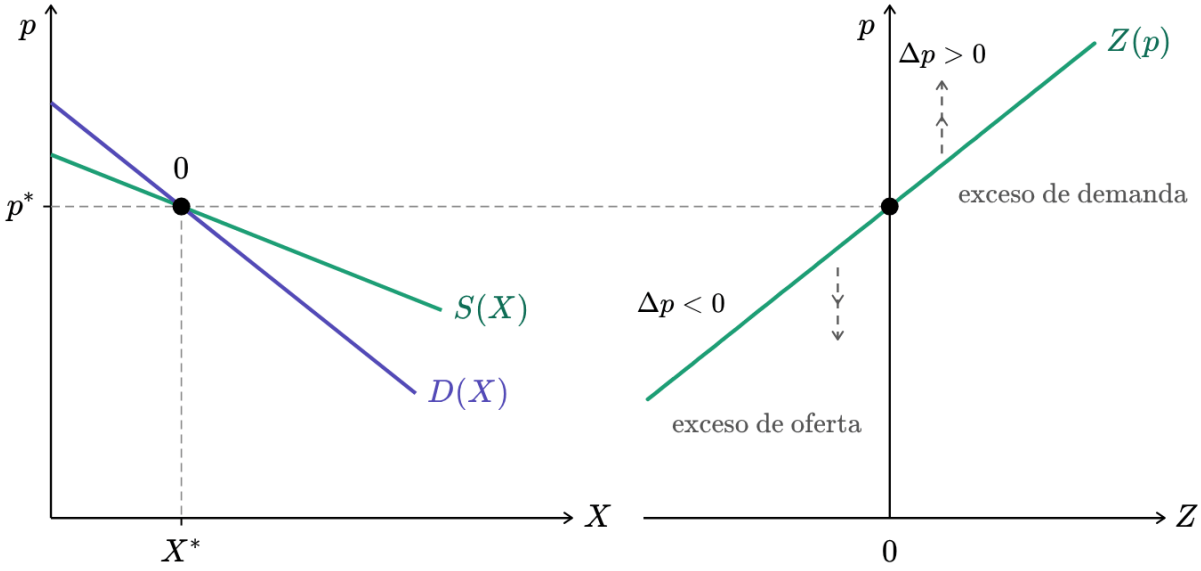


Figura A21.7: Equilibrio inestable. Cuando la función de exceso de demanda es creciente en el precio, el tanteo walrasiano aleja a la economía del equilibrio.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: con sustitutivos brutos, el propio mercado, a través del *tâtonnement*, tiende de forma monótona hacia el equilibrio, y la estabilidad permite el análisis de estática comparativa.

▪ *Limitaciones*: sin sustituibilidad bruta, la estabilidad no está garantizada (contraejemplo de Scarf, 1960). El resultado descansa, además, en el ajuste de un subastador ficticio, sin intercambio fuera del equilibrio.

2.2. Análisis normativo: optimalidad de Pareto

Una asignación se considera **eficiente en el sentido de Pareto** cuando no hay ninguna otra asignación factible que permita mejorar a algún individuo sin empeorar a otro. La eficiencia de Pareto tiene tres dimensiones, que pueden examinarse por separado utilizando la caja de Edgeworth-Bowley introducida en el apartado 1.2.

Eficiencia en el consumo: en la caja de Edgeworth-Bowley en el espacio de bienes, la *curva de contratos en el consumo* es el lugar geométrico de los puntos de tangencia entre las curvas de indiferencia de ambos consumidores. Cada uno de esos puntos es una asignación en la que $\text{RMS}^A_{yx} = \text{RMS}^B_{yx}$. Esta condición de eficiencia no involucra precios, sino que es una propiedad puramente geométrica de las preferencias. En cualquier punto fuera de la curva de contratos, las curvas de indiferencia se cortan y delimitan una "lente" de asignaciones que mejorarían a ambos consumidores (figura A21.9), con lo que quedan ganancias del intercambio sin realizar. A lo largo de la curva de contratos, en cambio, toda mejora para un agente implica necesariamente un empeoramiento para el otro.

Eficiencia en la producción: de manera análoga, en la caja de Edgeworth-Bowley en el espacio de factores, la *curva de contratos en la producción* es el lugar geométrico de las tangencias entre isocuantas (figura A21.2), donde $\text{RMST}^1_{KL} = \text{RMST}^2_{KL}$. A lo largo de esta curva, la asignación de factores es Pareto-eficiente, ya que no es posible aumentar la producción de un bien sin reducir la del otro. De nuevo, esta es una condición técnica que no requiere la presencia de precios.

Eficiencia global: exige, además de la eficiencia en el consumo y en la producción, la eficiencia en la combinación de producto. La combinación de producto es eficiente si la tasa a la que los consumidores están dispuestos a intercambiar bienes (RMS) iguala la tasa a la que la economía puede transformar un bien en otro (RMT). Formalmente, $\text{RMS}_{ji} = \text{RMT}_{ji}$.

2.2.1. Primer teorema fundamental del bienestar (1TFEB)

Con preferencias localmente no saciables y sin fallos de mercado, todo equilibrio competitivo $(p^*, \mathbf{x}^*)$ es una asignación eficiente en el sentido de Pareto[10]. El teorema se ha visto como la formalización de la *mano invisible* de Adam Smith, si bien se refiere a la optimalidad paretiana y no necesariamente a la optimalidad social.

El 1TFEB establece el vínculo entre las condiciones de equilibrio (con precios) ya desarrolladas y las condiciones de eficiencia (sin precios) que se acaban de exponer. En el consumo, como se mostró en el apartado 1.2.1, cada consumidor iguala su RMS al precio relativo ($\text{RMS}^h_{yx} = p_x/p_y$ para todo h). Puesto que todos se enfrentan al mismo vector de precios, la condición de equilibrio ($\text{RMS}^A_{yx} = p_x/p_y = \text{RMS}^B_{yx}$) implica automáticamente la condición de eficiencia ($\text{RMS}^A_{yx} = \text{RMS}^B_{yx}$). Por ello, el equilibrio competitivo selecciona necesariamente un punto sobre la curva de contratos, una asignación Pareto-eficiente.

Lo mismo ocurre en la producción, donde la condición de equilibrio ($\text{RMST}^1_{KL} = w/r = \text{RMST}^2_{KL}$) implica la condición de eficiencia ($\text{RMST}^1_{KL} = \text{RMST}^2_{KL}$). Por último, la condición

[10] Los supuestos son la ausencia de fallos de mercado, los mercados completos y los agentes precio-aceptantes. En ese marco, basta la insaciabilidad local de las preferencias, sin necesidad de convexidad (Mas-Colell et al., 1995, pp. 549-550).

de equilibrio global $\text{RMS}_{ji} = p_i/p_j = \text{RMT}_{ji}$ implica $\text{RMS}_{ji} = \text{RMT}_{ji}$, con lo que se cumplen las tres dimensiones de la eficiencia.

Así, cuando cada agente persigue por separado lo que más le conviene y se orienta únicamente por el vector de precios, el resultado conjunto es una asignación en la que nadie puede ganar sin que otro pierda. Los precios, que aparecían como mecanismo de coordinación del equilibrio, resultan ser también el vehículo a través del cual se alcanza la eficiencia.

Del primer teorema se siguen cuatro corolarios:

1. *Eficiencia sin equidad*: el equilibrio competitivo no desperdicia recursos, aunque puede no ser equitativo.

2. *Eficiencia sin intervención*: el mercado alcanza por sí solo un óptimo de Pareto.

3. *Información mínima*: cada agente solo necesita conocer los precios para alcanzar el óptimo.

4. *Fallos de mercado*: el incumplimiento de las condiciones suficientes del teorema hace que el equilibrio pueda no ser eficiente, lo que puede justificar la intervención del Estado por motivos de eficiencia.

> La demostración general del teorema, que solo exige la no saciedad local de las preferencias, se desarrolla en el tema A22, apartado 2.1.

2.2.2. Segundo teorema fundamental del bienestar (2TFEB)

Bajo ciertas condiciones (convexidad de preferencias y conjuntos de producción)[11], cualquier óptimo de Pareto puede alcanzarse como equilibrio competitivo tras una redistribución adecuada de las dotaciones iniciales mediante transferencias de suma fija.

La curva de contratos contiene todas las asignaciones Pareto-eficientes, cada una de las cuales corresponde a una distribución diferente de bienestar entre los agentes. El 1TFEB garantiza que el equilibrio competitivo se sitúa sobre la curva de contratos, pero no dice qué punto de esa curva se alcanzará, algo que depende de las dotaciones iniciales. El 2TFEB completa el argumento al mostrar que cualquier punto de la curva de contratos puede ser alcanzado como equilibrio competitivo, siempre que se redistribuyan adecuadamente las dotaciones iniciales.

En la caja de Edgeworth-Bowley (figura A21.8), un cambio en la dotación inicial (una transferencia de suma fija que lleva W a W') modifica la posición de la recta presupuestaria y, con ello, selecciona como equilibrio un punto diferente de la curva de contratos, como $\mathbf{x}^*$. Así, el Gobierno podría elegir cualquier distribución de bienestar deseada sobre la curva de contratos, redistribuir las dotaciones *ex ante* mediante transferencias de suma fija, y dejar que el mecanismo competitivo alcance esa asignación como equilibrio descentralizado.

[11] La convexidad garantiza que la tangente común a las curvas de nivel en la caja de Edgeworth sea una recta de precios que sostiene el óptimo como equilibrio (Gravelle y Rees, 2004; Mas-Colell, Whinston y Green, 1995).

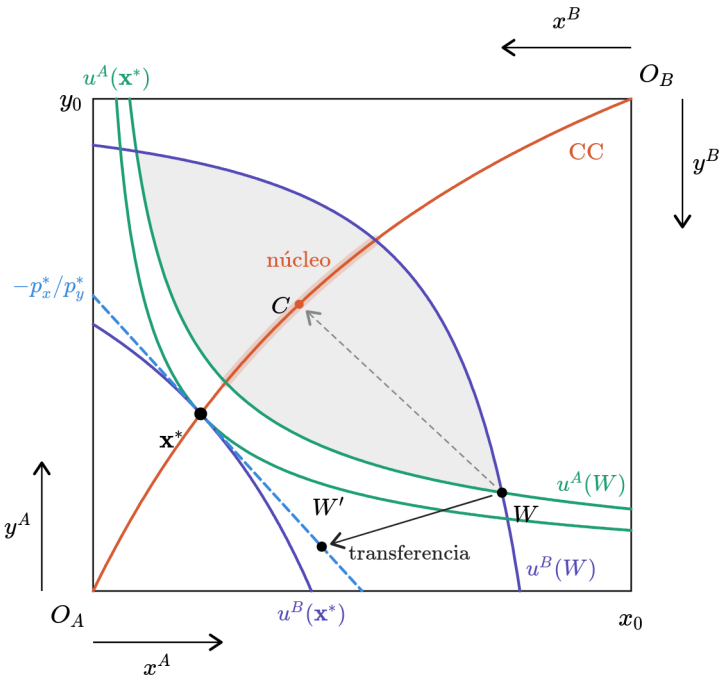


Figura A21.8: Segundo teorema fundamental del bienestar. Desde la dotación inicial W, el intercambio voluntario lleva a un punto del núcleo, como C, dentro de la lente entre $u^A(W)$ y $u^B(W)$. Una transferencia de suma fija lleva la dotación a W', y la recta de precios que pasa por W', de pendiente $-p_x^*/p_y^*$ y tangente en $\mathbf{x}^*$ a $u^A(\mathbf{x}^*)$ y $u^B(\mathbf{x}^*)$, sostiene como equilibrio competitivo ese otro punto de la curva de contratos (CC).

Del segundo teorema se siguen dos corolarios:

1. *Separación entre eficiencia y equidad*: un planificador benevolente redistribuye *ex ante* y deja actuar al mercado.

2. *Planificación Lange-Lerner*: con precios sombra, una autoridad central podría alcanzar, en teoría, los mismos resultados[12].

> La demostración del teorema mediante el teorema del hiperplano separador, el papel que en ella desempeña la convexidad y su representación gráfica en la caja de Edgeworth se desarrollan en el tema A22, apartado 2.2.

La tensión entre ambos teoremas, eficiencia sin equidad en el primero y redistribución previa de las dotaciones en el segundo, define el marco normativo del análisis del equilibrio general. Sin embargo, los corolarios afrontan dos objeciones prácticas. Las transferencias de suma fija exigen información sobre las características individuales de cada agente que ningún gobierno posee, y los instrumentos redistributivos disponibles (impuestos, subsidios) son inevitablemente distorsionantes, de modo que surge la disyuntiva entre eficiencia y equidad. En cuanto a la planificación, Hayek señaló los elevados costes de información que exigiría. Por ello, los dos teoremas juntos

[12] Barone (1908), siguiendo a Pareto, mostró que un "ministro de la producción" que fijase precios iguales al coste mínimo alcanzaría una asignación óptima.

definen un *ideal regulativo* (un punto de referencia teórico) más que una prescripción de política directamente aplicable.

2.3. Conclusiones

El análisis positivo establece que el sistema walrasiano tiene solución. La función del subastador es continua sobre el símplex de precios normalizados, de modo que tiene un punto fijo (Brouwer) que, por la ley de Walras, vacía los mercados de bienes escasos. La existencia no asegura, sin embargo, que el equilibrio sea único ni que el tanteo lo alcance. Ambas propiedades solo se garantizan con condiciones restrictivas, como el axioma débil de la preferencia revelada en el agregado o la sustituibilidad bruta, sin la cual el ajuste puede no converger (Scarf, 1960).

El análisis normativo enlaza las condiciones de equilibrio, que contienen precios, con las de eficiencia, que no los requieren. Con precios comunes para todos, el equilibrio competitivo es un óptimo de Pareto, y con convexidad cualquier óptimo puede sostenerse como equilibrio tras transferencias de suma fija. Estas transferencias exigen, no obstante, conocer las características de cada agente, de ahí que los teoremas sirvan de referencia más que de prescripción. El análisis supone, además, un subastador ficticio y una economía sin dinero ni incertidumbre, supuestos que levanta la sección 3.

3. Extensiones y aplicaciones

El modelo walrasiano admite varias extensiones: otros procesos de ajuste distintos del subastador, la introducción del dinero y de la incertidumbre, y las aplicaciones de los modelos de equilibrio general computable.

3.1. Procesos de ajuste distintos al subastador

Además del *tâtonnement* walrasiano, el equilibrio puede alcanzarse por otras vías, como el ajuste vía cantidades de Marshall y la negociación directa entre los agentes, sin acuerdos vinculantes o con ellos.

3.1.1. Ajuste vía cantidades (Marshall, 1890)

Origen: Alfred Marshall (1890) analizó el ajuste de un mercado aislado desde el lado de la producción, con la cantidad como variable que se ajusta.

Idea: los productores, y no un subastador, ajustan las cantidades según la diferencia entre el precio de demanda y el precio de oferta de la cantidad corriente.

Razonamiento: si el precio de demanda (lo que los consumidores están dispuestos a pagar por la cantidad corriente) supera al precio de oferta (el coste marginal de producirla), las empresas amplían la producción, y la reducen en el caso contrario. A diferencia del *tâtonnement*, el ajuste es gradual, se produce mercado a mercado y las transacciones se realizan a precios de desequilibrio (apartado 1.2.3).

> El mecanismo de ajuste marshalliano, sus condiciones de estabilidad y su comparación con el walrasiano se desarrollan, en equilibrio parcial, en el tema A16, apartados 2.4.2 y 2.4.4.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: se adapta bien a los mercados en los que la producción se decide antes de conocer el precio y se corrige de forma gradual, como los industriales.

- *Limitaciones*: es un análisis de equilibrio parcial, que no recoge la interdependencia entre mercados. Además, cuando la oferta y la demanda tienen pendientes del mismo signo, su criterio de estabilidad es el contrario del walrasiano.

3.1.2. Negociación bilateral sin acuerdos vinculantes: caja de Edgeworth-Bowley (Edgeworth, 1881; Bowley, 1924)

Origen: Francis Edgeworth (1881) introdujo las curvas de indiferencia y la curva de contratos en el análisis del intercambio entre dos agentes. Estas curvas se representan en la caja de Edgeworth-Bowley, dibujada por primera vez por Pareto en 1906 y popularizada por Bowley en 1924.

Idea: sin precios ni subastador, dos agentes que negocian libremente a partir de sus dotaciones intercambian hasta agotar las ganancias mutuas y acaban en un punto de la curva de contratos.

Razonamiento: la *caja de Edgeworth-Bowley* es un diagrama de las asignaciones factibles de un proceso de intercambio entre dos agentes (o de producción con dos factores). Las dimensiones de la caja están determinadas por las dotaciones totales, y la condición de factibilidad es $x^A + x^B = X$, $y^A + y^B = Y$.

La curva de contratos reúne las asignaciones Pareto-eficientes (apartado 2.2). Desde cualquier asignación fuera de la curva de contratos, existen intercambios mutuamente beneficiosos (la "lente" entre las curvas de indiferencia que pasan por la asignación inicial). Por eso, los individuos negocian hasta alcanzar una asignación sin ganancias potenciales, en el tramo de la curva de contratos comprendido dentro de esa lente. Sin embargo, qué punto de ese tramo se alcanza depende del poder de negociación de cada agente, de modo que el resultado es indeterminado.

Desarrollo gráfico: la negociación bilateral se representa en el plano bien x-bien y de la caja de Edgeworth-Bowley (figura A21.9):

1. *Dotación inicial*: el punto W, cuyas cantidades se miden desde O_A para el agente A y desde O_B para el agente B.

2. *Curvas de indiferencia por la dotación*: $u^A(W)$ reúne las cestas que dan a A la misma utilidad que su dotación, y $u^B(W)$, las que dan a B la misma utilidad que la suya. Las dos curvas se cortan en W y encierran la lente de mejoras paretianas.

3. *Curva de contratos* (CC): une las tangencias entre las curvas de indiferencia de ambos agentes, las asignaciones Pareto-eficientes.

4. *Equilibrio*: la negociación termina en el núcleo, el tramo de CC comprendido dentro de la lente, y el punto exacto depende del poder de negociación de cada agente.

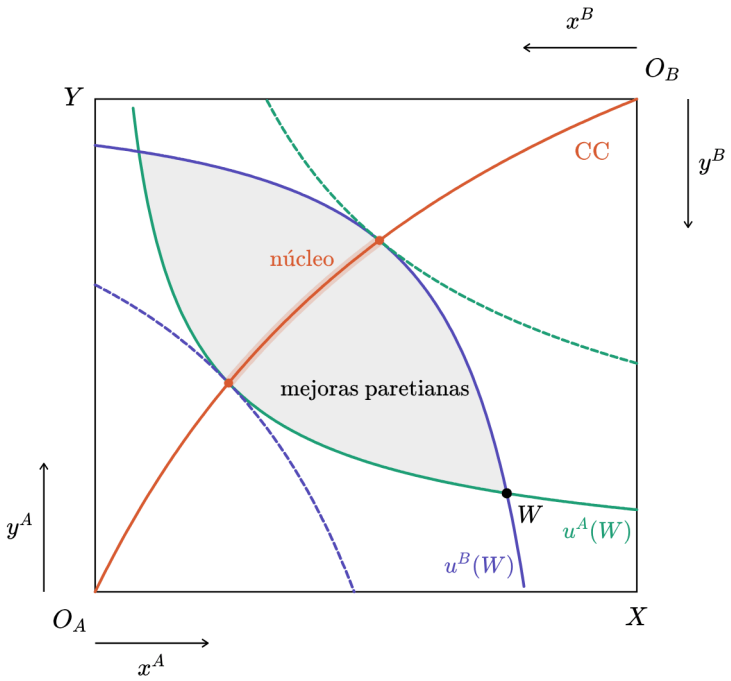


Figura A21.9: Negociación en la caja de Edgeworth-Bowley. El núcleo es el segmento de la curva de contratos limitado por las curvas de indiferencia que pasan por la dotación inicial.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: muestra que el intercambio voluntario agota las ganancias mutuas y conduce a una asignación eficiente sin necesidad de precios, y ofrece la herramienta gráfica básica del análisis del equilibrio general y del bienestar.

- *Limitaciones*: con solo dos agentes, el resultado queda indeterminado y depende del poder de negociación, y el diagrama no admite más de dos agentes y dos bienes.

3.1.3. Negociación con acuerdos vinculantes: coaliciones y núcleo (Debreu y Scarf, 1963)

Origen: Edgeworth (1881) conjeturó que el tramo de la curva de contratos alcanzable por negociación se reduce a medida que aumenta el número de agentes, y Debreu y Scarf (1963) lo demostraron con generalidad.

Idea: cuando los agentes pueden formar coaliciones con acuerdos vinculantes, solo sobreviven las asignaciones que ninguna coalición puede mejorar por su cuenta, y en una economía grande esas asignaciones son las del equilibrio competitivo.

Razonamiento: el *núcleo económico* es el conjunto de asignaciones alcanzables no bloqueadas por ninguna coalición, de modo que toda asignación del núcleo es individualmente racional (no la bloquea ningún agente aislado) y Pareto-eficiente (no la bloquea la coalición formada por todos los agentes).

Debreu y Scarf (1963) demostraron que, partiendo de cualquier número finito de agentes y bienes, si se replica la economía infinitamente, el núcleo converge al conjunto de asignaciones de equilibrio competitivo. Además, la asignación walrasiana pertenece al núcleo, lo que demuestra que ningún grupo desearía retirarse para comerciar entre sus miembros.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: ofrece una validación de la competencia perfecta en un entorno más general y natural, pues, aunque la aproximación de Walras es menos realista que la de Edgeworth, en el límite los resultados coinciden. Los precios competitivos surgen así de la negociación entre muchos agentes, sin necesidad de subastador.

- *Limitaciones*: el resultado es asintótico, porque exige replicar la economía hasta el infinito, y con pocos agentes el núcleo puede ser amplio. El modelo supone, además, que formar coaliciones no tiene coste.

3.2. Modelo de equilibrio general con dinero

Según cómo modelicen el dinero, los modelos de equilibrio general son de dos tipos:

- *Modelos no monetarios*: en los que no aparece el dinero (economía de trueque) o en los que aparece, pero como un bien más.

- *Modelos monetarios*: en los que el dinero aparece como una entidad con su propia naturaleza (p. ej. dinero fiat). Este último caso es de especial interés, dado que las economías actuales son monetarias, con dinero fiduciario cuya base emite en monopolio el banco central.

La modelización del dinero en el equilibrio general ha seguido dos tradiciones principales. Desde la perspectiva neoclásica, el dinero queda fuera de la economía real y se mantiene la dicotomía entre el sector real (determinado por precios relativos) y el sector monetario (que fija el nivel absoluto de precios). Desde perspectivas posteriores, generalmente keynesianas o poskeynesianas, el dinero se integra, en cambio, en la economía real y su presencia afecta a las decisiones de los agentes, lo que exige una modelización diferente.

3.2.1. Tradición neoclásica y dicotomía clásica

Origen: los autores fieles a la teoría neoclásica incorporaron el dinero al sistema walrasiano a partir de la teoría cuantitativa, en la versión de los saldos de caja de la escuela de Cambridge (tema A35, apartado 1.1.2).

Idea: cada agente demanda como saldos monetarios una fracción del valor de su riqueza, de modo que el dinero se añade al sistema como un mercado más, que fija el nivel absoluto de precios sin alterar la determinación de los precios relativos (dicotomía clásica).

Razonamiento: formalmente, la demanda individual de saldos monetarios puede escribirse como:

$$m^{d,h} = k\left(\sum_i p_i x_{i0}^h + \sum_l p_l^z z_{l0}^h\right)$$

donde $m^{d,h}$ refleja la demanda de dinero del agente h y $k \in (0,1)$ es la fracción de riqueza (o renta) que el agente desea mantener en forma de saldos monetarios, es decir, el inverso de la velocidad de circulación en la tradición de Cambridge. El término entre paréntesis recoge el valor de mercado de las dotaciones del agente. Agregando sobre todos los agentes, se obtiene la demanda agregada de dinero $M^d = k \cdot PY$, donde P es el nivel general de precios e Y la renta real.

A partir de esta idea, se puede introducir una condición de vaciado en el mercado monetario con la función de exceso de demanda $Z_M = M^d - M^s = 0$. Sin embargo, la demanda de dinero así definida es homogénea de grado uno en precios, y, con M^s dado, el exceso de demanda de dinero no es homogéneo de grado cero. Si todos los precios se duplican, la demanda de dinero se duplica, puesto que los agentes necesitan el doble de saldos nominales para financiar las mismas transacciones reales.

La inconsistencia aparece al combinar esa función con la ley de Walras (Patinkin, 1956). Si los excesos de demanda de bienes dependen solo de los precios relativos (son homogéneos de grado cero) y la suma de todos los excesos de demanda valorados, dinero incluido, es idénticamente nula, el exceso de demanda de dinero queda determinado por los de los bienes:

$$Z_M = -\sum_i p_i Z_i(\mathbf{p})$$

Una vez vaciados los mercados de bienes, $Z_M = 0$ se cumple, por tanto, para cualquier nivel de precios. En cambio, la ecuación de Cambridge, $Z_M = kPY - M^s$, solo se anula en un nivel concreto, $P = M^s/(kY)$. Las dos condiciones son incompatibles, de modo que el sistema es inconsistente o deja indeterminado el nivel absoluto de precios. Patinkin resuelve la inconsistencia haciendo depender las demandas de bienes de los saldos reales, M/P.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: integra el dinero en el equilibrio general con un supuesto sencillo y coherente con la teoría cuantitativa, y separa la determinación de los precios relativos, en el sector real, de la del nivel absoluto de precios, en el sector monetario.

▪ *Limitaciones*: la dicotomía es inválida en sentido estricto, porque, con la ley de Walras, el sector real no puede determinar los precios relativos sin determinar a la vez el equilibrio del mercado de dinero, que entonces ya no fija el nivel absoluto de precios.

3.2.2. La controversia Patinkin (1956)

Origen: Don Patinkin (1956) intentó resolver la inconsistencia de la dicotomía clásica e integrar la teoría monetaria con la walrasiana.

Idea: su contribución central fue incorporar al equilibrio general walrasiano el *efecto saldos reales* (efecto Pigou), extendido a todas las funciones de exceso de demanda. Según este efecto, los saldos monetarios reales M/P entran directamente en la función de utilidad de los consumidores y, por esa vía, influyen en las decisiones de demanda de bienes.

Razonamiento: de este modo, un cambio en el nivel de precios altera la riqueza real de los agentes (medida en términos de su poder adquisitivo monetario), lo que modifica sus demandas de bienes y servicios. De ahí que el sector monetario y el sector real dejen de estar dicotomizados.

Formalmente, Patinkin añadió una ecuación que hace del nivel general de precios una media ponderada, $P = \sum \omega_i p_i$ ($\omega_i \in (0,1)$, $\sum \omega_i = 1$). Después expresó todas las funciones de exceso de demanda (bienes y dinero) como funciones de los precios deflactados por P:

$$Z_i = f_i\left(\frac{p_1}{P}, \frac{p_2}{P}, \ldots, \frac{M}{P}\right) \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

Con ello se obtienen dos resultados, que resuelven la inconsistencia de la dicotomía clásica:

▪ *Determinación del sistema*: con $n+2$ ecuaciones, una de ellas redundante por la ley de Walras, y $n+1$ incógnitas, pueden calcularse los precios absolutos.

▪ *Homogeneidad de grado cero*: ahora lo son todas las funciones de exceso de demanda, tomando como argumentos los precios absolutos y el dinero. Multiplicar por un mismo factor cada precio y M no altera ni los precios relativos ni los saldos reales, así que tampoco cambian las cantidades demandadas.

Extensiones: Patinkin observó además que, si el dinero no reporta utilidad alguna, no hay razón para que los agentes mantengan saldos monetarios. Por ello, una forma habitual de fundamentar teóricamente el dinero es incluirlo en la función de utilidad (*money in utility*), aunque existen otras (la restricción de liquidez o *cash-in-advance*, las generaciones solapadas o los modelos de búsqueda). Dar al dinero un papel propio exige levantar supuestos neoclásicos (p. ej. información perfecta, mercados completos), dado que en un mundo de información perfecta y sin costes de transacción, los agentes podrían intercambiar bienes directamente sin necesidad de dinero.

El dinero solo adquiere, por tanto, un papel económico sustantivo cuando existen fricciones (incertidumbre, costes de transacción, asimetrías de información) que hacen del medio de pago un activo con valor propio. Estas observaciones fueron centrales para el desarrollo de los neokeynesianos del desequilibrio, que enfatizaron las consecuencias de las transacciones a precios de no equilibrio, y para la nueva economía keynesiana (NEK), que modeló explícitamente las rigideces nominales y las fricciones de mercado.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: integra el dinero en el sistema walrasiano y permite determinar los precios absolutos sin perder la homogeneidad de grado cero, con lo que muestra que la neutralidad del dinero es compatible con el abandono de la dicotomía clásica. El efecto saldos reales se incorporó, además, a la síntesis neoclásica.

▪ *Limitaciones*: incluir el dinero en la función de utilidad es un atajo que postula su demanda sin derivarla de las fricciones que le dan un papel sustantivo. Además, el efecto saldos reales en que se apoya es débil en la práctica, pues exige caídas de precios muy intensas para alterar la demanda de forma apreciable (tema A04, apartado 3.1).

3.3. Modelo de equilibrio general en incertidumbre (Arrow-Debreu)

Origen: Arrow (1953) y Debreu (*Theory of Value*, 1959) llevaron el modelo walrasiano a un mundo incierto, en el que los bienes de que se dispondrá mañana dependen de qué estado de la naturaleza se dé, algo que ningún agente controla.

Idea: basta redefinir los bienes para que la teoría con certidumbre se aplique sin cambios. Para ello, un mismo bien físico disponible en fechas o estados de la naturaleza distintos se trata como bienes distintos, los *bienes contingentes*, definidos por su especificación física, su fecha y su estado de la naturaleza[13].

Razonamiento: para probar que el EGC existe también con incertidumbre, Debreu (1959) necesitó tres requisitos. Debe haber un mercado para cada bien contingente concebible (mercados completos), las preferencias sobre esos bienes han de ser convexas (lo que, con utilidad esperada, equivale a aversión al riesgo) y siguen exigiéndose los axiomas de preferencias del caso con certidumbre.

Por su parte, Arrow (1953), en una economía de intercambio, probó que no hace falta un mercado para cada bien contingente. Basta, en efecto, un título por estado de la naturaleza, pagadero en dinero, junto con mercados al contado abiertos una vez conocido el estado, para que la competencia asigne el riesgo de forma eficiente (tema A10, apartado 1.4.2). Hacen falta así $S + C$ mercados en lugar de $S \times C$, con S estados y C bienes.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: extiende la existencia y la eficiencia del equilibrio competitivo a la incertidumbre sin nuevos instrumentos analíticos, y ofrece el marco de referencia de la asignación del riesgo a través de los mercados.

▪ *Limitaciones*: necesita mercados completos, un mercado para cada bien contingente o, con Arrow (1953), un título para cada estado de la naturaleza, algo que ninguna economía real ofrece. Además, supone que todos los agentes tienen la misma información, de modo que deja fuera el riesgo moral y la selección adversa[14].

[13] Esto amplía la lista de bienes pero no afecta a las propiedades de los conjuntos de producción, ya que la empresa elige el plan de producción que maximiza su beneficio, valorado a los precios de los bienes contingentes, sin necesidad de considerar probabilidades.

[14] Si la estructura informacional puede cambiar entre periodos, el modelo de Debreu no es válido, porque los mercados se reabrirían, y el modelo exige que se abran y cierren definitivamente en el periodo inicial.

3.4. Aplicaciones

Desde la década de 1970, tras el algoritmo de Scarf (1967), los **modelos de equilibrio general computable** (MEGC) han permitido aplicar la teoría a la práctica. Sus principales aplicaciones son las siguientes:

Modelos de crecimiento y decisión intertemporal: aplican el marco de equilibrio general a las decisiones de consumo, ahorro e inversión a lo largo del tiempo, como los modelos de horizonte infinito y de generaciones solapadas (tema A29, apartados 3.1 y 3.2).

Comercio internacional: se evalúa el impacto de las barreras comerciales sobre los salarios reales y el bienestar (tema B07, apartado 2.3), con estudios sobre el TLCAN, sustituido en 2020 por el Tratado entre México, Estados Unidos y Canadá (T-MEC), y sobre el TTIP. Las negociaciones del TTIP se interrumpieron en 2016, y el Consejo declaró obsoletas sus directrices de negociación en 2019. Estos modelos son también el instrumento habitual de la evaluación *ex ante* de los acuerdos de integración (tema B10, anexo A.1).

Política tributaria: los MEGC permiten evaluar el impacto de cambios impositivos y de transferencias sobre el conjunto de la economía, como en los modelos de equilibrio general con sector público (tema A38, apartado 1.2).

Política medioambiental: los modelos de equilibrio general aplicado permiten simular los efectos de las políticas medioambientales sobre todos los sectores a la vez, como hizo el modelo GREEN de la OCDE (1992) para las políticas de reducción de emisiones. El fundamento de estas políticas es la corrección de externalidades (tema A23, apartado 2.2.5).

Planificación regional y urbana: los MEGC incorporan costes de transporte y movilidad laboral, como en la nueva economía geográfica (tema B10, apartado 3.1.4).

Modelos institucionales actuales: numerosas instituciones utilizan modelos de equilibrio general (p. ej. QUEST, de la Comisión Europea, o el NAWM, del BCE). QUEST y el NAWM son modelos dinámicos estocásticos de equilibrio general (DSGE), como los de los temas A06, apartado 2.3, y A07, apartado 2.1. En cambio, otros modelos muy utilizados para la economía mundial, como el NiGEM del National Institute of Economic and Social Research (NIESR), son modelos macroeconométricos y no de equilibrio general en sentido estricto.

Conclusiones

La teoría del equilibrio general estudia la economía como un sistema de mercados interdependientes. En el modelo walrasiano, consumidores y empresas precio-aceptantes optimizan frente a un vector común de precios, que coordina sus decisiones e iguala sus valoraciones marginales, y la ley de Walras deja un mercado redundante, de modo que solo se determinan precios relativos. El teorema del punto fijo de Brouwer garantiza la existencia del equilibrio, y la sustituibilidad bruta, su unicidad y su estabilidad. Por el primer teorema del bienestar, el equilibrio es eficiente en el sentido de Pareto, y por el segundo, cualquier óptimo puede alcanzarse redistribuyendo las dotaciones, aunque la imposibilidad práctica de las transferencias de suma fija hace del marco un ideal regulativo.

El equilibrio general extiende a todos los mercados el análisis de la competencia perfecta en equilibrio parcial (tema A16) y es la base del análisis normativo. Las condiciones de eficiencia y los teoremas del bienestar precisan qué garantiza el equilibrio walrasiano (tema A22), y los fallos de mercado, cuándo deja de hacerlo (tema A23). La introducción del dinero plantea por qué se demanda un activo sin rendimiento propio (tema A35), y los bienes contingentes de Arrow y Debreu trasladan al marco la elección con riesgo (tema A10). Por último, el mismo razonamiento sobre mercados interdependientes fundamenta los modelos DSGE de la macroeconomía (tema A06) y el análisis de la política comercial en la economía internacional (tema B07).

Los fundamentos del equilibrio agregado siguen en discusión. El teorema de Sonnenschein, Mantel y Debreu (1972-1974) muestra que la optimización individual apenas restringe la forma de la función de exceso de demanda agregada, de modo que la unicidad y la estabilidad no están garantizadas en general. La macroeconomía ha respondido sustituyendo el agente representativo por agentes heterogéneos, como en los modelos neokeynesianos HANK (*heterogeneous agent New Keynesian*) de Kaplan, Moll y Violante (2018). Sigue abierta, además, la cuantificación de las ganancias del comercio. En una amplia clase de modelos cuantitativos de comercio, esas ganancias dependen solo de la participación del gasto interior y de la elasticidad del comercio (Arkolakis, Costinot y Rodríguez-Clare, 2012). El resultado ha renovado el uso del equilibrio general para evaluar aranceles y acuerdos comerciales.

Anexo. Ejemplos resueltos

Los ejercicios de equilibrio general en una economía de intercambio siguen casi siempre los mismos pasos. Primero, cada consumidor iguala su RMS al precio relativo y combina esa condición con su restricción presupuestaria, cuya renta es el valor de su dotación, para obtener sus demandas. Después, se vacía un mercado (el otro se vacía por la ley de Walras) y se despeja el precio relativo de equilibrio. Por último, se calcula la asignación y se comprueba que las RMS coinciden. En todos los ejemplos, y es el numerario ($p_y = 1$) y $p \equiv p_x/p_y$.

Ejemplo: demandas Cobb-Douglas con pesos distintos y curva de contratos

Sean $u^A = (x^A)^{1/3}(y^A)^{2/3}$, con dotación $(x_0^A, y_0^A) = (6, 0)$, y $u^B = (x^B)^{1/2}(y^B)^{1/2}$, con dotación $(x_0^B, y_0^B) = (0, 6)$, de modo que la caja mide $X = Y = 6$. Las rentas son $M_0^A = 6p$ y $M_0^B = 6$.

Para A, la condición de tangencia es

$$\mathrm{RMS}_{yx}^A = \frac{\partial u^A/\partial x^A}{\partial u^A/\partial y^A} = \frac{y^A}{2x^A} = p \;\Rightarrow\; y^A = 2p\,x^A$$

y, sustituida en la restricción $p\,x^A + y^A = M_0^A$, da $x^A = M_0^A/(3p)$ e $y^A = 2M_0^A/3$. Para B, $\mathrm{RMS}_{yx}^B = y^B/x^B = p$ da $x^B = M_0^B/(2p)$ e $y^B = M_0^B/2$. En general, con $u = x^a y^{1-a}$ el consumidor gasta en cada bien una fracción fija de su renta, a en x y $1-a$ en y.

Vaciando el mercado de x:

$$\frac{6p}{3p} + \frac{6}{2p} = 6 \;\Rightarrow\; 2 + \frac{3}{p} = 6 \;\Rightarrow\; p^* = \frac{3}{4}$$

Con $p^* = 3/4$, las rentas son $M_0^A = 9/2$ y $M_0^B = 6$, y la asignación de equilibrio es $(x^A, y^A) = (2, 3)$ y $(x^B, y^B) = (4, 3)$, que vacía también el mercado de y. Ambas RMS valen $3/4$, el precio relativo.

La curva de contratos reúne las asignaciones en las que las RMS coinciden. Con $x^B = 6 - x^A$ e $y^B = 6 - y^A$:

$$\frac{y^A}{2x^A} = \frac{6 - y^A}{6 - x^A} \;\Rightarrow\; y^A = \frac{12\,x^A}{6 + x^A}$$

Une los vértices $(0, 0)$ y $(6, 6)$ de la caja y pasa por la asignación de equilibrio, pues $12{\cdot}2/(6{+}2) = 3$.

Ejemplo: preferencias cuasilineales, sin efecto renta

Sean $u^h = \alpha_h \ln x^h + y^h$, con $\alpha_A = 2$ y $\alpha_B = 4$, y dotaciones $(x_0^A, y_0^A) = (5, 2)$ y $(x_0^B, y_0^B) = (1, 6)$, de modo que $X = 6$ e $Y = 8$. La condición de tangencia,

$$\mathrm{RMS}_{yx}^h = \frac{\alpha_h}{x^h} = p \;\Rightarrow\; x^h = \frac{\alpha_h}{p}, \qquad y^h = M_0^h - \alpha_h$$

da una demanda de x que no depende de la renta, siempre que esta alcance para pagarla ($M_0^h \geq \alpha_h$). Vaciando el mercado de x, $(2 + 4)/p = 6$, de modo que $p^* = 1$. Las rentas son $M_0^A = M_0^B = 7$, y la asignación es $(x^A, y^A) = (2, 5)$ y $(x^B, y^B) = (4, 3)$.

El precio de equilibrio, $p^* = (\alpha_A + \alpha_B)/X$, no depende del reparto de las dotaciones, que solo altera el reparto del numerario. Por la misma razón, la curva de contratos, $\alpha_A/x^A = \alpha_B/(X-x^A)$, es la recta vertical $x^A = 2$.

Ejemplo: complementarios perfectos, sin RMS definida en el óptimo

Sean $u^A = \min\{x^A, y^A\}$, con dotación $(4,0)$, y $u^B = (x^B)^{1/2}(y^B)^{1/2}$, con dotación $(0,4)$. Las curvas de indiferencia de A forman un ángulo recto, de modo que su RMS no está definida en el vértice y la tangencia no sirve. Su óptimo está siempre en el vértice, $x^A = y^A$, y con la restricción $p\,x^A + y^A = 4p$ resulta $x^A = y^A = 4p/(1+p)$. Para B, como en el primer ejemplo, $x^B = 4/(2p)$ e $y^B = 2$.

Vaciando el mercado de x:

$$\frac{4p}{1+p} + \frac{2}{p} = 4 \;\Rightarrow\; 4p^2 + 2p + 2 = 4p^2 + 4p \;\Rightarrow\; p^* = 1$$

La asignación es $(x^A, y^A) = (2,2)$ y $(x^B, y^B) = (2,2)$. La RMS de B iguala el precio relativo, y la recta de balance pasa por el vértice de la curva de indiferencia de A, que es su óptimo para cualquier precio.

A22. Economía del bienestar (I)

Economía del bienestar (I). Los teoremas fundamentales del bienestar. Óptimo económico y *second best*.

Introducción

La preocupación por si las asignaciones de recursos que resultan del mercado son buenas o malas para la sociedad ha acompañado a la economía desde los primeros autores que estudiaron el mercado como mecanismo de asignación, y ya santo Tomás de Aquino se preguntaba por el precio justo. Dentro de la teoría económica, la **economía del bienestar** recoge esa preocupación y se ocupa de juzgar si las asignaciones de recursos y las decisiones propias de un sistema económico son deseables para el conjunto de la sociedad. Cumple, por un lado, una función *positiva*, que responde a la pregunta de cómo medir el bienestar social, y, por otro, una función *normativa*, que responde a la de cómo alcanzar el máximo bienestar social.

En cuanto a la primera pregunta, el **utilitarismo** de Jeremy Bentham fue la corriente dominante a partir de las últimas décadas del siglo XVIII. Para esta doctrina, el **óptimo social** es la mayor felicidad para el mayor número, y el bienestar colectivo resulta de sumar el de cada persona. La escuela de Cambridge (Sidgwick, Marshall, Pigou) prolongó esa línea con dos supuestos, la utilidad medible que ya admitían los primeros marginalistas y la posibilidad de comparar utilidades entre personas, e hizo del **excedente** su concepto central. Para eludir los juicios de valor que esos supuestos exigían, Vilfredo Pareto (*Manual de economía política*, 1906) propuso un criterio de unanimidad que hace innecesarias las comparaciones de utilidad entre personas. Según ese criterio, una asignación es un **óptimo de Pareto** si ningún agente puede mejorar sin que otro empeore. Precisamente porque requiere tan pocos juicios de valor, el criterio de Pareto acabó siendo el patrón con el que se mide si una asignación es eficiente.

En cuanto a la segunda pregunta, se suceden tres enfoques:

1. *Teoría tradicional del bienestar* (Walras, Barone, Pareto): propia de la escuela de Lausana, defiende el *laissez faire* siempre que se den las condiciones para la eficiencia, aunque admite la intervención cuando no se cumplen. Sus criterios son, sin embargo, incompletos.

2. *Nueva economía del bienestar* (años treinta y cuarenta): comprende la escuela de Harvard (Bergson, Samuelson), que se apoya en la función de bienestar social; la London School of Economics (Kaldor, Hicks, Scitovsky), que recurre a las compensaciones potenciales; y el neocardinalismo (Little, Robertson), que combina la compensación con la medición cardinal.

3. *Novísima economía del bienestar* (desde los años cincuenta): abarca los criterios basados en la elección colectiva y la votación (Arrow) y los basados en la teoría del *second best* (Meade, Lipsey, Lancaster, Viner).

Este tema estudia los fundamentos de la economía del bienestar en tres pasos:

- *El óptimo económico*: los criterios de Pareto y las condiciones de eficiencia en una economía competitiva.

- *Los teoremas fundamentales del bienestar*, la medición de las pérdidas de bienestar cuando sus supuestos no se cumplen y los intentos de superar la indeterminación del óptimo de Pareto mediante los criterios de compensación y la función de bienestar social.

- *La teoría del second best* (segundo óptimo) y sus implicaciones para la política económica.

1. El óptimo económico: los criterios de Pareto y las condiciones de eficiencia

La economía del bienestar parte del criterio de eficiencia de Pareto, con el que se ordenan asignaciones sin comparar utilidades entre personas. El primer resultado es la caracterización del **óptimo económico**, es decir, de las condiciones que una asignación ha de cumplir para ser eficiente en la producción, en el consumo y en la relación entre ambos.

1.1. Los criterios de Pareto (1906)

Origen: la definición habitual de eficiencia en economía se corresponde con la *eficiencia en el sentido de Pareto*, formulada por Vilfredo Pareto (1906).

Su aportación no puede entenderse al margen del problema que venía a resolver. Hasta entonces, la economía del bienestar, heredera de Bentham y de Marshall, juzgaba una política por el cambio que producía en la suma de utilidades individuales. Para que esa suma tuviera sentido, la utilidad debía ser cardinal, es decir, medible de forma que sus diferencias tuvieran significado, y además comparable entre personas, para poder sostener que lo que uno pierde queda compensado por lo que otro gana. Pareto, sin embargo, consideraba insostenibles ambos supuestos.

Idea: Pareto sustituye la utilidad cardinal por la ordinal (para la utilidad económica acuñó el término *ofelimidad*) y construye un criterio de evaluación que no requiere comparaciones interpersonales. Por eso, si nadie empeora y alguien mejora, el juicio es incontrovertible con independencia de cómo se midan las utilidades.

Esa es su fuerza y también su límite. Pareto formuló, en realidad, dos criterios encadenados:

1. *Relación de comparación*: la *superioridad de Pareto*, que se aplica a dos asignaciones concretas.

2. *Propiedad de una asignación*: la optimalidad o eficiencia de Pareto, que caracteriza una asignación respecto del conjunto de todas las factibles y se define precisamente a partir de la primera.

Ambos criterios recaen sobre la *asignación económica*, es decir, una lista de magnitudes que describe el estado de una economía, de un mercado o de un proceso productivo. Son ejemplos una cesta de bienes, una combinación de factores, un plan de producción o un reparto de utilidades entre individuos.

1.1.1. Supuestos

Los criterios de Pareto, y con ellos toda la economía del bienestar de tradición paretiana, descansan en cuatro supuestos, cada uno de los cuales ha recibido una crítica.

Independencia del proceso: lo que se juzga es el resultado, y no los mecanismos con que se han asignado los recursos. La evaluación se define sobre el conjunto de asignaciones factibles sin valorar cómo se ha llegado a ellas.

Ahora bien, la sociedad puede atribuir valor al procedimiento en sí, como expresa la democracia, y no solo al resultado. Que una asignación resulte de intercambios libremente consentidos, por ejemplo, es deseable con independencia de la cesta que reciba cada individuo.

Individualismo: el bienestar social depende exclusivamente del bienestar de los individuos, de modo que la organización de la producción solo resulta relevante en cuanto los afecta[1].

Sin embargo, una estructura de mercado como el monopolio puede considerarse indeseable en sí misma, al margen de sus efectos sobre las utilidades individuales, y el individualismo no permite expresar ese juicio.

No paternalismo: nadie sabe mejor que el propio individuo qué le conviene, de modo que la evaluación parte de las utilidades tal como cada cual las declara y el planificador no añade preferencias suyas.

El supuesto no se sostiene en el caso de los bienes preferentes (*merit goods*) de Musgrave (1959) y de las adicciones, en los que las preferencias declaradas pueden no reflejar el interés del propio individuo.

Benevolencia: un aumento de la utilidad de un individuo, *ceteris paribus*, mejora el bienestar social.

No obstante, la benevolencia no emite juicio alguno sobre la desigualdad resultante, de modo que una mejora concentrada en quien ya estaba mejor cuenta exactamente igual que cualquier otra[2].

Con base en estos supuestos, Pareto desarrolla sus criterios, la superioridad y la eficiencia en el sentido de Pareto.

1.1.2. La dominancia de Pareto: formulación general y ámbitos de aplicación

Antes de aplicar los criterios conviene precisar su alcance, pues su formulación es más general de lo que sugiere la exposición habitual. La **dominancia de Pareto** no es una relación entre individuos, sino una relación de orden parcial entre vectores.

Formalmente, sean $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ y $\mathbf{v}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ dos vectores de magnitudes deseables. Se dice que $\mathbf{v}$ domina en el sentido de Pareto a $\mathbf{v}'$ si

$$v_i \geq v'_i \;\; \forall i = 1, \dots, n \qquad \text{y} \qquad \exists\, j : v_j > v'_j$$

donde v_i y v'_i son las componentes de ambos vectores y n el número de dimensiones comparadas. Como la relación de preferencia del consumidor (tema A08, apartado 1.1.2), la dominancia es transitiva, pues si $\mathbf{v}$ domina a $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{v}'$ a $\mathbf{v}''$, también $\mathbf{v}$ domina a $\mathbf{v}''$. A diferencia de la relación de preferencia, la dominancia no es completa, ya que dos vectores en los que cada uno supera al otro en alguna componente no pueden ordenarse, y de ahí que se trate de un orden parcial.

La definición significa que, dados dos vectores que indican asignaciones económicas de magnitudes deseables, uno domina al otro si es al menos igual en todas sus componentes y estrictamente mayor en alguna. Lo único que se requiere es que todas las componentes sean "bienes", en el sentido de que más sea preferible a menos.

De ello se sigue que el criterio no exige la presencia de dos individuos. Lo que cambia de un ámbito a otro no es la relación, sino el contenido del vector sobre el que se aplica. Esto puede entenderse a través de la tabla A22.1.

[1] No importa *per se* si un producto lo produce una empresa grande o muchas pequeñas, o si son privadas o públicas. Implícitamente se supone que la organización industrial es necesariamente eficiente (Tirole, 1988, p. 7).

[2] Las asignaciones justas en el sentido de Foley-Varian, que son Pareto-eficientes y sin envidia, se estudian en el tema A24, apartado 1.3.2.

Tabla A22.1: Dominancia de Pareto según el ámbito de aplicación.

Ámbito	Vector sobre el que opera	Dimensiones comparadas	Frontera de los no dominados
Producción (eficiencia técnica)	Plan de producción $(-\text{inputs}, \text{outputs})$	Factores y productos de una unidad productiva	Función de producción o isocuanta
Producción (eficiencia productiva)	Cantidades producidas (x, y)	Bienes entre sí, dados los recursos	Frontera de posibilidades de producción (FPP) o curva de transformación
Consumo (eficiencia en el intercambio)	Utilidades de los consumidores	Individuos, dadas las dotaciones	Frontera de posibilidades de utilidad (FPU), imagen de la curva de contratos
Global (eficiencia asignativa)	Utilidades de los individuos $(u^1, \dots, u^H)$	Individuos, considerando producción y consumo	Gran frontera de posibilidades de utilidad (GFPU)

Del cuadro se derivan dos precisiones, que evitan las confusiones más frecuentes:

1. *Primera*: la *eficiencia económica o en costes* no es un criterio de Pareto. Mientras los anteriores son relaciones de dominancia que no requieren precios, la eficiencia en costes es un problema de optimización que consiste en elegir, de entre los planes técnicamente eficientes, aquel que minimiza el coste dados los precios de los factores. Su representación es la tangencia entre isocuanta e isocoste, y exige por tanto información que los criterios de Pareto no necesitan. De ahí que la eficiencia técnica sea condición necesaria pero no suficiente de la económica[3].

2. *Segunda*: cuando se habla de óptimo de Pareto sin calificativo, se entiende referido al vector de utilidades, es decir, a la *eficiencia asignativa*. Esta es la más exigente de todas, pues requiere que se cumplan simultáneamente las tres condiciones que se examinan en el apartado 1.2, es decir, la eficiencia en la producción, la eficiencia en el consumo y la coincidencia entre lo que se produce y lo que se desea consumir. El equilibrio competitivo verifica precisamente esas tres, conforme al primer teorema del bienestar (apartado 2.1).

1.1.3. Superioridad de Pareto

La relación anterior se aplica ahora al vector de utilidades, $\mathbf{v} = (u^1(\mathbf{x}), \dots, u^H(\mathbf{x}))$. Dadas dos asignaciones factibles $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$, se dice que $\mathbf{x}$ es **superior en el sentido de Pareto** a $\mathbf{x}'$ si ningún individuo de la economía prefiere $\mathbf{x}'$ a $\mathbf{x}$ y al menos uno prefiere estrictamente $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}'$. Formalmente, siendo u^h la función de utilidad del individuo h y H el número de individuos:

$$u^h(\mathbf{x}) \geq u^h(\mathbf{x}') \;\; \forall h = 1, \dots, H \qquad \text{y} \qquad \exists\, j : u^j(\mathbf{x}) > u^j(\mathbf{x}')$$

El paso de $\mathbf{x}'$ a $\mathbf{x}$ constituye entonces una **mejora paretiana**. La expresión anterior es una representación cómoda, pero el criterio sigue siendo puramente ordinal, ya que basta con la relación de preferencia $\mathbf{x} \succsim_h \mathbf{x}'$, sin necesidad de que las utilidades sean medibles ni comparables entre personas, que es justamente lo que Pareto buscaba.

[3] La eficiencia técnica tampoco garantiza la asignativa. Una economía que dedique todos los recursos a fabricar zapatos izquierdos puede ser técnicamente eficiente, pero es asignativamente ineficiente.

El criterio es, por ello, exigente, pues requiere unanimidad en sentido débil, de manera que basta con que alguien se vea perjudicado, por poco que sea, para que la relación no se establezca. Es, además, incompleto, ya que define una ordenación solo parcial, pues no permite comparar dos asignaciones en las que un individuo gane y otro pierda.

La limitación no es menor, sino que afecta a la práctica totalidad de las decisiones de política económica, que rara vez dejan a alguien exactamente igual. Un arancel, una reforma fiscal o la liberalización de un sector, por ejemplo, generan siempre ganadores y perdedores, de modo que el criterio de Pareto, aplicado con literalidad, guarda silencio sobre casi todo lo que interesa al analista.

De esa incompletitud derivan las dos vías por las que ha avanzado la economía del bienestar. Los **criterios de compensación** admiten como mejora aquella en la que los ganadores podrían compensar a los perdedores aunque no lo hagan efectivamente (apartado 2.4.1). Las funciones de bienestar social, en cambio, reintroducen de forma explícita los juicios de valor sobre la distribución (apartado 2.4.2).

1.1.4. Optimalidad o eficiencia de Pareto

Una asignación es **eficiente u óptima en el sentido de Pareto** si no existe ninguna otra asignación factible que le sea Pareto-superior. Dicho de otro modo, solo cabe mejorar la situación de un individuo a costa de empeorar la de otro, de manera que se han agotado todas las mejoras paretianas disponibles.

Formalmente, una asignación factible $\mathbf{x}^*$ es eficiente en el sentido de Pareto si no existe otra asignación factible $\mathbf{x}$ tal que

$$u^h(\mathbf{x}) \geq u^h(\mathbf{x}^*) \;\; \forall h = 1, \ldots, H \qquad \text{y} \qquad \exists\, j : u^j(\mathbf{x}) > u^j(\mathbf{x}^*)$$

es decir, si $\mathbf{x}^*$ no está dominada por ninguna asignación factible. Por ello, los óptimos de Pareto pueden obtenerse maximizando la utilidad de un individuo sujeta a que la de los demás se mantenga en un nivel dado y a las restricciones de recursos y de tecnología, como hacen los programas de eficiencia del apartado 1.2.

Conviene retener cuatro propiedades:

1. *Superioridad y optimalidad son conceptos distintos*: una asignación puede ser Pareto-superior a otra sin ser, ella misma, Pareto-óptima, pues basta con que existan mejoras adicionales no explotadas.

2. *La eficiencia de Pareto es distributivamente neutral*[4]: no incorpora juicio alguno sobre la distribución, refleja únicamente la ausencia de desperdicio de recursos y resulta compatible con distribuciones extremadamente desiguales. Incluso la asignación que entrega todos los recursos a una sola persona es un óptimo de Pareto, porque quitarle cualquier parte la dejaría peor.

3. *Los óptimos de Pareto son múltiples*: el criterio no selecciona una asignación sino todo un conjunto, el de la gran frontera de posibilidades de utilidad (GFPU), y cuál de ellos alcanza el mercado depende de la distribución inicial de los recursos. De aquí se sigue la necesidad de un criterio adicional para elegir entre ellos, que es el objeto del apartado 2.4.

[4] Según Sen (*Collective Choice and Social Welfare*, 1970a), una economía puede ser óptima en el sentido de Pareto y, a la vez, "perfectamente repugnante" según cualquier estándar ético.

4. *El criterio presenta un sesgo hacia el* statu quo: al exigir que nadie empeore, privilegia la asignación de partida y, con ella, la distribución inicial de la propiedad, que el propio criterio no somete a examen. Esta objeción de fondo explica que la economía del bienestar no pueda detenerse en él.

1.1.5. Conclusiones

Aspectos positivos: la aportación de Pareto fue sentar un criterio de eficiencia sin comparaciones interpersonales de utilidad, que solo requiere preferencias ordinales. Al definirse como una dominancia entre vectores, el mismo criterio sirve, además, para la producción, el consumo y la asignación global, y con él se caracterizan después las condiciones de eficiencia.

Limitaciones: son de dos tipos:

- *De los supuestos*: cada uno de los cuatro ha recibido una crítica.

- *El problema de la indeterminación*: es, con diferencia, la crítica más importante, porque la ordenación paretiana es incompleta. Sobre la GFPU esto significa que sus puntos eficientes no admiten clasificación, y la elección queda indeterminada entre múltiples óptimos. La eficiencia paretiana es un requisito de la optimalidad social, pero no basta, y elegir entre los óptimos el que maximiza el bienestar social (el *optimum optimorum*[5]) exige un criterio adicional. De hecho, el propio Pareto (1916) reconoció la necesidad de complementar sus criterios con comparaciones interpersonales explícitas. La exigencia de unanimidad da lugar, además, a la *tiranía de la minoría*, pues cualquier perjudicado puede vetar una mejora colectiva y el *statu quo* tiende a perpetuarse.

1.2. Condiciones de eficiencia paretiana en una economía competitiva 2x2x2x2

Para estudiar la eficiencia en el contexto del equilibrio general, Pareto se apoyó en Walras (1874) y Edgeworth (1881). El análisis se ilustra con una economía simple 2x2x2x2 (dos bienes x, y; dos factores K, L; dos empresas; dos consumidores).

Supuestos: el análisis descansa en tres grupos de hipótesis:

- *Entorno*: ausencia de fallos de mercado, economía de trueque, dos bienes privados y factores homogéneos con oferta perfectamente inelástica[6].

- *Agentes*: funciones de utilidad ordinales, crecientes y cuasicóncavas, con curvas de indiferencia convexas.

- *Tecnología*: funciones de producción continuas, doblemente diferenciables, con productividades marginales positivas y decrecientes y rendimientos no crecientes[7], y empresas con distinta intensidad factorial (curva de contratos no recta).

[5] Una de las críticas de Wicksell a Pareto fue, precisamente, la confusión entre optimalidad paretiana y optimalidad social.

[6] Supuesto de simplificación análogo a Heckscher-Ohlin-Samuelson. Implica que los agentes ofrecen toda su dotación factorial al mercado.

[7] Con rendimientos decrecientes, los pagos no agotan el producto y los beneficios son positivos, pero se preserva la concavidad de la FPP. Con rendimientos crecientes, podría ser convexa.

1.2.1. Óptimo en la producción

Planteamiento: se maximiza la producción de x dados el nivel de producción de y y las dotaciones de factores:

$$\max_{K_x, L_x} \; x = f_x(K_x, L_x) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} f_y(K_y, L_y) = y_0 \\ K_x + K_y = K_0 \\ L_x + L_y = L_0 \end{cases}$$

donde L_x, K_x y L_y, K_y son las cantidades de trabajo y capital asignadas a la producción de x (variables de decisión) y de y, $f_x(\cdot)$ y $f_y(\cdot)$ las funciones de producción de ambos bienes, y_0 el nivel de producción de y que se toma como dado y K_0, L_0 las dotaciones totales de capital y trabajo.

CPO (condiciones de primer orden): con solución interior y las restricciones agotadas, derivando el lagrangiano respecto a los factores asignados a cada bien y eliminando los multiplicadores:

$$\text{RMST}^x_{KL} = \frac{\partial f_x / \partial L_x}{\partial f_x / \partial K_x} = \frac{\partial f_y / \partial L_y}{\partial f_y / \partial K_y} = \text{RMST}^y_{KL}$$

La relación marginal de sustitución técnica (RMST), es decir, la tasa a la que se intercambian capital y trabajo, debe ser la misma independientemente del bien que se produzca. Si difiriera entre bienes, bastaría reasignar factores para producir más de uno sin renunciar a nada del otro.

CSO: la convexidad de las isocuantas de ambas empresas (funciones de producción cuasicóncavas) garantiza que la tangencia es un máximo de x dado y_0.

Desarrollo gráfico: el óptimo en la producción se representa en el plano trabajo-capital de la *caja de Edgeworth de la producción* (figura A22.1, panel a):

1. *Caja*: sus dimensiones son las dotaciones de los dos factores (L_0 en el eje horizontal, K_0 en el vertical), de modo que cualquier punto de su interior es una asignación de pleno empleo de ambos factores entre las dos empresas, aunque no sea eficiente.

2. *Isocuantas*: las de la empresa que produce x se miden desde el vértice O_x y las de la que produce y desde el opuesto, O_y, y son más altas cuanto más alejadas de su origen. En un punto como Z, las isocuantas $x(Z)$ e $y(Z)$ se cruzan. Todos los puntos de la lente sombreada que forman son Pareto-superiores, porque en su interior ambas empresas producen más, y en sus bordes una produce más sin que la otra produzca menos. Allais (1943) llamó a esa lente *área del excedente distribuible*.

3. *Óptimo*: desplazarse desde Z hasta N a lo largo de la isocuanta $y(Z)$, por ejemplo, aumenta la producción de x sin reducir la de y, que es lo que hace el programa anterior con $y_0 = y(Z)$. Solo en las tangencias entre isocuantas, como M y N, donde las RMST se igualan, se han agotado las reasignaciones beneficiosas. Esas tangencias son las asignaciones Pareto-eficientes, y su lugar geométrico es la *curva de contratos de la producción* (CC), con cuatro propiedades:

- *No es necesariamente una isoclina*: en todos sus puntos las RMST de ambas empresas coinciden, pero su valor común cambia de un punto a otro.

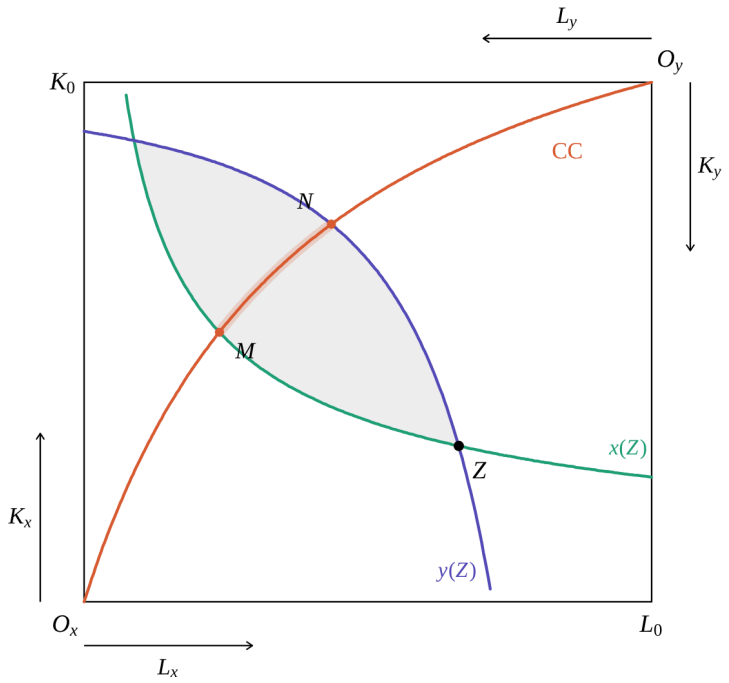
- *Sus puntos no son comparables entre sí según Pareto*: pasar de uno a otro aumenta un *output* y reduce el otro.

- *Incluye los vértices de la caja*: en ellos una empresa usa todos los factores y la otra ninguno, consecuencia de la neutralidad distributiva del criterio.

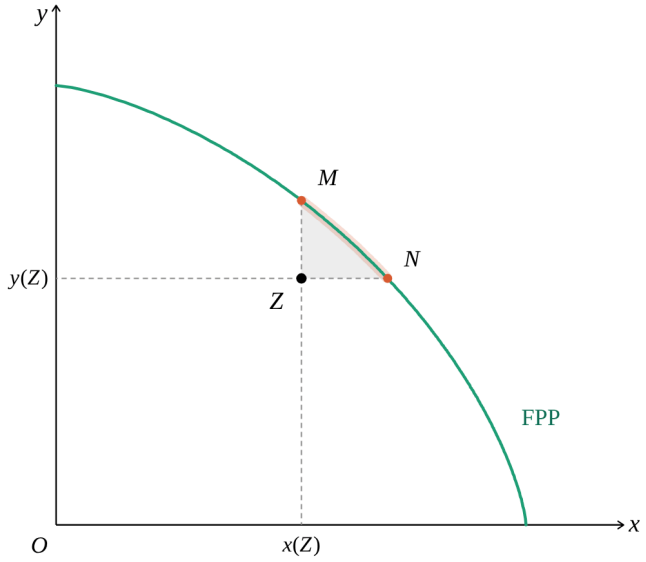
- *Su forma depende de la intensidad factorial*: en el plano (L_x, K_x), se curva por encima de la diagonal si x es más intensiva en capital que y, como en la figura, y por debajo si lo es en trabajo. Si ambas tienen la misma intensidad, coincide con la diagonal.

En el plano x-y (panel b), la proyección de la curva de contratos es la FPP, es decir, la máxima cantidad de x que puede producirse para cada cantidad de y, dadas la tecnología y las dotaciones. Cada punto de la curva de contratos, como M o N, da un par de producciones sobre la FPP. Una asignación ineficiente de factores como Z se proyecta, en cambio, en el interior de la frontera, y la lente, en la región sombreada entre Z y la FPP.

La pendiente de la FPP es, en valor absoluto, la relación marginal de transformación, $\text{RMT}_{yx} = -dy/dx|_{K_0,L_0} = (\partial f_y/\partial K_y)/(\partial f_x/\partial K_x) = (\partial f_y/\partial L_y)/(\partial f_x/\partial L_x)$, el coste de oportunidad de x en términos de y. La FPP es cóncava, y por tanto la RMT creciente en x, por tres razones que pueden actuar por separado o juntas: los rendimientos decrecientes a escala, la especialización de los factores y la distinta intensidad factorial de los bienes. En particular, la diferencia de intensidades hace que trasladar factores de y a x sea cada vez más costoso. Por el contrario, si ambos bienes tuvieran la misma intensidad y rendimientos constantes, la FPP sería una recta.



(a) Caja de Edgeworth de la producción



(b) Frontera de posibilidades de producción

Figura A22.1: Caja de Edgeworth de la producción y frontera de posibilidades de producción. Los puntos de la curva de contratos, como M y N, se proyectan sobre la FPP, y la asignación ineficiente de factores Z, en su interior. La lente de reasignaciones Pareto-superiores se proyecta en la región sombreada.

1.2.2. Óptimo en el consumo (intercambio)

Planteamiento: se maximiza la utilidad de A dados el nivel de utilidad de B y las cantidades disponibles de cada bien:

$$\max_{x^A,y^A} \; u^A(x^A,y^A) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} u^B(x^B,y^B)=u_0^B \\ x^A+x^B=x_0 \\ y^A+y^B=y_0 \end{cases}$$

donde x^A, y^A y x^B, y^B son las cantidades de ambos bienes consumidas por A (variables de decisión) y por B, $u^A(\cdot)$ y $u^B(\cdot)$ sus funciones de utilidad, u_0^B el nivel de utilidad de B que se toma como dado y x_0, y_0 las cantidades totales disponibles de cada bien.

CPO: con solución interior y las restricciones agotadas, derivando el lagrangiano respecto a los consumos de A y de B y eliminando los multiplicadores:

$$\text{RMS}_{yx}^A = \frac{\partial u^A/\partial x}{\partial u^A/\partial y} = \frac{\partial u^B/\partial x}{\partial u^B/\partial y} = \text{RMS}_{yx}^B$$

En el óptimo, A y B tienen la misma relación marginal de sustitución (RMS), es decir, ambos valoran cada bien en términos del otro a idéntica tasa subjetiva. De lo contrario, existirían ganancias no explotadas del intercambio, pues uno de ellos podría ceder el bien que valora relativamente menos a cambio del que valora más sin que el otro empeore.

CSO: la convexidad de las curvas de indiferencia de ambos consumidores (utilidades cuasicóncavas) garantiza que la tangencia es un máximo de u^A dado u_0^B.

Desarrollo gráfico: el óptimo en el consumo se representa en el plano bien x-bien y de la *caja de Edgeworth del consumo* (figura A22.2, panel a):

1. *Caja*: sus dimensiones son las cantidades disponibles de los dos bienes (x_0 en el eje horizontal, y_0 en el vertical), de modo que cada punto es un reparto de esas cantidades entre los dos consumidores.

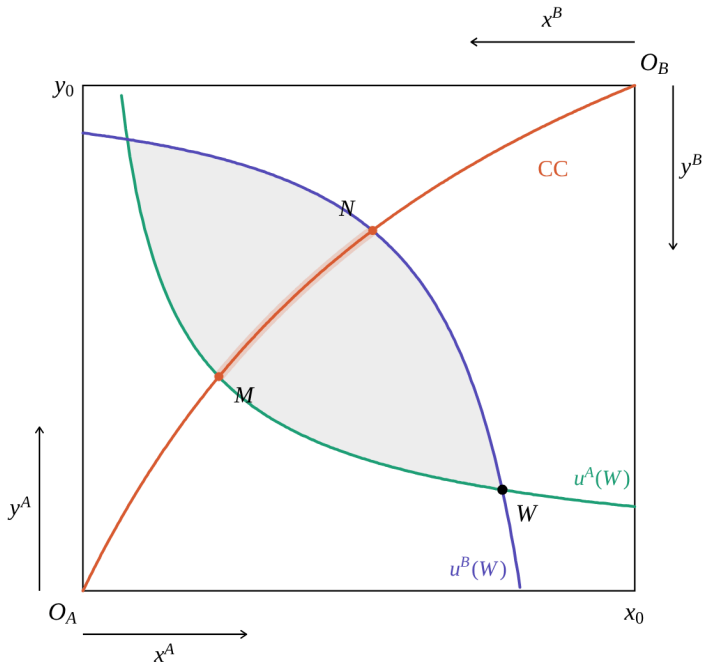
2. *Curvas de indiferencia*: las de A se miden desde el vértice O_A y las de B desde el opuesto, O_B. Como en la producción, la lente entre dos curvas que se cruzan, como $u^A(W)$ y $u^B(W)$, que pasan por la dotación inicial W, contiene los repartos Pareto-superiores.

3. *Óptimo*: las tangencias entre curvas de indiferencia, donde las RMS se igualan, forman la *curva de contratos del consumo* (CC). Si los consumidores parten de W, solo son alcanzables por intercambio voluntario los puntos de la curva de contratos situados dentro de la lente, es decir, el tramo entre M y N. Esos puntos forman el *núcleo* de la economía, que, según el teorema de Debreu y Scarf (1963), converge al conjunto de los equilibrios competitivos a medida que el número de agentes crece (tema A21, apartado 3.1.3).

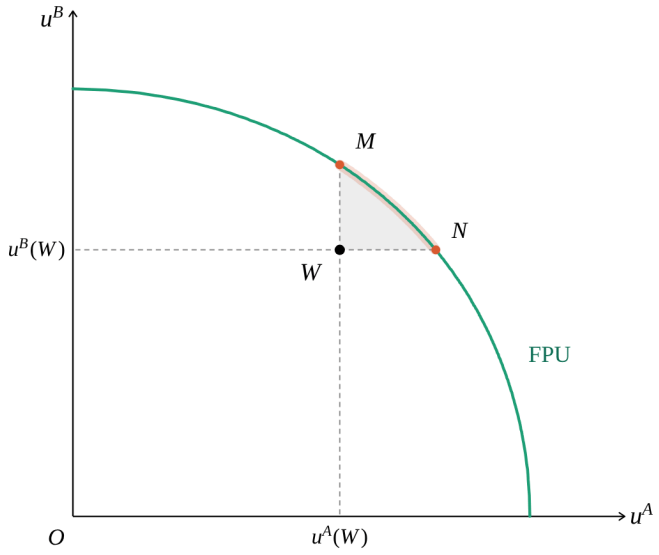
En el plano u^A-u^B (panel b), la curva de contratos tiene como imagen la frontera de posibilidades de utilidad (FPU). Esta frontera indica hasta dónde puede llegar la utilidad de A sin que la de B baje de un nivel dado. Cada punto de la curva de contratos, como M o N, da un par de utilidades sobre la FPU, y los vértices de la caja, sus extremos sobre los ejes. La dotación W, que no es eficiente, se proyecta en el interior de la frontera, y la lente, en la región sombreada entre W y la FPU. El núcleo es, así, el tramo de la FPU que mejora a ambos consumidores respecto de W.

Como las utilidades crecen con el consumo, la FPU tiene pendiente negativa, ya que sobre ella solo se mejora a un consumidor empeorando al otro. Su curvatura, en cambio, no está determinada, porque la utilidad es ordinal y cualquier transformación monótona de la utilidad deforma la FPU. Basta, eso sí, con que las funciones de utilidad (cardinales) sean cóncavas,

como en la figura, para que la FPU también lo sea, aunque no es una condición imprescindible. Además, cada óptimo en la producción tiene su propia FPU, así que hay infinitas.



(a) Caja de Edgeworth del consumo



(b) Frontera de posibilidades de utilidad

Figura A22.2: Caja de Edgeworth del consumo y frontera de posibilidades de utilidad. Los puntos de la curva de contratos, como M y N, se proyectan sobre la FPU, y la dotación ineficiente W, en su interior. La lente de mejoras paretianas se proyecta en la región sombreada y el núcleo, en el tramo de la FPU entre M y N.

1.2.3. Óptimo global (reparto del *output*)

Planteamiento: se maximiza la utilidad de A dados el nivel de utilidad de B, la tecnología y las dotaciones de factores:

$$\max\ u^A(x^A, y^A) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} u^B(x^B, y^B) = u_0^B \\ x^A + x^B = f_x(K_x, L_x) \\ y^A + y^B = f_y(K_y, L_y) \\ K_x + K_y = K_0 \\ L_x + L_y = L_0 \end{cases}$$

donde x^A, y^A y x^B, y^B son los consumos de ambos bienes de A y de B, $u^A(\cdot)$ y $u^B(\cdot)$ sus funciones de utilidad, u_0^B el nivel de utilidad de B que se toma como dado, $f_x(K_x, L_x)$ y $f_y(K_y, L_y)$ las funciones de producción de ambos bienes con los factores asignados a cada uno, y K_0, L_0 las dotaciones totales de capital y trabajo.

CPO: con solución interior y las restricciones agotadas, derivando el lagrangiano respecto a los consumos y a los factores y eliminando los multiplicadores:

$$\text{RMS}_{yx}^A = \text{RMS}_{yx}^B = \text{RMT}_{yx}\big|_{\text{FPP}} \tag{1}$$

La condición (1) iguala todas las valoraciones en el óptimo global, es decir, la tasa subjetiva de intercambio (RMS) coincide con la tasa objetiva de transformación (RMT). Pueden existir, por tanto, asignaciones eficientes en producción o en consumo por separado que no son óptimos globales, porque no cumplen (1).

CSO: preferencias convexas de ambos consumidores y conjunto de producción convexo (FPP cóncava), de modo que la igualdad entre RMS y RMT es un máximo y no un mínimo.

Desarrollo gráfico: el óptimo global se representa en el plano x-y (figura A22.3):

1. *Frontera de posibilidades de producción* (FPP): cada uno de sus puntos es una combinación de producción eficiente, y su pendiente en valor absoluto es la RMT.

2. *Caja de Edgeworth del consumo*: se inscribe en la FPP para cada punto de producción, con origen O_A en el origen de coordenadas y O_B en el punto (x_0, y_0) de la frontera.

3. *Curva de contratos del consumo* (CC): une las tangencias entre las curvas de indiferencia de A y de B, como u^A y u^B.

4. *Óptimo*: sobre la curva de contratos del consumo, solo los puntos donde la RMS coincide con la RMT en O_B, como el punto 0, son óptimos globales. En ellos, la tasa a la que los consumidores intercambian los bienes coincide con la que la economía puede transformarlos (condición (1)). Puede haber infinitos óptimos globales.

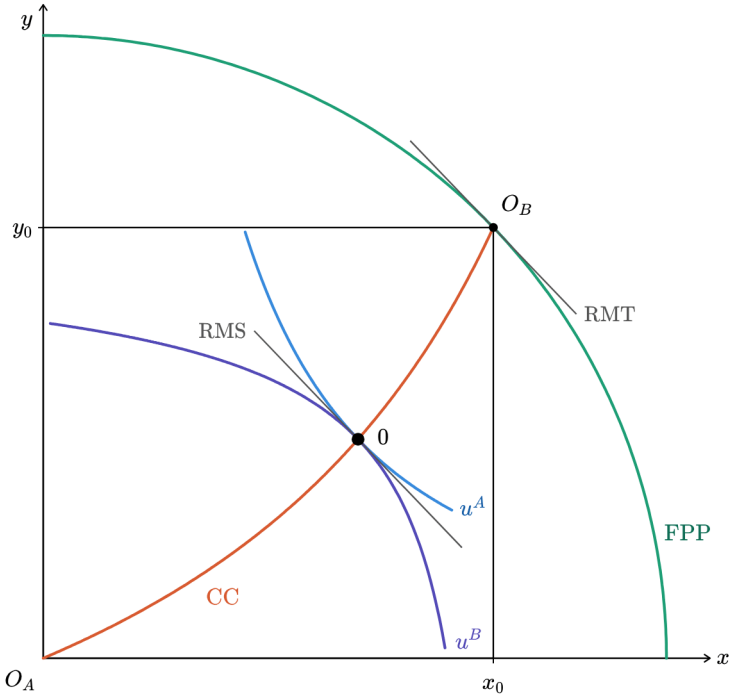


Figura A22.3: Óptimo global. La caja de Edgeworth se inscribe en la frontera de posibilidades de producción, y la relación marginal de transformación debe igualar a las relaciones marginales de sustitución.

La GFPU[8] es la envolvente de los puntos de las FPU que se corresponden con los óptimos globales. Cada punto de la GFPU indica una combinación única de utilidades, una distribución única de bienes, una combinación de producción sobre la FPP y una distribución única de factores.

1.3. Conclusiones

Los criterios de Pareto ordenan las asignaciones sin comparar utilidades entre personas, aunque solo de forma parcial, y el óptimo de Pareto reúne las asignaciones que ya no admiten mejoras paretianas. En la economía 2x2x2x2 ese óptimo exige igualar las RMST de las dos empresas en la producción y las RMS de los dos consumidores en el consumo, y, en el óptimo global, las RMS con la RMT. Las utilidades de los óptimos globales forman la GFPU.

Pareto y Barone anticiparon con estas condiciones los dos teoremas fundamentales. Según los teoremas, la asignación competitiva es eficiente (1TFEB) y cualquier óptimo puede alcanzarse como equilibrio competitivo tras redistribuir las dotaciones (2TFEB). Su demostración rigurosa llegaría con Lange (1942b), Arrow (1951a) y Debreu (1951), y con ello la competencia perfecta se consagra como guía de política económica. La sección 2 examina esos teoremas y lo que queda por decidir cuando la GFPU ofrece infinitos óptimos.

[8] Conceptos anticipados por Maurice Allais (1943) y popularizados por Paul Samuelson (1950).

2. Los teoremas fundamentales del bienestar

Los dos teoremas fundamentales, resultado central de la economía del bienestar, conectan el óptimo económico del apartado 1 con el equilibrio competitivo del tema A21. El primero afirma que el mercado competitivo produce asignaciones eficientes, y el segundo, que cualquier asignación eficiente puede producirla el mercado si se redistribuyen previamente las dotaciones. Ambos descansan, sin embargo, en supuestos exigentes. Cuando estos fallan, el mercado deja pérdidas de bienestar que pueden medirse. Aun cuando se cumplen, los teoremas no permiten elegir entre los óptimos de Pareto, que es el problema que abordan los criterios de compensación y la función de bienestar social.

2.1. Primer teorema (1TFEB)

Enunciado: todo equilibrio competitivo $(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ es una asignación eficiente en el sentido de Pareto[9]. El teorema se ha visto como la formalización de la idea de la mano invisible de Adam Smith, si bien se refiere a la optimalidad paretiana y no necesariamente a la optimalidad social.

Corolarios:

1. *Eficiencia sin equidad*: el equilibrio competitivo no desperdicia recursos, aunque puede no tener otras propiedades deseables (p. ej. ser equitativo).

2. *Referencia normativa*: si se cumplen los supuestos del teorema, la competencia perfecta conduce sin excepción a un óptimo de Pareto, con la certeza que da un resultado demostrado. Sirve así de referencia para los decisores de política económica, porque, al margen de cómo se diseñe esta, se sabe que las asignaciones competitivas son eficientes.

3. *Economía de información*: cada agente únicamente necesita conocer los precios para tomar sus decisiones y alcanzar el óptimo de Pareto (Varian, 2014, p. 585).

4. *Justificación de la intervención*: el teorema ha servido a los partidarios del libre mercado para reducir el papel del sector público a corregir fallos de mercado. Así, si falla alguna de las condiciones suficientes del teorema (p. ej. hay fallos de mercado), nada asegura que el equilibrio sea eficiente, y el Estado tiene un motivo de eficiencia para intervenir.

Demostración: descansa en un solo supuesto sobre las preferencias, la *no saciedad local*, según la cual en todo entorno de una cesta existe otra estrictamente preferida. Sea $(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ un equilibrio competitivo y supóngase, por reducción al absurdo, que existe una asignación factible $\hat{\mathbf{x}}$ Pareto-superior.

Por un lado, cada consumidor que prefiere estrictamente $\hat{\mathbf{x}}^h$ a $\mathbf{x}^{*h}$ no pudo permitírsela a los precios de equilibrio, pues de lo contrario la habría elegido, de modo que $\mathbf{p}^*\hat{\mathbf{x}}^h > \mathbf{p}^*\mathbf{x}^{*h}$. Por otro, cada consumidor indiferente no puede obtener $\hat{\mathbf{x}}^h$ más barata, por no saciedad local, por lo que $\mathbf{p}^*\hat{\mathbf{x}}^h \geq \mathbf{p}^*\mathbf{x}^{*h}$. Sumando, el valor de la nueva asignación a los precios de equilibrio supera al de la de equilibrio, $\mathbf{p}^* \sum_h \hat{\mathbf{x}}^h > \mathbf{p}^* \sum_h \mathbf{x}^{*h}$.

Sin embargo, en el equilibrio las empresas maximizan el beneficio, de modo que el valor de la producción de equilibrio es el máximo alcanzable a esos precios. La asignación de equilibrio agota, además, la renta de la economía, por lo que ninguna asignación factible puede valer más. La contradicción muestra que $\hat{\mathbf{x}}$ no puede ser factible. La demostración no usa convexidad ni

[9] Las hipótesis, suficientes pero no necesarias, son la ausencia de fallos de mercado, en particular mercados completos (sin externalidades ni bienes públicos), y agentes precio-aceptantes (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995, pp. 549-550).

continuidad de las preferencias ni concavidad de las tecnologías, lo que hace del primer teorema un resultado muy general. Usa, en cambio, que todos los bienes tienen precio y mercado, que es lo que fallan los bienes públicos y las externalidades.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: formaliza la idea de la mano invisible con un solo supuesto sobre las preferencias, la no saciedad local, sin convexidad ni continuidad, lo que lo hace muy general. Convierte, además, los fallos de mercado en la justificación de la intervención por motivos de eficiencia.

- *Limitaciones*: se refiere a la optimalidad paretiana y no necesariamente a la social, de modo que nada dice de la equidad del equilibrio. Exige, además, mercados completos y agentes precio-aceptantes, supuestos que fallan con el poder de mercado, las externalidades y los bienes públicos (tema A23).

2.2. Segundo teorema (2TFEB)

Tras el 1TFEB, queda por saber si el mercado, capaz de alcanzar por sí solo la eficiencia paretiana, puede alcanzar también la **optimalidad social**, es decir, el óptimo de Pareto que la sociedad prefiera por razones distributivas.

Enunciado: bajo ciertas condiciones (convexidad de preferencias y conjuntos de producción)[10] y con una redistribución adecuada de las dotaciones iniciales, el mercado competitivo puede alcanzar cualquier óptimo de Pareto.

Corolarios:

1. *Separación entre eficiencia y equidad*: un planificador benevolente podría repartir primero los recursos mediante transferencias que no distorsionen (impuestos y subvenciones de suma fija[11]) y dejar luego que el mercado se encargue de la eficiencia paretiana. Con una política social adecuada se obtienen así a la vez la optimalidad social (equidad) y la paretiana (eficiencia). Por ello, quienes priorizan la equidad invocan el 2TFEB para sostener que el Estado puede redistribuir *ex ante* sin coste de eficiencia, aunque el mercado carezca de imperfecciones.

2. *Planificación con precios sombra*: en teoría, un sistema de planificación central *à la* Lange-Lerner, en el que el Gobierno estima los precios sombra y los impone a los agentes, podría lograr idénticos resultados que un sistema perfectamente competitivo[12]. Este es el argumento del debate sobre el cálculo económico socialista (tema A03).

Desarrollo gráfico: el segundo teorema se representa en el plano bien x-bien y de la caja de Edgeworth del consumo (figura A22.4), con las preferencias y las cantidades totales de la figura A22.2:

1. *Dotación inicial y lente*: la dotación inicial W queda fuera de la curva de contratos (CC). Las curvas de indiferencia que pasan por ella, $u^A(W)$ y $u^B(W)$, reúnen las cestas que dan a cada consumidor la misma utilidad que su dotación. Se cortan en W y encierran la lente sombreada, cuyas asignaciones son Pareto-superiores a W.

[10] Mas-Colell, Whinston y Green (1995, cap. 16); Gravelle y Rees (2004).

[11] Los precios tienen una función asignativa (señales de escasez relativa) y otra distributiva (poder de compra de cada agente). Las transferencias de suma fija asumen la segunda y dejan a los precios la primera.

[12] Pareto y, sobre todo, Barone (1908) mostraron que un ministerio de la producción colectivista tendría que resolver las mismas ecuaciones que el mercado para alcanzar el óptimo. El resultado anticipó el argumento del "socialismo de mercado", sin que ellos lo defendieran.

2. *Intercambio voluntario*: ningún consumidor acepta un intercambio que le dé menos utilidad que su dotación, y ambos siguen intercambiando mientras queden ganancias mutuas. Por eso, el intercambio voluntario lleva la economía de W a un punto de la curva de contratos dentro de la lente (flecha discontinua), como C, en el tramo resaltado que forma el núcleo.

3. *Óptimo elegido*: por razones distributivas, el planificador prefiere otro óptimo de Pareto, $\mathbf{x}^*$, situado en la curva de contratos fuera de la lente. Sin embargo, desde W es inalcanzable por intercambio voluntario, porque deja a A por debajo de $u^A(W)$, con menos utilidad que su dotación.

4. *Redistribución*: una transferencia de suma fija de A a B (flecha continua) lleva la dotación de W a W'. Como no depende de lo que hagan los consumidores, la transferencia no distorsiona sus decisiones. La curva de contratos, que solo depende de las preferencias y de las cantidades totales, tampoco cambia.

5. *Recta de precios y equilibrio*: la recta discontinua que pasa por W' y por $\mathbf{x}^*$ tiene pendiente $-p_x^*/p_y^*$, igual a la RMS común de ambos consumidores en $\mathbf{x}^*$, y es tangente allí a $u^A(\mathbf{x}^*)$ y a $u^B(\mathbf{x}^*)$. A esos precios, es la recta presupuestaria de los dos consumidores desde W', cada uno demanda su cesta de $\mathbf{x}^*$ y los mercados se vacían. El óptimo elegido es, por tanto, el equilibrio competitivo que se alcanza desde W'. Sirve cualquier dotación de esa recta, pues todas valen lo mismo que $\mathbf{x}^*$ a esos precios.

La figura distingue los dos teoremas. La lente y el paso de W a C ilustran que el intercambio voluntario agota las ganancias mutuas y termina en la curva de contratos. Llega a ella por negociación, en el núcleo (tema A21, apartado 3.1.2), o por el mercado, cuyo equilibrio es eficiente por el 1TFEB. El 2TFEB añade la redistribución de W a W', con la que el mercado alcanza cualquier óptimo de la curva de contratos, también los que quedan fuera de la lente de la dotación original. En el plano de utilidades (figura A22.2, panel b), el núcleo pasa entonces a otro tramo de la FPU, el que contiene el óptimo elegido.

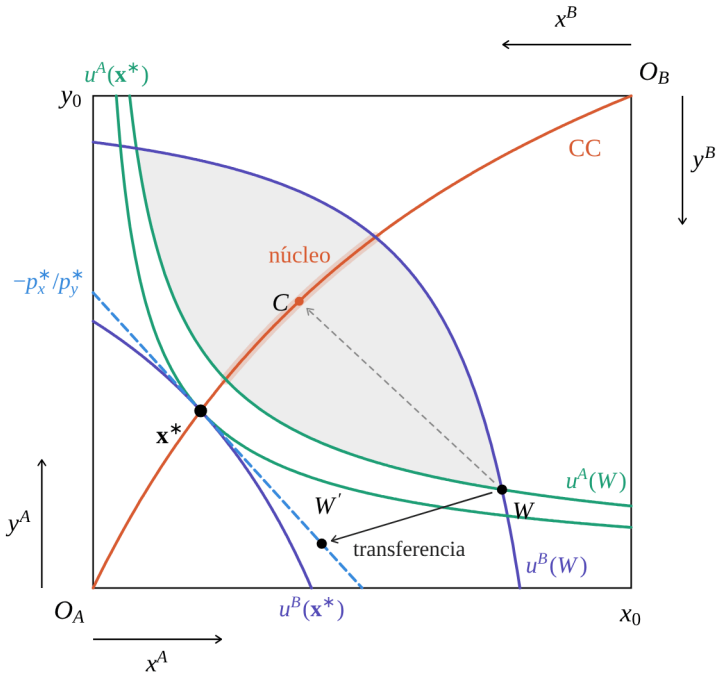


Figura A22.4: Segundo teorema fundamental del bienestar. Desde la dotación inicial W, el intercambio voluntario lleva a un punto del núcleo, como C, dentro de la lente entre $u^A(W)$ y $u^B(W)$. El óptimo elegido, $\mathbf{x}^*$, queda fuera de la lente. Una transferencia de suma fija lleva la dotación a W', y la recta de precios que pasa por W', tangente en $\mathbf{x}^*$ a $u^A(\mathbf{x}^*)$ y $u^B(\mathbf{x}^*)$, sostiene $\mathbf{x}^*$ como equilibrio competitivo.

Demostración: la prueba del segundo teorema es de otra naturaleza, y explica por qué exige convexidad. Sea $\hat{\mathbf{x}}$ un óptimo de Pareto. Se construye el conjunto de todas las cestas agregadas que la sociedad prefiere estrictamente a $\hat{\mathbf{x}}$, sumando las cestas que cada consumidor prefiere a la suya. Si las preferencias son convexas, ese conjunto es convexo, y si las tecnologías son convexas, el conjunto de producción también lo es.

Como $\hat{\mathbf{x}}$ es óptimo, ambos conjuntos no se cortan en su interior. El *teorema del hiperplano separador* garantiza entonces que existe un vector de precios $\mathbf{p}$ que separa uno del otro, de modo que, a esos precios, ninguna cesta preferida es más barata que $\hat{\mathbf{x}}$ y ninguna producción factible vale más. Esos precios sostienen $\hat{\mathbf{x}}$ como equilibrio, una vez que las dotaciones se redistribuyen para que cada consumidor pueda pagar exactamente su cesta. Con dos consumidores y dos bienes, ese hiperplano es la recta de precios de la figura A22.4, tangente en el óptimo elegido ($\mathbf{x}^*$ en la figura) a las curvas de indiferencia de ambos.

Sin convexidad, en cambio, el hiperplano puede no existir y el teorema falla, como muestran dos contraejemplos clásicos:

- *Preferencias no convexas*: un consumidor que, a cualquier precio, prefiere un extremo a la cesta intermedia que se le asigna.

- *Rendimientos crecientes*: una empresa cuyo conjunto de producción no es convexo y que a precios competitivos tendría pérdidas produciendo la cantidad eficiente (tema A20).

El segundo teorema es, por tanto, menos general que el primero, y su dependencia de la convexidad es lo que hace del monopolio natural y de las indivisibilidades fallos de mercado.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: muestra que, en principio, la equidad no exige renunciar al mercado, pues basta con actuar sobre las dotaciones iniciales y dejar que los precios asignen los recursos, y orienta la redistribución hacia instrumentos que alteren lo menos posible los precios relativos. Su exigencia de convexidad delimita, además, el alcance de la descentralización mediante precios.

▪ *Limitaciones*: los corolarios anteriores tienen dos objeciones.

- *Transferencias distorsionantes*: en la práctica, casi cualquier impuesto o transferencia cambia las decisiones de quien lo paga o lo recibe. Redistribuir cuesta entonces eficiencia, y aparece el dilema entre equidad y eficiencia al que vuelven las Conclusiones de la sección.
- *Costes de información*: para Friedrich Hayek, el diseño de una economía planificada exige tanta información que el segundo corolario no puede llevarse a la práctica, porque los precios sombra no pueden estimarse sin el mercado que los revela.

2.3. Incumplimiento de los teoremas: la medición de las pérdidas de bienestar

Los dos teoremas descansan en supuestos exigentes, como la existencia de mercados completos, agentes precio-aceptantes y, en el caso del segundo, la convexidad. Cuando falla alguno de los del primero, por la presencia de poder de mercado, de impuestos distorsionantes, de externalidades o de bienes públicos, el equilibrio deja, en general, de ser un óptimo de Pareto. En el monopolio, por ejemplo, el precio del bien monopolizado supera a su coste marginal. Por ello, la RMS de los consumidores, igual al precio relativo, deja de coincidir con la RMT, igual al cociente de los costes marginales, y no se cumple la condición (1) del óptimo global. El estudio sistemático de estos fallos corresponde al tema A23, y el de cómo actuar cuando no todos pueden corregirse, a la teoría del *second best* del apartado 3.

Gráficamente, la economía se sitúa entonces en un punto interior de la frontera, como W en la figura A22.2 o Z en la figura A22.1. La región sombreada entre ese punto y la frontera recoge las mejoras paretianas que quedan sin explotar. El criterio de Pareto permite afirmar que esa asignación es ineficiente, pero no cuánto, pues ordena asignaciones sin medirlas.

Para cuantificar el coste de una asignación ineficiente, o el beneficio de una política, la economía del bienestar aplicada recurre al **excedente**. El excedente es la diferencia entre lo que los agentes están dispuestos a pagar o a recibir y lo que efectivamente pagan o reciben. El instrumento procede de la tradición marshalliana de equilibrio parcial, y Harberger (1954) lo aplicó a la medición del coste social del monopolio.

El excedente del consumidor es el área bajo la curva de demanda y por encima del precio, y el del productor, el área por encima de la curva de oferta y por debajo del precio. Su suma, el excedente total, se maximiza en la cantidad en que la disposición marginal a pagar iguala al coste marginal, que es la del equilibrio competitivo (tema A16).

Cualquier cantidad distinta genera una **pérdida irrecuperable de eficiencia** (*deadweight loss*), el triángulo entre demanda y oferta que mide el coste social del monopolio (tema A17, apartado 1.4.2) y también el exceso de gravamen de un impuesto o el coste de un control de precios. Sean $\varepsilon \equiv |\varepsilon_{Xp}|$ la elasticidad-precio de la demanda en valor absoluto, $p\,X$ el gasto y τ una distorsión proporcional entre precio y coste marginal. La pérdida es entonces, con coste marginal constante, aproximadamente $\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\tau^2\,p\,X$, de modo que crece con el cuadrado de la distorsión, lo que explica por qué muchas distorsiones pequeñas cuestan menos que una grande de igual magnitud total.

El excedente es, por ello, el instrumento con el que el análisis coste-beneficio traduce la teoría del óptimo a decisiones concretas (tema A20, apartado 3.4.1). Su precisión, sin embargo, es limitada. El excedente es una medida exacta del cambio de bienestar solo cuando no hay efectos renta, es decir, con preferencias cuasilineales, y en general se sitúa entre la variación compensatoria y la equivalente (tema A09, apartado 3.3.2). Agregar excedentes de distintos individuos supone, además, dar el mismo valor a un euro para todos, que es precisamente el juicio de valor implícito en los criterios de compensación.

2.4. Los límites de los teoremas: criterios de compensación y función de bienestar social

Los teoremas garantizan la eficiencia, pero no la elección entre óptimos. La indeterminación paretiana sigue en pie, y la economía del bienestar ha seguido dos vías para resolverla. La primera, los criterios de compensación potencial de la London School of Economics, intenta ampliar las comparaciones posibles sin comparar utilidades entre personas. La segunda, la función de bienestar social de Bergson (1938) y Samuelson (1947)[13], introduce juicios de valor explícitos sobre la distribución y se desarrolla en detalle en el tema A24.

2.4.1. Los criterios de compensación

Los criterios de compensación se formularon entre 1939 y 1950 en un debate encadenado, en el que cada propuesta respondía a los defectos de la anterior, hasta concluir que los juicios de valor no pueden evitarse. Se presentan en ese orden:

1. *Iniciativa de los ganadores (Kaldor, 1939)*:

▪ *Origen*: Nicholas Kaldor (1939) formuló el primer criterio de compensación a propósito de la abolición de las Leyes de Cereales, para mostrar que podía juzgarse una medida con ganadores y perdedores sin comparar sus utilidades.

▪ *Idea*: un cambio de asignación es preferible si quienes ganan con él podrían, en principio, indemnizar a quienes pierden y conservar todavía una ganancia. Frente a la unanimidad de Pareto, basta con que las ganancias netas sean positivas.

▪ *Razonamiento*: el criterio tiene dos versiones, en las que la compensación es hipotética, luego no tiene por qué realizarse.

- *Versión fuerte*: las transferencias son de suma fija y la producción no cambia, de modo que se comparan asignaciones sobre distintas FPU.
- *Versión débil*: se admite que la producción varíe como parte de la compensación y se comparan asignaciones sobre la GFPU, mediante el reparto de la producción adicional.

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: el criterio amplía las comparaciones posibles.
- *Limitaciones*: no es inequívoco, porque partiendo de la asignación alternativa podría recomendar el cambio inverso (paradoja de Scitovsky, punto 3).

[13] Existe también la función de bienestar social de Bergson-Scitovsky, definida en el espacio de bienes (las curvas de indiferencia social se combinan con la FPP, no con la GFPU).

2. *Iniciativa de los perdedores (Hicks, 1939a y 1940)*:

▪ *Origen*: John Hicks (1939a y 1940) propuso el criterio simétrico, desde el punto de vista de los perdedores.

▪ *Idea*: el cambio es preferible cuando los perdedores no podrían evitarlo pagando a los ganadores, porque, aun indemnizándolos para que renunciaran a él, no lograrían quedar mejor que si se produjera.

▪ *Razonamiento*: es el de Kaldor invertido. Si los perdedores no están dispuestos a pagar lo suficiente para evitar el cambio, es que lo que pierden vale menos que lo que los ganadores ganan. Como el de Kaldor, este criterio produce una ordenación incompleta.

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: como el de Kaldor, amplía las comparaciones posibles.
- *Limitaciones*: tampoco es inequívoco y puede producir ordenaciones múltiples y cíclicas.

3. *Paradoja de Scitovsky y criterio doble (Scitovsky, 1941)*:

▪ *Origen*: Tibor Scitovsky (1941) demostró que los criterios anteriores pueden contradecirse entre sí.

▪ *Idea*: el criterio de Kaldor puede recomendar pasar de una asignación $\mathbf{x}$ a una asignación $\mathbf{x}'$ y, una vez en $\mathbf{x}'$, recomendar volver a $\mathbf{x}$, con lo que la economía iría y vendría sin fin. Esta *paradoja de Scitovsky* solo puede darse cuando las FPU de los estados comparados se cruzan. En el plano (u^A, u^B) (figura A22.5, panel a), la FPU de $\mathbf{x}'$ pasa por encima y a la derecha de $\mathbf{x}$, y la de $\mathbf{x}$, por encima y a la derecha de $\mathbf{x}'$, de modo que desde cada asignación los ganadores del cambio podrían compensar a los perdedores.

▪ *Razonamiento*: para resolverla, Scitovsky propone un *criterio doble*. Con ese criterio, una asignación es preferible si supera a la vez las dos pruebas anteriores, la de Kaldor (los ganadores pueden indemnizar a los perdedores) y la de Hicks (los perdedores no pueden indemnizar a los ganadores para impedir el cambio). Ello excluye la reversión, pero no impide la intransitividad cuando se comparan más de dos estados.

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: el criterio doble evita la paradoja bilateral.
- *Limitaciones*: no evita la intransitividad con tres o más estados, demostrada por Samuelson (1950) y Gorman (1955). Por tanto, ningún criterio de compensación proporciona una ordenación completa y transitiva sin juicios de valor.

4. *Criterio de Samuelson y criterio dual de Little (Samuelson, 1950; Little, 1950)*:

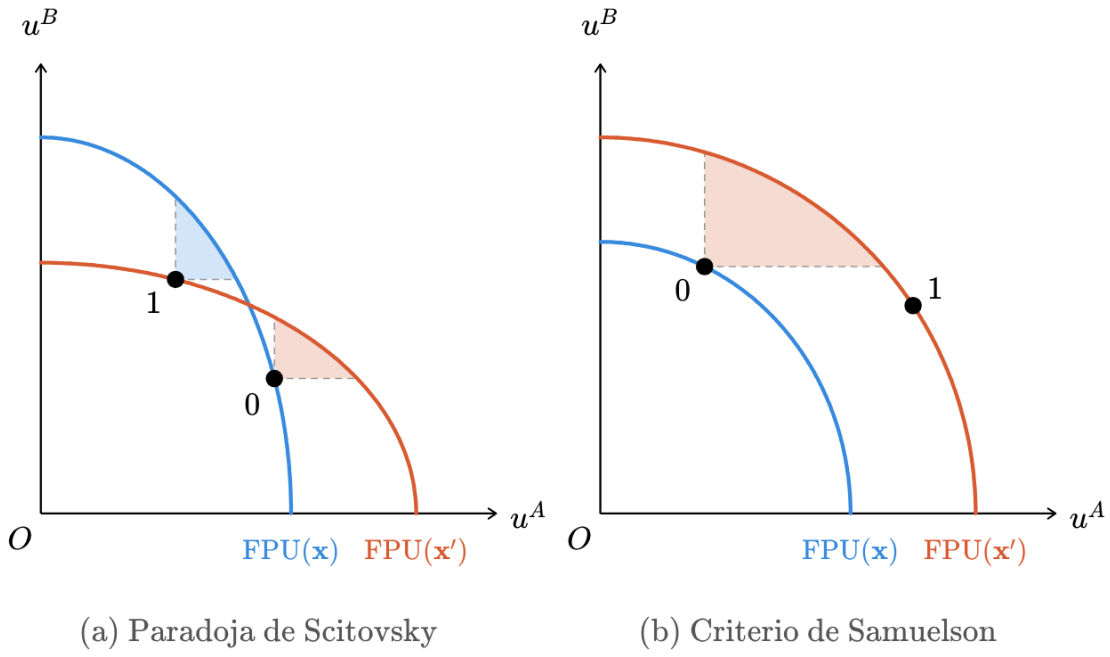
▪ *Origen*: Paul Samuelson (1950) e Ian Little (1950) cerraron el debate por dos vías opuestas. La primera exige más para comparar, mientras que la segunda admite explícitamente los juicios de valor.

▪ *Idea*: para Samuelson, una asignación $\mathbf{x}'$ es preferible a $\mathbf{x}$ solo si la FPU de $\mathbf{x}'$ es completamente exterior a la de $\mathbf{x}$ (figura A22.5, panel b). Para Little, un cambio es deseable si mejora la distribución de la renta y los perjudicados no pueden sobornar a los beneficiados para evitarlo (el criterio de Hicks más un juicio distributivo).

▪ *Razonamiento*: el criterio de Samuelson es riguroso pero muy exigente, pues rara vez una FPU es exterior a otra en todos sus puntos, y aun entonces la mejora es solo potencial. En la figura A22.5 (panel b), el punto 1 no es Pareto-superior al 0, porque B pierde, y la comparación sigue descansando en una redistribución hipotética. Little, por su parte, advierte que con el criterio Kaldor-Hicks se aprobaría una medida que empobrece a los pobres con tal de que los ricos ganen, en términos absolutos, más de lo que aquellos pierden. Concluye, por ello, que no hay forma de eludir los juicios de valor. En el mismo debate, Dennis Robertson defendió, frente al ordinalismo, que la utilidad podía medirse y compararse entre individuos.

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: el criterio dual de Little reconoce que la economía del bienestar no puede prescindir de los juicios distributivos, y conduce así a la función de bienestar social.
- *Limitaciones*: implica comparaciones interpersonales y puede contradecir el de Pareto (si los mejores puntos son los de la bisectriz, con igualdad de utilidades, se presupone paternalismo).



(a) Paradoja de Scitovsky (b) Criterio de Samuelson

Figura A22.5: Criterios de compensación en el plano de utilidades. (a) Las FPU de $\mathbf{x}$ (punto 0) y de $\mathbf{x}'$ (punto 1) se cruzan, y cada una tiene puntos al noreste de la asignación situada sobre la otra (zonas sombreadas), de modo que el criterio de Kaldor recomienda pasar de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}'$ y volver. (b) Si FPU($\mathbf{x}'$) es exterior a FPU($\mathbf{x}$), la zona sombreada solo aparece al noreste de $\mathbf{x}$, y el criterio de Samuelson ordena sin ambigüedad.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: los criterios de compensación amplían el alcance de la economía del bienestar paretiana sin exigir comparaciones interpersonales explícitas, pues la valoración corresponde a los propios afectados, y proporcionan el fundamento del análisis coste-beneficio.

▪ *Limitaciones*: los criterios, sin embargo, no consiguen lo que pretenden, por dos razones.

- *Resultados innecesarios o contradictorios*: si las situaciones ya pueden ordenarse por Pareto, los criterios no añaden nada. Si no pueden, su veredicto puede contradecirse, como prueban la paradoja de Scitovsky y la intransitividad del criterio doble.

- *Juicio de valor implícito*: tratar la compensación como hipotética equivale a dar el mismo valor a un euro sea quien sea su dueño, lo que ya es un juicio de valor. Pagarla de verdad, en cambio, exigiría instituciones que la gestionaran, saber quién gana y quién pierde y asumir los costes de transacción. Una vez pagada, además, el cambio sería sin más una mejora paretiana, con lo que los criterios de compensación sobrarían.

2.4.2. La función de bienestar social

Del debate anterior ha prevalecido la conclusión de Little, según la cual los juicios distributivos no pueden evitarse, y hacerlos explícitos es la tarea de la función de bienestar social. Conviene ver primero de dónde surge esta función y después cómo selecciona el óptimo social entre los óptimos de Pareto.

> La función de bienestar social, sus formas (utilitarista, rawlsiana, Bernoulli-Nash) y su relación con la teoría de la elección colectiva se desarrollan en el tema A24, apartados 1.1, 1.2 y 2. Aquí se presenta como la salida a la indeterminación de este apartado.

Origen: Abram Bergson (1938) y Paul Samuelson (1947) propusieron resolver la indeterminación paretiana no ampliando los criterios de comparación, como la escuela de la compensación, sino haciendo explícitos los juicios de valor.

Idea: la *función de bienestar social* (FBS) asigna a cada estado social un nivel de bienestar en función de las utilidades individuales, $W = W(u^1, \dots, u^H)$, con $\partial W/\partial u^h > 0$, y permite así ordenar todos los óptimos de Pareto entre sí. Sus curvas de nivel, las *curvas de indiferencia social*, expresan con su pendiente la tasa a la que la sociedad está dispuesta a sacrificar el bienestar de unos por el de otros y, con su curvatura, su aversión a la desigualdad.

Razonamiento: el *optimum optimorum* del apartado 1.1.5 se obtiene maximizando la FBS sobre la gran frontera de posibilidades de utilidad. Ese óptimo es el punto de tangencia entre la GFPU y la curva de indiferencia social más alta, y por el segundo teorema puede alcanzarse como equilibrio competitivo tras la redistribución de dotaciones que lo sostiene. La forma de la FBS decide qué óptimo se elige:

- *Utilitarista*: con curvas de indiferencia lineales, es indiferente a la distribución.

- *Rawlsiana*: con curvas en ángulo recto, solo atiende al peor situado.

- *Formas intermedias*: valoran tanto el nivel como la igualdad de las utilidades.

Desarrollo gráfico: el óptimo social se representa en el plano u^A-u^B (figura A22.6):

1. *Fronteras de posibilidades de utilidad*: cada una recoge la máxima utilidad de A para cada nivel de utilidad de B, dada una combinación de producción. Hay una, como FPU_0, FPU_1 o FPU_2, por cada óptimo en la producción.

2. *Gran frontera de posibilidades de utilidad* (GFPU): es la envolvente de los puntos de las FPU que son óptimos globales y recoge la máxima utilidad de A para cada nivel de utilidad de B cuando también se elige la producción.

3. *Curva de indiferencia social* (W_0): recoge las combinaciones de utilidades que dan el mismo bienestar social.

4. *Óptimo social*: en el punto 0, W_0 es tangente a la GFPU, y ese punto es el *optimum optimorum*.

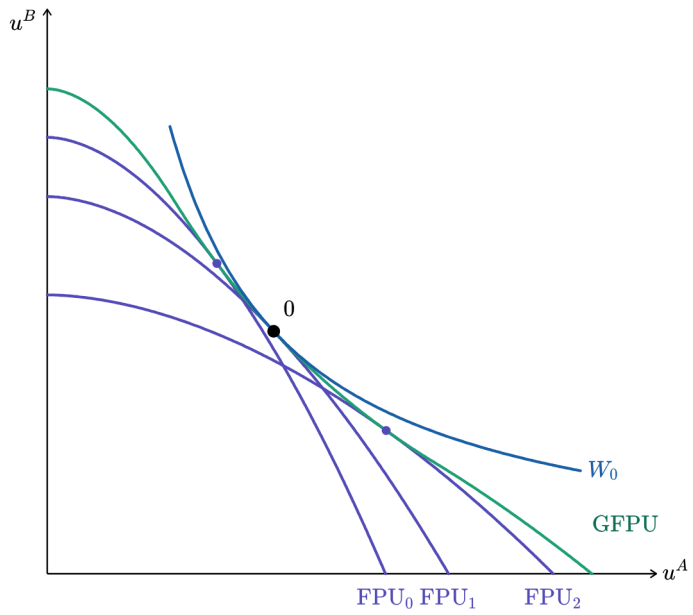


Figura A22.6: Gran frontera de posibilidades de utilidad y función de bienestar social. El gráfico sitúa el óptimo social u *optimum optimorum*.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la FBS completa la economía del bienestar paretiana.

- *Limitaciones*: lo hace al precio de admitir que la elección social requiere juicios de valor y comparaciones interpersonales, que es lo que Pareto quería evitar. De dónde proceden esos juicios, y si pueden derivarse de las preferencias individuales sin dictadura, es la pregunta del teorema de Arrow, y con ella comienza la teoría de la elección colectiva (tema A24).

2.5. Conclusiones

Los dos teoremas fundamentales fijan la referencia frente a la que se mide toda intervención. Cuando fallan los supuestos del primero, el excedente mide, de forma aproximada, la pérdida de bienestar que motiva la intervención. El segundo separa, en principio, las cuestiones de eficiencia y de equidad. Ninguno de los dos elige, sin embargo, entre óptimos, y las dos vías para hacerlo exigen juicios de valor, implícitos en los criterios de compensación y explícitos en la FBS. La separación entre eficiencia y equidad depende, además, de transferencias de suma fija, que en la práctica apenas existen.

3. La teoría del *second best*

La lección de los teoremas es, por tanto, doble. Existe un mecanismo, la competencia, que garantiza la eficiencia, y la equidad puede perseguirse sin sacrificarla solo si se dispone de instrumentos no distorsionantes. No obstante, ambas afirmaciones dependen de que se cumplan sus supuestos. De ahí que el resto de la economía del bienestar estudie lo que ocurre cuando no se cumplen: los fallos de mercado (tema A23), las funciones de bienestar social y la elección colectiva (tema A24) y, en este mismo tema, la teoría del *second best*.

3.1. El teorema del *second best*

Origen: Jacob Viner (1950) y James Meade (1955b) advirtieron, al estudiar las uniones aduaneras, que eliminar una distorsión cuando persisten otras puede empeorar el bienestar. Richard Lipsey y Kelvin Lancaster (*The General Theory of Second Best*, 1956) generalizaron la observación a un teorema.

Idea: en el mundo real existen elementos que alejan la economía de la competencia perfecta (bienes públicos, información imperfecta, poder de mercado, impuestos distorsionantes). La *teoría del second best* estudia cuáles son los criterios de eficiencia cuando alguna de esas imperfecciones no puede eliminarse.

El teorema establece que, en una economía de equilibrio general competitivo, basta con que una de las condiciones de optimalidad paretiana, las del *first best* (primer óptimo), no pueda cumplirse para que, en general, satisfacer las demás deje de ser deseable. El óptimo alcanzable, el *second best*, suele exigir entonces violar también las demás.

3.1.1. Supuestos

Se parte del problema del planificador del apartado 1.2, generalizado a n bienes y con una función objetivo $u(X)$, en el que la maximización del bienestar sujeta a la tecnología produce las condiciones de igualdad entre las relaciones marginales de sustitución y de transformación. A ese problema se añade una restricción adicional que impide cumplir una de esas condiciones en un sector. Por ejemplo, en el bien k el precio se aparta del coste marginal en una proporción δ que el planificador no puede corregir, $\partial u/\partial x_k - \delta\,\partial G/\partial x_k = 0$, donde G es la función de transformación. Como en el óptimo del planificador se cumple $\partial u/\partial x_k = \lambda\,\partial G/\partial x_k$, siendo λ el multiplicador de la restricción tecnológica, se normaliza la escala de G para que $\lambda = 1$ en el *first best*, de modo que la restricción solo introduce una distorsión si $\delta \neq 1$. Lipsey y Lancaster la formulan de forma análoga como cociente, $(\partial u/\partial x_k)/(\partial u/\partial x_n) = \delta\,(\partial G/\partial x_k)/(\partial G/\partial x_n)$.

3.1.2. Modelo

Planteamiento: el planificador maximiza el bienestar sujeto a la tecnología y a la restricción adicional que impide cumplir la condición de óptimo en el sector k:

$$\max_X\ u(X) \quad \text{s.a.:} \begin{cases} G(X) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_k} - \delta\,\frac{\partial G}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

donde $X = (x_1, \dots, x_n)$ es el vector de los n bienes, $u(X)$ la función objetivo, $G(X)$ la función de transformación, con la escala normalizada para que su multiplicador valga uno en el *first best*, y

$\delta \neq 1$ la proporción, que el planificador no puede corregir, en que el precio del bien k se aparta de su coste marginal. El lagrangiano incorpora el multiplicador λ de la restricción tecnológica y un segundo multiplicador, μ, asociado a la restricción adicional:

$$\mathcal{L} = u(X) - \lambda\, G(X) - \mu\,[\frac{\partial u}{\partial x_k} - \delta\,\frac{\partial G}{\partial x_k}]$$

CPO: sin la restricción adicional, son $\text{RMS}_{ji} = (\partial u/\partial x_i)/(\partial u/\partial x_j) = (\partial G/\partial x_i)/(\partial G/\partial x_j) \equiv \text{RMT}_{ji}$ para todo par de bienes. Con ella, la condición de primer orden de cada bien no afectado, $i \neq k$, tiene tres términos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \underbrace{\lambda\,\frac{\partial G}{\partial x_i}}_{\text{coste marginal del bien } i} - \underbrace{\mu\,[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \delta\,\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k}]}_{\text{efecto del bien } i \text{ sobre la restricción del sector } k} = 0$$

Los dos primeros términos son los del *first best*, en el que la valoración marginal de cada bien iguala a su coste marginal. El tercero es nuevo y recoge cómo una unidad más del bien i altera la valoración y el coste marginales del bien k y, con ellos, la restricción que pesa sobre ese sector. Solo se anula si las derivadas cruzadas son nulas, es decir, si los bienes i y k no están relacionados ni en la utilidad ni en la producción. Dividiendo las condiciones de dos bienes no afectados, i y j:

$$\frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_j} = \frac{\partial G/\partial x_i + \mu\,(\partial^2 u/\partial x_i \partial x_k - \delta\,\partial^2 G/\partial x_i \partial x_k)/\lambda}{\partial G/\partial x_j + \mu\,(\partial^2 u/\partial x_j \partial x_k - \delta\,\partial^2 G/\partial x_j \partial x_k)/\lambda}$$

de modo que $\text{RMS}_{ji} \neq \text{RMT}_{ji}$ salvo que las derivadas cruzadas se anulen.

En términos económicos, la distorsión en k se transmite a los demás sectores porque los bienes están relacionados entre sí, en el consumo (son sustitutivos o complementarios) y en la producción (compiten por los mismos recursos). Si el precio de k supera a su coste marginal, los consumidores sustituyen el bien k por otros bienes más de lo eficiente, y el precio de esos bienes deja de ser neutral, porque encarecerlos devuelve demanda al sector distorsionado. Por ello, el óptimo restringido exige apartar también sus precios del coste marginal, en una cuantía que depende de esas derivadas cruzadas y que no tiene signo general.

CSO: la caracterización supone que el óptimo restringido es interior y que el conjunto factible sigue siendo convexo tras añadir la restricción. Lipsey y Lancaster se limitan a las condiciones necesarias, que es lo que el teorema compara.

Desarrollo gráfico: el teorema del *second best* se representa en el plano u^A-u^B (figura A22.7):

1. *Frontera de posibilidades de utilidad* (FPU): recoge las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto.

2. *Restricción r*: delimita la parte del conjunto de utilidades que sigue siendo accesible.

3. *Curvas de indiferencia social*: W_C, W_E y W_D reúnen las combinaciones de utilidades de igual bienestar social, mayor cuanto más alejadas del origen.

4. *Equilibrio*: sin la restricción, el *first best* es el punto C de la FPU en el que W_C es tangente a ella, pero la restricción r hace inalcanzable C. Dentro de la parte accesible, la asignación D, situada sobre la FPU, cumple las restantes condiciones de Pareto. La asignación E, en cambio, pese a ser ineficiente en el sentido de Pareto, alcanza una curva de indiferencia social, W_E, más alejada del origen que W_D. El *second best* es, por tanto, E.

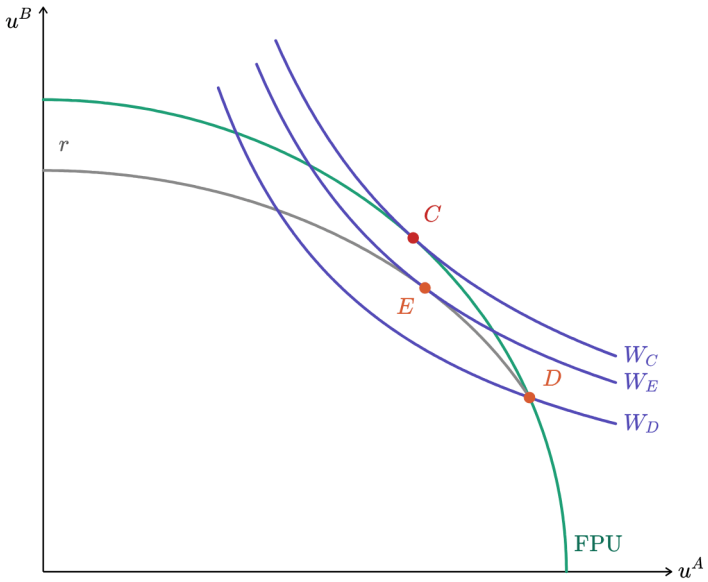


Figura A22.7: Teorema del *second best* (Lipsey y Lancaster, 1956). Si una condición de optimalidad no puede cumplirse, cumplir las restantes no garantiza el mejor resultado alcanzable.

Extensiones: un caso ilustrativo es el de una economía con dos bienes, x e y, producidos con costes marginales constantes, en la que x es un monopolio no regulable que fija $p_x = \delta \cdot \text{Cmg}_x$, con $\delta > 1$. La regla del *first best* aconsejaría fijar en el sector competitivo $p_y = \text{Cmg}_y$. Sin embargo, con esa regla el precio relativo p_x/p_y supera al cociente de costes marginales, de modo que los consumidores sustituyen x por y más de lo eficiente.

El *second best* consiste en fijar p_y también por encima de su coste marginal, con un margen que restablezca el precio relativo eficiente, $p_y = \delta \cdot \text{Cmg}_y$. Se introduce una distorsión en y para compensar la de x, y el bienestar es mayor que con $p_y = \text{Cmg}_y$, aunque ambos precios estén ahora distorsionados. El ejemplo ilustra la lógica de la regulación de las empresas públicas que compiten con sectores no competitivos.

3.1.3. Corolarios

1. *Distorsiones compensatorias*: la existencia de una distorsión que no puede eliminarse puede hacer deseable mantener otras o incluso introducirlas, como muestra el caso anterior. Con todo, el resultado solo tiene sentido cuando la distorsión original es inevitable, porque, si puede eliminarse y no persisten otras, eliminarla es siempre mejor.

2. *Ruptura con la teoría tradicional*: la doctrina anterior pedía cumplir todas las condiciones de óptimo que estuvieran al alcance, y el *second best* muestra que esa receta puede ser contraproducente.

3. *Irrelevancia del recuento*: contar las condiciones de óptimo satisfechas no dice nada sobre el bienestar, porque cumplir más de ellas no garantiza estar mejor.

4. *Ambigüedad de las reformas parciales*: si se suprime una sola distorsión, el bienestar puede subir, bajar o quedarse igual.

3.2. Implicaciones para la política económica

El teorema implica que no existen resultados generales. Cuando no se cumplen todas las condiciones de optimalidad, ninguna política parcial (*piecemeal policy*) garantiza una mejora de bienestar, y cada intervención ha de evaluarse en su contexto. De ahí derivan las aplicaciones siguientes.

1. *Regulación y empresa pública*: si una empresa pública compite con monopolistas o convive con sectores distorsionados, fijar $p = \text{Cmg}$ deja de ser óptimo para el conjunto. Conviene entonces apartar el precio del coste marginal para compensar esas distorsiones. Otra cosa ocurre con la empresa de rendimientos crecientes obligada a cubrir costes, cuyo *second best* son los precios de Ramsey-Boiteux, mientras que las tarifas en dos partes y los precios pico-valle mantienen $p = \text{Cmg}$ en el margen (temas A17 y A20).

2. *Imposición distorsionante*: un segundo impuesto crea un segundo exceso de gravamen, pero puede contrarrestar el sesgo del primero. De ahí que la imposición óptima no sea la que minimiza cada distorsión por separado. Los impuestos de suma fija, los únicos no distorsionantes, son difíciles de implementar y, si son uniformes por persona, regresivos, como mostró el fracaso del *poll tax* británico de 1990[14].

3. *Comercio internacional*: es el origen histórico de la teoría. Una unión aduanera elimina los aranceles entre sus miembros pero los mantiene frente a terceros, de modo que su efecto neto es ambiguo y una liberalización parcial no es necesariamente una mejora (tema B10, apartado 1.1). La ambigüedad procede de dos efectos de signo contrario:

- *Creación de comercio*: sustituir producción nacional cara por importaciones baratas del socio.
- *Desviación de comercio*: sustituir importaciones baratas de terceros por importaciones caras del socio.

4. *Evaluación de proyectos*: como no hay teoremas generales, cada caso ha de evaluarse individualmente, lo que da al análisis coste-beneficio, con precios sombra que incorporan las distorsiones existentes, su papel central en la política económica (tema A20).

3.3. Desarrollos posteriores

Las primeras respuestas al teorema trataron de acotar su alcance, pues en su formulación original parecía invalidar toda la economía del bienestar aplicada. La más intuitiva divide las condiciones de optimalidad en tres bloques, la eficiencia en el intercambio, en la producción y global, y sostiene que una distorsión en uno de ellos no obliga a revisar los otros dos. Si la distorsión se produce, por ejemplo, en el reparto del *output* entre consumidores, las condiciones de eficiencia en la producción (igualdad de las RMST entre empresas) pueden seguir siendo deseables. La razón es que producir sobre la frontera de posibilidades de producción amplía el conjunto de asignaciones alcanzables.

El argumento confina el problema del *second best* al bloque afectado y permite seguir usando como guía las condiciones de los bloques no afectados. No es, sin embargo, un resultado general,

[14] El *poll tax* (Community Charge), implantado en Escocia en 1989 y en Inglaterra y Gales en 1990, contribuyó a la caída de Thatcher, que dimitió en noviembre de 1990.

porque los tres bloques están ligados por los precios y las cantidades, y la validez del argumento depende de los instrumentos fiscales disponibles, como precisarían Diamond y Mirrlees. Los tres desarrollos que siguen sustituyen esta intuición por condiciones precisas (Davis y Whinston, Diamond y Mirrlees) o por reglas prácticas (Ng).

3.3.1. La separabilidad por sectores (Davis y Whinston, 1965)

Origen: Otto Davis y Andrew Whinston (1965) precisaron la condición bajo la cual una distorsión en un sector no afecta a las reglas óptimas de los demás.

Idea: si el sector distorsionado es *separable* del resto de la economía, es decir, si las derivadas cruzadas de la utilidad y de la producción entre ese sector y los demás son nulas, la distorsión no se transmite.

Razonamiento: en la condición de primer orden del modelo, los términos que apartan la RMS de la RMT son los que contienen las derivadas cruzadas con el bien k. Si son nulas, esos términos desaparecen y las condiciones de Pareto se recuperan íntegras para todos los pares de bienes que no incluyen a k, con lo que el *second best* queda confinado al sector de la distorsión.

Por ello, la política parcial recupera su validez cuando las interdependencias son débiles, lo que en la práctica ocurre entre sectores lejanos en la cadena de producción y en las preferencias. El resultado permite aplicar las reglas del *first best* sector por sector siempre que pueda argumentarse la separabilidad.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: precisa la condición formal, la separabilidad, bajo la cual una distorsión no se transmite al resto de la economía, y fundamenta así el análisis de equilibrio parcial y las reglas sectoriales en presencia de distorsiones.

- *Limitaciones*: la separabilidad exige derivadas cruzadas nulas, un supuesto fuerte que rara vez se cumple con exactitud y es difícil de contrastar, de modo que el problema se traslada a juzgar empíricamente cuán débiles son las interdependencias.

3.3.2. La eficiencia productiva (Diamond y Mirrlees, 1971)

Origen: Peter Diamond y James Mirrlees (1971) obtuvieron un resultado en sentido contrario al de Lipsey-Lancaster, en el marco de la imposición óptima.

Idea: aunque el óptimo sea un *second best* por la existencia de impuestos distorsionantes sobre los consumidores, la *eficiencia productiva* sigue siendo deseable, es decir, la economía debe seguir produciendo sobre su frontera de posibilidades de producción.

Razonamiento: el resultado exige que el Gobierno pueda gravar todas las transacciones con los consumidores y controlar los beneficios de las empresas (impuestos sobre beneficios al cien por cien o rendimientos constantes). Bajo esas condiciones, cualquier distorsión en la producción puede sustituirse por una distorsión en el consumo que deje a los consumidores igual de bien y aumente la recaudación, de modo que las distorsiones deben concentrarse en el consumo y no en la producción.

El teorema fundamenta que la imposición óptima grave los bienes finales y no los intermedios, que las empresas públicas usen los mismos precios sombra que las privadas y que no se impongan aranceles sobre los bienes intermedios. Este resultado es la razón teórica del IVA frente a los impuestos en cascada.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: rescata del teorema del *second best* un principio general y operativo, la eficiencia productiva, y lo convierte en una de las guías centrales del diseño de la imposición y de la producción pública.

- *Limitaciones*: descansa en supuestos exigentes, como gravar todas las transacciones con los consumidores y apropiarse de los beneficios puros de las empresas. Si estos no pueden gravarse plenamente, puede ser óptimo introducir también distorsiones en la producción.

3.3.3. La teoría del *third best* (Ng, 1977)

Origen: Yew-Kwang Ng (1977) añadió a las distorsiones que no pueden eliminarse las que el propio regulador introduce por su falta de información.

Idea: calcular el *second best* exige conocer las derivadas cruzadas de todos los sectores con el distorsionado. Si el regulador no dispone de esa información, ni de la capacidad administrativa para aplicar precios distintos en cada sector, la política de *second best* es inalcanzable y ha de buscarse un *third best*.

Razonamiento: con información limitada, el regulador se enfrenta a una elección entre dos opciones, la de aplicar las condiciones del *first best* en los sectores que puede controlar o la de intentar aproximar el *second best* con estimaciones inciertas. Ng muestra que, cuando la incertidumbre sobre las interdependencias es grande, la primera opción tiene un valor esperado mayor, porque los errores de una política de *second best* mal calibrada pueden ser peores que la ineficiencia de ignorar las interdependencias.

La teoría del *third best* rehabilita, por una vía distinta, las reglas del *first best* como reglas prácticas, y anticipa la teoría de la regulación con información asimétrica (tema A20).

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: incorpora al análisis normativo los costes de información y de administración del propio regulador, y ofrece una justificación práctica de las reglas simples frente a políticas de *second best* difíciles de calibrar.

- *Limitaciones*: la superioridad de las reglas del *first best* no es general, pues depende del grado de incertidumbre sobre las interdependencias. Así, cuando el regulador dispone de buena información, el *second best* sigue siendo preferible.

3.4. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría del *second best* es una de las advertencias metodológicas más influyentes de la economía normativa. Muestra que, en general, las condiciones de optimalidad solo tienen valor si se satisfacen todas a la vez, que cumplir más condiciones no implica mayor bienestar y que, en presencia de distorsiones inevitables, la política económica no tiene atajos. Fundamenta, además, las reglas de precios de la regulación (Ramsey-Boiteux), la teoría de la imposición óptima y la teoría de las uniones aduaneras.

Limitaciones: por su misma generalidad, la teoría no dice por sí sola qué hacer, y su uso indiscriminado puede justificar cualquier distorsión con el argumento de que compensa otra. Aun así, los desarrollos posteriores acotan los casos en que la lógica del *first best* sigue siendo válida.

Conclusiones

El tema recorre el camino que va del criterio de Pareto a sus límites. La dominancia paretiana, aplicada al vector de utilidades, define un orden parcial que identifica el óptimo económico sin comparar utilidades entre personas, y en una economía 2x2x2x2 ese óptimo exige igualar las RMST entre empresas, las RMS entre consumidores y ambas con la RMT. Los dos teoremas fundamentales enlazan esas condiciones con el mercado, pues el equilibrio competitivo es eficiente y cualquier óptimo puede alcanzarse como equilibrio tras redistribuir las dotaciones. Cuando sus supuestos fallan, el excedente mide la pérdida de bienestar, y aun cuando se cumplen, la indeterminación entre óptimos obliga a recurrir a los criterios de compensación o a una función de bienestar social, con los juicios de valor que Pareto quería evitar. La teoría del *second best* advierte, por último, de que si una condición de optimalidad no puede cumplirse, perseguir las demás puede empeorar el resultado.

La economía del bienestar se apoya en las teorías del consumidor y de la producción (temas A08 y A11) y en el equilibrio general walrasiano, cuyas propiedades normativas desarrolla (tema A21). Sus dos límites abren los temas siguientes. Cuando fallan los supuestos del primer teorema, aparecen los fallos de mercado (tema A23), y cuando hay que elegir entre óptimos, la función de bienestar social y la elección colectiva (tema A24). La lógica del *second best*, por su parte, tiene aplicaciones muy diversas, de los precios de Ramsey-Boiteux y el análisis coste-beneficio en la regulación (tema A20) a la teoría de las uniones aduaneras, que pueden crear o desviar comercio (tema B10).

Los debates actuales giran en torno a los supuestos y a la medición. La economía del bienestar conductual cuestiona el no paternalismo, pues cuando las elecciones son incoherentes las preferencias reveladas dejan de ser una guía fiable del bienestar, y Bernheim y Rangel (2009) proponen evaluarlas solo a partir de las elecciones que no se contradicen. En el terreno de la compensación, los pesos sociales marginales generalizados de Saez y Stantcheva (2016) y el valor marginal de los fondos públicos de Hendren y Sprung-Keyser (2020) incorporan juicios distributivos explícitos al análisis coste-beneficio. Lo hacen sin renunciar a medir el bienestar mediante la disposición a pagar. Ambas líneas confirman la lección de Little, pues la evaluación de políticas no puede prescindir de los juicios de valor.

A23. Economía del bienestar (II)

Economía del bienestar (II). Fallos de mercado: externalidades y bienes públicos. Intervención y fallos del sector público.

Introducción

Introducción común. Los temas A22 a A24 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A22**. Presenta la economía del bienestar, que juzga si las asignaciones de recursos son deseables para el conjunto de la sociedad, y sus tres etapas, de la teoría tradicional a la nueva economía del bienestar y la novísima, basada en la elección colectiva y el *second best*.

Pigou (1920) mostró que, cuando la actividad de un agente afecta a otros sin pasar por el mercado, el precio no recoge todo su coste social, y propuso corregirlo con un impuesto, el **impuesto pigouviano**. Samuelson (1954) formalizó los **bienes públicos**, que nadie puede ser excluido de consumir y cuyo consumo no reduce el de los demás, y Coase (1960) sostuvo que, si los derechos de propiedad están bien definidos y negociar no cuesta, las partes pueden resolver las externalidades por sí solas. Esas tres ideas siguen ordenando el debate actual, del precio del carbono como respuesta al cambio climático a la provisión de bienes públicos globales. Por la misma lógica, las externalidades positivas, como las que generan la investigación o la vacunación, justifican subvenciones que acerquen la producción a su nivel eficiente.

Frente a la tradición que veía en el sector público un corrector benevolente de los fallos de mercado, la **teoría de la elección pública** de Buchanan y Tullock (1962) analizó a políticos, votantes y burócratas como agentes que persiguen su propio interés, y mostró que la intervención también puede fallar. Buchanan recibió el Premio Nobel en 1986 por estas aportaciones.

Cada fallo de mercado tiene su remedio, desde la provisión pública de bienes públicos y los impuestos o mercados de derechos que corrigen las externalidades hasta la regulación y la defensa de la competencia frente al poder de mercado (tema A20). Sin embargo, la elección pública añade a la cuenta el coste de aplicarlos, con la búsqueda de rentas, la captura del regulador, el ciclo político y la expansión de la burocracia (Niskanen, 1971), y obliga a comparar dos soluciones imperfectas, el mercado y el sector público.

Aunque el primer teorema fundamental del bienestar garantiza la eficiencia de la asignación competitiva, sus condiciones rara vez se cumplen en la realidad. Este tema estudia esas situaciones y sus consecuencias para la intervención pública en tres partes:

- *Eficiencia paretiana*: se recuerdan las condiciones de eficiencia paretiana en una economía competitiva simple y los teoremas fundamentales.

- *Fallos de mercado*: se analiza la teoría de los fallos de mercado, con especial atención a los bienes públicos y a las externalidades.

- *Elección pública*: se expone la teoría de la elección pública, que muestra que el sector público tampoco es neutral y que sus propios fallos pueden limitar la eficacia de la intervención.

1. Condiciones de eficiencia u optimalidad paretiana en una economía simple competitiva

Arrow (1951a) y Debreu (1954) probaron que, bajo competencia perfecta, el mecanismo de precios conduce a un equilibrio general óptimo en el sentido de Pareto, y juntos demostraron su existencia (Arrow y Debreu, 1954). Los precios de ese equilibrio vacían todos los mercados y dejan a cada agente en su plan óptimo. Con competencia perfecta y sin imperfecciones transmiten, además, toda la información relevante, porque reflejan la escasez relativa de cada bien, resumen la tecnología y las preferencias e incorporan todos los costes de producción y todas las utilidades del consumo.

1.1. Supuestos y condiciones de eficiencia en una economía 2x2x2x2

Las condiciones se obtienen, sin los programas de optimización ni su desarrollo gráfico, en una economía simple 2x2x2x2, con dos bienes, dos factores, dos empresas y dos consumidores.

> La economía 2x2x2x2 es el mismo modelo que se desarrolla en el tema A22, apartado 1.2, con los programas de eficiencia en la producción, en el consumo y global, las cajas de Edgeworth y las fronteras de posibilidades de producción y de utilidad. Aquí se resume en lo que necesitan los fallos de mercado.

1.1.1. Supuestos

Entorno: hay competencia perfecta en todos los mercados de bienes y factores, es decir, mercados completos, agentes precio-aceptantes e información completa.

Agentes: dos empresas, cada una especializada en un bien, y dos consumidores cuya utilidad depende solo de su propio consumo (sin externalidades en el consumo) y es diferenciable, creciente y cuasicóncava, con curvas de indiferencia convexas.

Tecnología: dos bienes privados, x e y, rivales y excluibles, producidos con dos factores, K y L, cuya oferta es perfectamente inelástica[1]. Cada función de producción es diferenciable, depende solo de los factores que emplea su empresa (sin externalidades en la producción) y tiene productividades marginales positivas y decrecientes y rendimientos no crecientes a escala[2], de modo que la frontera de posibilidades de producción (FPP) es cóncava.

1.1.2. Modelo

Condición de optimalidad en la producción: cada productor maximizador elige la combinación de factores en la que su relación marginal de sustitución técnica (RMST) coincide con el cociente de los precios de esos factores. En competencia perfecta todos son precio-aceptantes y pagan los mismos precios. Por ello, cuando hay un vector $\mathbf{p}^z = (w, r)$ de equilibrio competitivo, se cumple:

$$\text{RMST}^x_{KL} = \frac{\partial f_x/\partial L_x}{\partial f_x/\partial K_x} = \frac{\partial f_y/\partial L_y}{\partial f_y/\partial K_y} = \text{RMST}^y_{KL} = \frac{w}{r}$$

[1] Supuesto de simplificación análogo a Heckscher-Ohlin-Samuelson. Implica que los agentes ofrecen toda su dotación factorial.

[2] Con rendimientos crecientes la FPP podría ser convexa, comprometiendo el máximo de bienestar.

Esta condición queda recogida en la FPP, cuya pendiente en el plano (x, y) es, en valor absoluto, $\text{RMT}_{yx} = \text{Cmg}_x/\text{Cmg}_y = (\partial f_y/\partial L_y)/(\partial f_x/\partial L_x) = (\partial f_y/\partial K_y)/(\partial f_x/\partial K_x)$.

Condición de optimalidad en el consumo: cada consumidor elige la cesta en la que su relación marginal de sustitución (RMS) coincide con el precio relativo de los dos bienes. Si existe un vector $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ de equilibrio competitivo, se cumple:

$$\text{RMS}^A_{yx} = \frac{\partial u^A/\partial x}{\partial u^A/\partial y} = \frac{\partial u^B/\partial x}{\partial u^B/\partial y} = \text{RMS}^B_{yx} = \frac{p_x}{p_y}$$

Condición de optimalidad global: el vínculo entre producción y consumo se encuentra en los precios relativos. Como $w = p_x f'_{L_x}$ y $w = p_y f'_{L_y}$, se obtiene $p_x/p_y = f'_{L_y}/f'_{L_x} = \text{RMT}_{yx}$. Por tanto:

$$\text{RMS}^h_{yx} = \frac{p_x}{p_y} = \text{RMT}_{yx}$$

El sistema competitivo garantiza que todas las valoraciones coinciden, es decir, que la tasa subjetiva de intercambio (RMS) iguala la tasa objetiva de transformación (RMT). De este modo, guiado por una *mano invisible*, cada individuo, persiguiendo su interés personal, adopta un curso de acción que asegura una asignación globalmente eficiente (la "tarta" alcanza su tamaño máximo, aunque no necesariamente se maximiza el bienestar social).

1.2. Teoremas fundamentales del bienestar

Tras las condiciones de eficiencia vienen los dos teoremas fundamentales del bienestar y los supuestos de los que dependen.

> Los dos teoremas se enuncian, demuestran y valoran en el tema A22, apartado 2. Aquí se recuerdan en lo que interesa a los fallos de mercado.

El primer teorema establece que todo equilibrio competitivo es una asignación eficiente en el sentido de Pareto[3]. Según el segundo, cualquier óptimo de Pareto puede alcanzarse como equilibrio competitivo tras una redistribución de las dotaciones iniciales mediante transferencias de suma fija, siempre que preferencias y tecnologías sean convexas[4].

Lo que importa para este tema son los supuestos de los que dependen los teoremas, es decir, bienes privados (rivales y excluibles), ausencia de efectos externos, agentes precio-aceptantes e información completa. Cada fallo de mercado es la violación de uno de ellos, y el sector público interviene para restablecer las condiciones de eficiencia que el fallo impide cumplir.

[3] Supuestos: ausencia de fallos de mercado (mercados completos, agentes precio-aceptantes) y, como único requisito sobre las preferencias, insaciabilidad local (Mas-Colell et al., 1995, pp. 549-550).

[4] La convexidad garantiza que la tangente común a las curvas de nivel en la caja de Edgeworth sea una recta de precios que sostiene el óptimo como equilibrio (Gravelle y Rees, 2004; Mas-Colell, Whinston y Green, 1995).

1.3. Conclusiones

Aspectos positivos: las condiciones de eficiencia paretiana y los dos teoremas del bienestar establecen con precisión qué debe cumplirse para que el equilibrio competitivo sea eficiente y, con ello, proporcionan el criterio con el que identificar los fallos de mercado.

Limitaciones: los teoremas nada dicen sobre la equidad de la asignación, descansan en supuestos exigentes (mercados completos) y el segundo exige además convexidad y presupone transferencias de suma fija que en la práctica no existen. Estas limitaciones son el punto de partida del apartado 2 (fallos de mercado) y del apartado 3 (fallos del sector público).

2. Teoría de los fallos de mercado

Uno de los principales motivos que justifica la intervención es la existencia de imperfecciones o **fallos de mercado**, los cuales hacen que las decisiones descentralizadas de los agentes no conduzcan a la eficiencia económica.

La teoría nace de las aportaciones de Pigou (*The Economics of Welfare*, 1920) y se desarrolla con Meade (1952) y Samuelson (1954a). Intervenir por eficiencia exige un fallo de mercado, pero estos fallos no bastan y solo aportan un argumento *prima facie*[5]. Se clasifican en cuatro categorías principales: bienes públicos, externalidades, poder de mercado e información imperfecta.

2.1. Bienes públicos

Los bienes públicos plantean tres preguntas: qué los distingue de los privados, cuánto conviene proveer y quién debe proveerlos.

2.1.1. Concepto y tipos: una taxonomía de los bienes

La naturaleza de cualquier bien, público o privado, se determina por dos propiedades independientes:

1. *Rivalidad*: un bien es *rival* cuando la unidad que consume un individuo ya no está disponible para otro, y *no rival* cuando todos pueden disfrutarlo a la vez sin que el uso de uno merme lo que queda para el resto. Por ello, en un bien no rival, atender a un consumidor más tiene coste marginal nulo[6].

2. *Exclusión*: un bien es *excluible* cuando dejar fuera a quien no paga es técnicamente viable y no demasiado caro, y *no excluible* cuando, ya disponible, cerrarle el paso a quien no paga es imposible o tiene un coste muy elevado.

La no exclusión dificulta la provisión privada, porque nadie tiene incentivos a pagar por lo que puede consumir gratis. Esa falta de incentivos es el **problema del *free rider*** (gorrón), que puede hacer desaparecer la oferta privada del bien[7].

Cruzando ambas propiedades se obtienen cuatro categorías de bienes:

1. *Bienes privados*: rivales y excluibles, y son los que el mercado asigna eficientemente.

2. *Bienes públicos puros* (Samuelson, 1954a): no rivales y no excluibles (la defensa nacional, el alumbrado público, el conocimiento básico), y son el objeto de este apartado.

3. *Bienes de club* (Buchanan, 1965): excluibles pero no rivales hasta la congestión (una piscina, una autopista de peaje, una plataforma digital). La exclusión permite financiarlos con cuotas, y el problema económico es el tamaño óptimo del club, aquel en el que el beneficio marginal de un nuevo socio iguala al coste de congestión que impone a los demás.

[5] La teoría de los fallos de mercado concede fundamentación normativa de la acción colectiva (Albi et al., 2017, vol. I, p. 77).

[6] La no rivalidad de las autopistas o del aire es relativa y depende de su abundancia, pues se vuelven rivales al congestionarse.

[7] La exclusión depende de medios materiales o jurídicos, es decir, del reparto de derechos de propiedad.

4. *Bienes comunales* o *recursos de uso común*: rivales pero no excluibles (los caladeros, los pastos, los acuíferos, la atmósfera…), cuyo fallo característico es la *tragedia de los comunes* (Hardin, 1968). Como cada usuario obtiene todo el beneficio de una unidad adicional de uso y soporta solo una fracción del coste total que esta genera, el recurso se sobreexplota, en el límite hasta agotarse. La situación tiene la estructura de un dilema del prisionero con muchos jugadores, y sus soluciones (derechos de propiedad, regulación del acceso, acuerdos autoimpuestos) se examinan en los apartados 2.1.4 y 2.2.5 y en el tema B19, apartado 2.2.

De la taxonomía se desprende que los bienes públicos, en sentido amplio, son los que carecen de al menos una de las dos propiedades del bien privado y pueden ser rivales o excluibles, pero nunca ambas cosas a la vez. En todo caso, de las dos propiedades, la relevante para la naturaleza del bien es la no rivalidad, porque altera las condiciones de eficiencia en la provisión, mientras que la excluibilidad determina si la provisión puede ser privada. Por su ámbito geográfico, los bienes públicos pueden ser, además, locales, regionales o globales.

2.1.2. Provisión eficiente: el modelo de Samuelson (1954a)

Origen: Paul Samuelson (*The Pure Theory of Public Expenditure*, 1954a) formuló el problema de la provisión óptima de los bienes públicos en un modelo de equilibrio general con un número cualquiera de bienes privados y públicos. En ese modelo obtuvo la condición de eficiencia que lleva su nombre, y al año siguiente expuso el modelo gráficamente con dos bienes y dos consumidores (Samuelson, 1955), que es la versión que se presenta aquí.

Idea: la no rivalidad altera la condición de optimalidad global del tema A22. Como todos consumen la misma cantidad del bien público, su valoración social no es la de un consumidor sino la suma de las de todos, y esa suma ha de igualarse al coste marginal.

Supuestos:

▪ *Entorno*: economía de equilibrio general con dos consumidores, un bien público g y un bien privado x, en la que se supone información perfecta.

▪ *Agentes*: dos consumidores, A y B, con preferencias cuasilineales, $u^h = v^h(g) + x^h$, de modo que la relación marginal de sustitución entre el bien público y el privado, $\text{RMS}^h_{xg} = v^{h\prime}(g)$, no depende del consumo del bien privado. Por la no rivalidad, ambos consumen la misma cantidad del bien público, $g^A = g^B = g$, mientras que el bien privado se reparte, $x^A + x^B = x$.

▪ *Tecnología*: ambos bienes se producen con una dotación de factores dada, de modo que las combinaciones factibles vienen dadas por una FPP, $T(x, g) = 0$, cuya pendiente en el plano (g, x) es, en valor absoluto, la relación marginal de transformación RMT_{xg}.

Planteamiento: el planificador maximiza la utilidad de un consumidor manteniendo la del otro en un nivel dado, sujeto a la tecnología y a las condiciones de consumo de cada bien:

$$\max_{x^A,\, x^B,\, g} \; u^A(x^A, g)$$

$$\text{s.a.:} \begin{cases} u^B(x^B, g) = u_0^B & \text{(utilidad de } B \text{ dada)} \\ x^A + x^B = x & \text{(reparto del bien privado)} \\ g^A = g^B = g & \text{(no rivalidad del bien público)} \\ T(x, g) = 0 & \text{(FPP)} \end{cases}$$

donde x^A, x^B son los consumos del bien privado de A y de B y g la cantidad del bien público (variables de decisión), $u^A(\cdot)$ y $u^B(\cdot)$ sus funciones de utilidad, u_0^B el nivel de utilidad de B que se toma como dado, $x = x^A + x^B$ la producción total del bien privado y $T(x, g) = 0$ la FPP, determinada por la tecnología y la dotación de factores.

CPO: con solución interior y las restricciones agotadas, derivando el lagrangiano respecto a x^A, x^B y g y eliminando los multiplicadores, resulta la conocida *condición de Samuelson*:

$$\sum_h \text{RMS}_{xg}^h = \text{RMT}_{xg}$$

El bien público ha de producirse hasta que su valoración marginal social, la suma de lo que una unidad más vale para cada usuario, coincida con lo que esa unidad cuesta en bien privado sacrificado.

Por tanto, la condición difiere de la de los bienes privados, $\text{RMS}^A = \text{RMS}^B = \text{RMT}$. Con un bien privado, cada consumidor ajusta su cantidad hasta igualar su valoración marginal al coste (segunda ley de Gossen), mientras que con el bien público la cantidad es común y se suman las valoraciones. En el óptimo, en general, $\text{RMS}_{xg}^A \neq \text{RMS}_{xg}^B$.

CSO: la concavidad de $v^h(g)$ (valoraciones marginales decrecientes del bien público) y la concavidad de la FPP (conjunto de producción convexo) garantizan que la condición de Samuelson caracteriza el óptimo.

Desarrollo gráfico: la condición de Samuelson se representa en el plano bien público-bien privado (g-x) de los dos paneles de la figura A23.1:

1. *Frontera de posibilidades de producción* ($T(x, g) = 0$, panel superior): sobre ella se encuentran las combinaciones Pareto-óptimas de producción. Con la curva siguiente forma las restricciones "brutas".

2. *Curva de indiferencia de B* (u_0^B, panel superior): reúne las combinaciones de bien público y bien privado que dan a B la utilidad u_0^B, y actúa como restricción. Puesto que A disfruta del bien público en la misma cantidad que B y le corresponde el bien privado que no consume B, la distancia vertical entre las dos curvas mide, para cada g, lo disponible para A.

3. *Frontera de posibilidades de consumo de A* (FPC^A, panel inferior): es la restricción "neta" de A, esa distancia vertical trasladada al origen, dada la utilidad de B. Su pendiente equivale a la de la FPP menos la que tiene la curva de indiferencia de B.

4. *Curva de indiferencia de A* (u_*^A, panel inferior): reúne las combinaciones de bien público y bien privado que dan a A una misma utilidad, y es la más alta que A puede alcanzar sobre su FPC^A.

5. *Óptimo*: en el punto 0, la FPC^A es tangente a u_*^A, con g^* unidades del bien público y x^{A*} del privado para A. La tangencia, $\text{RMS}^A = \text{RMT} - \text{RMS}^B$, es exactamente la condición de Samuelson.

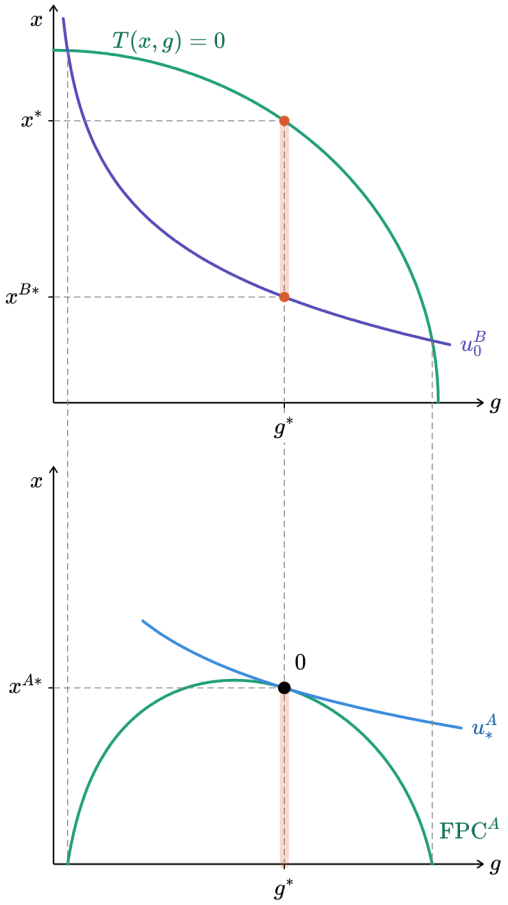


Figura A23.1: Condición de Samuelson. Restando en vertical la curva de indiferencia de B a la FPP se obtiene, para A, la frontera de posibilidades de consumo. Allí donde esa frontera toca tangencialmente la curva de indiferencia más alta de A (punto 0), la suma de las RMS iguala a la RMT.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el modelo ofrece una condición de eficiencia fácil de interpretar para los bienes públicos. Se provee la cantidad adecuada si el beneficio que la última unidad reporta al conjunto de los consumidores coincide exactamente con lo que cuesta producirla. La suma vertical de las demandas individuales, frente a la suma horizontal de los bienes privados, es su expresión gráfica y el fundamento del análisis coste-beneficio de los proyectos públicos.

▪ *Limitaciones*: la condición dice cuánto producir, no cómo. Exige conocer las valoraciones marginales de todos los consumidores, que estos no tienen incentivos a revelar, y no determina cómo repartir el coste. Ambas cuestiones, la revelación de preferencias y la financiación, se tratan en el apartado 2.1.4. La condición supone, además, que el bien se financia con impuestos de suma fija. En cambio, si los impuestos que lo financian son distorsionantes, la regla ha de incorporar su coste de eficiencia y deja de ser la condición de Samuelson pura (Atkinson y Stern, 1974).

2.1.3. Provisión privada: el equilibrio de contribuciones voluntarias (Bergstrom, Blume y Varian, 1986)

Origen: el análisis de la provisión privada como equilibrio de contribuciones voluntarias prolonga la condición de Samuelson (1954a) con la lógica de la acción colectiva de Olson (1965), y su formulación canónica como juego de contribuciones se debe a Bergstrom, Blume y Varian (1986). El problema del *free rider* es el reverso de la tragedia de los comunes de Hardin (1968). En esta un recurso rival se sobreexplota, y en aquel un bien no rival se infraprovee, pero en ambos casos cada agente ignora el efecto de su decisión sobre los demás.

Idea: la condición de Samuelson dice cuánto bien público conviene producir, pero no quién lo decide ni quién lo paga. Si la provisión se deja al mercado (a las contribuciones voluntarias de los consumidores), la cantidad resultante queda por debajo de la eficiente, porque cada uno decide su aportación atendiendo a su propia valoración y no a la de los demás.

Razonamiento: con provisión privada cada consumidor que contribuye lo hace hasta que su valoración marginal iguala al coste marginal, $\text{RMS}^h_{xg} = \text{RMT}_{xg}$, como con un bien privado. Sin embargo, como cada RMS^h es menor que la suma $\sum_h \text{RMS}^h$, la cantidad así provista es inferior a la que cumple la condición de Samuelson. Además, en el equilibrio de Nash de las contribuciones voluntarias, el bien lo financia quien más lo valora y los demás se benefician sin pagar, lo que constituye un problema de *free rider*.

La razón está en las dos propiedades del bien:

- *No rivalidad*: la contribución de cada uno beneficia a todos, de modo que cada contribuyente ignora el beneficio que genera a los demás. El precio deja, además, de funcionar como señal, porque desaparece su relación con la utilidad marginal de cada individuo.

- *No exclusión*: nadie puede ser obligado a pagar. Los precios que las empresas pudieran cobrar reflejarían entonces valoraciones individuales y no la social, y los consumidores tendrían incentivos a ocultar la suya, con lo que el mercado no revela las preferencias.

El fallo de la provisión privada depende de que el bien sea o no excluible:

- *Bien público no excluible*: la provisión privada genera infraproducción y una pérdida de eficiencia.

- *Bien de club*: la exclusión es posible y el fallo es distinto, el infraconsumo, porque se cobra un precio positivo por un bien cuyo coste marginal de consumo es nulo.

En ambos casos el mercado falla en la provisión, no necesariamente en la producción, por lo que la respuesta es que el sector público decida y financie la cantidad, aunque la produzcan empresas privadas.

Desarrollo gráfico: la provisión privada del bien público se representa en el plano bien público-precio (figura A23.2):

1. *Demanda social* ($D(g)$): recoge, para cada cantidad del bien público, la suma de las valoraciones marginales de todos los consumidores (suma vertical de las demandas individuales), y es decreciente porque estas valoraciones lo son.

2. *Demanda revelada* ($D_R(g)$): recoge solo la valoración que se revela con contribuciones voluntarias y es, por ello, menor que la social.

3. *Coste marginal* ($\text{Cmg}(g)$): mide lo que cuesta producir cada unidad adicional del bien público.

4. *Equilibrio*: la provisión eficiente, g^*, es el cruce de $D(g)$ con el coste marginal (punto 1). En cambio, con contribuciones voluntarias, el cruce relevante es el de $D_R(g)$ (punto 0) y la provisión, g_R, es insuficiente.

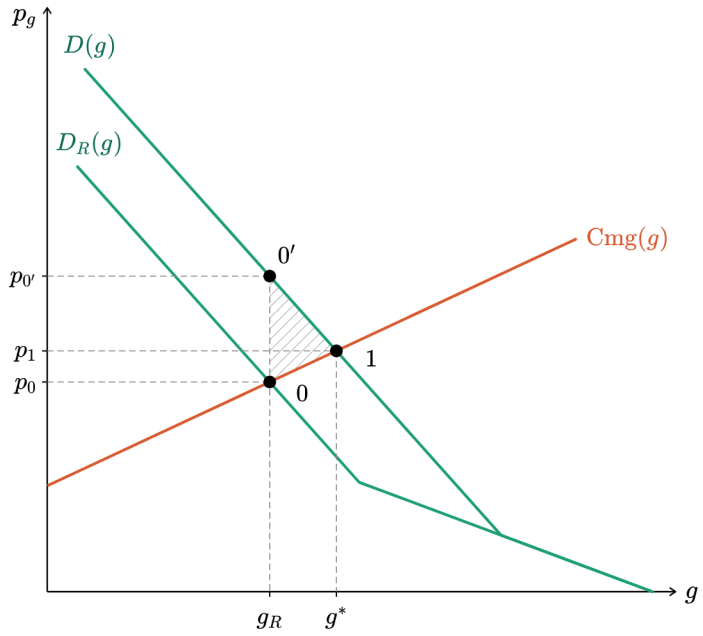


Figura A23.2: Provisión del bien público. La provisión eficiente, g^* (punto 1), iguala la demanda social, $D(g)$, suma vertical de las valoraciones marginales, al coste marginal (la suma de las RMS iguala a la RMT). Con contribuciones voluntarias se revela una demanda menor, $D_R(g)$, y la provisión, g_R (punto 0), es insuficiente, porque en g_R la valoración social (punto $0'$) supera al coste marginal. El área rayada es la pérdida de eficiencia.

Extensiones: el equilibrio de contribuciones voluntarias tiene una propiedad de *neutralidad* (Warr, 1983; Bergstrom, Blume y Varian, 1986). Una redistribución pequeña de la renta entre quienes contribuyen no altera la cantidad total provista, porque cada uno ajusta su aportación en la misma cuantía que cambia su renta. Por la misma razón, la provisión pública financiada con impuestos de suma fija sobre los contribuyentes, si ninguno paga más de lo que aportaba, desplaza sus aportaciones privadas uno a uno. Por tanto, la cantidad total solo aumenta si el impuesto recae también sobre quienes no contribuían.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: explica la infraprovisión de los bienes públicos como un equilibrio de Nash de decisiones individuales racionales y la vincula a las dos propiedades del bien, la no rivalidad y la no exclusión. Con ello fundamenta la intervención pública y delimita su objeto, que es decidir y financiar la cantidad más que producir el bien.

▪ *Limitaciones*: supone agentes que solo atienden a su propia valoración y deciden una sola vez, por lo que predice contribuciones voluntarias menores que las observadas. El altruismo, las normas sociales y la interacción repetida sostienen, sin embargo, aportaciones significativas, como recogen las soluciones de iniciativa privada y de bienes comunales.

2.1.4. Soluciones

Como solo el sector público puede obligar a pagar a quienes de otro modo se comportarían como *free riders*, le corresponde la provisión[8], aunque no necesariamente la producción[9].

Sin embargo, para aplicar la condición de Samuelson, el sector público ha de resolver cómo distribuir el coste entre los contribuyentes (la financiación) y cómo conocer las valoraciones que determinan la cantidad (la revelación de preferencias), dos problemas que esta deja abiertos.

Principios de financiación: para resolver el primer problema, el coste del bien público puede repartirse mediante impuestos según dos criterios de equidad:

1. *Principio de capacidad de pago*: paga más quien dispone de un nivel de renta mayor, como en el impuesto sobre la renta de las personas físicas (IRPF). El sector público aprovecha la necesidad de financiar el bien público para llevar a cabo, además, una redistribución. La limitación de este principio es que los impuestos sobre la renta son generalmente distorsionantes[10], de modo que la financiación introduce una ineficiencia propia, y que este principio desvincula lo que cada uno paga de lo que valora, con lo que no aporta información sobre la cantidad a proveer.

2. *Principio de beneficio*: cada uno paga según lo que el bien le reporta. Este principio vincula la financiación a la valoración, y con ello puede resolver a la vez los dos problemas, si se consigue que las valoraciones se revelen. Los dos mecanismos siguientes lo aplican.

Principio de revelación de preferencias: el segundo problema exige un mecanismo que lleve a los agentes a declarar sus valoraciones verdaderas. El principio de revelación (Gibbard, 1973; Myerson, 1979) permite acotar la búsqueda de ese mecanismo.

Según el *principio de revelación de Gibbard-Myerson*, para cualquier mecanismo de asignación existe un *mecanismo directo equivalente* en el que los agentes se limitan a declarar sus preferencias y tienen incentivos a declararlas verazmente cuando los demás también lo hacen.

La consecuencia es que, al diseñar el mecanismo, el planificador puede restringirse sin pérdida a los que hacen compatible la sinceridad con los incentivos individuales. Los dos mecanismos siguientes buscan esa compatibilidad con distinto éxito. El de Lindahl alcanza la eficiencia solo si los agentes son sinceros, pues no es compatible con los incentivos, y el de Clarke-Groves-Vickrey hace de la sinceridad la estrategia dominante.

Precios personalizados (Lindahl, 1919): Erik Lindahl propuso que cada consumidor pague por cada unidad del bien público un precio igual a su valoración marginal. Así, todos demandan la misma cantidad aunque paguen precios distintos.

- *Condición de provisión*: cada consumidor demanda la cantidad de bien público para la que su valoración marginal iguala a su precio personalizado, $v^{h\prime}(g) = t^h$. La cantidad que el sector público provee es aquella en la que la suma de los precios personalizados iguala al coste marginal:

$$\sum_{h=1}^{H} t^h = \sum_{h=1}^{H} v^{h\prime}(g^*) = \mathrm{Cmg}_g = \mathrm{RMT}_{xg}$$

La condición de provisión con precios de Lindahl es, por tanto, la condición de Samuelson. Si los precios personalizados reflejan las valoraciones verdaderas, la provisión pública resultante es

[8] La provisión es la puesta a disposición del bien con cargo a los presupuestos públicos, y la producción, su fabricación por el propio sector público.

[9] El sector público dispone de cinco instrumentos: estructura legal básica, regulación, financiación, producción/provisión pública, transferencias (Albi et al., 2017, vol. I, p. 79).

[10] Además, utilizar la renta como base plantea un problema de equidad al no tener en cuenta el esfuerzo (Albi et al., 2017, vol. II, p. 20).

eficiente. Con coste marginal constante, además, lo recaudado, $\sum_h t^h g^*$, cubre exactamente el coste de provisión. El *equilibrio de Lindahl* es el análogo del equilibrio competitivo para el bien público, es decir, un vector de precios personalizados y una cantidad tales que todos demandan esa cantidad a su precio y la suma de los precios iguala al coste marginal.

▪ *Principio de financiación*: de beneficio. Cada consumidor paga $T^h = t^h \cdot g^*$, es decir, una participación en el coste igual a su valoración marginal relativa, $s^h = t^h/\text{Cmg}_g$ con $\sum_h s^h = 1$, de manera que quien más valora el bien más paga.

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: si los individuos revelan honestamente sus valoraciones, la asignación es eficiente y equitativa en el sentido del beneficio.

- *Limitaciones*: el regulador ha de conocer las valoraciones individuales, y los consumidores tienen incentivos a tergiversarlas, porque saben que su precio personalizado depende de la demanda que anuncien. Declarar una valoración baja reduce lo que pagan sin apenas reducir la cantidad provista. La eficiencia exige, por tanto, un mecanismo que haga de la revelación sincera la mejor estrategia.

Mecanismos de revelación de preferencias (Vickrey, 1961; Clarke, 1971; Groves, 1973): el *mecanismo de Clarke-Groves-Vickrey* hace que decir la verdad sea la estrategia dominante de cada agente. Para ello, cobra a quien altera la decisión colectiva exactamente el coste que esa alteración impone a los demás.

▪ *Condición de provisión*: cada agente declara su valoración del bien público, v^h, y el mecanismo asigna a cada uno una parte fija del coste, c^h, con lo que su valoración neta es $\tilde{v}^h = v^h - c^h$. El bien se provee si la suma de las valoraciones netas declaradas es positiva, $\sum_h \tilde{v}^h > 0$, que es el análogo discreto de la condición de Samuelson aplicado a las declaraciones. De nuevo, se garantiza así la provisión eficiente siempre que las declaraciones sean sinceras, y la regla de pago hace de la sinceridad la estrategia dominante.

▪ *Principio de financiación*: de beneficio, en su versión del *agente pivote*. Un agente es *pivote* o bisagra si su declaración cambia la decisión, es decir, si sin él el bien no se proveería (o se proveería) y con él sí (o no). Solo los agentes pivote pagan, además de su parte fija, la *tasa de Clarke*, igual al coste que su presencia impone a los demás:

$$T^h = \left| \sum_{j \neq h} \tilde{v}^j \right|$$

La tasa coincide con la valoración neta agregada de los otros, que el voto del agente pivote ha revertido. Los agentes no pivote, en cambio, no pagan nada adicional.

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: como la tasa depende solo de las declaraciones de los demás, ningún agente puede reducirla mintiendo, y como mentir solo puede cambiar la decisión en su contra, revelar la verdad es la estrategia dominante.

- *Limitaciones*: el mecanismo tiene altos costes de información y de implementación, y la sinceridad solo es estrategia dominante si las preferencias son cuasilineales, sin efectos renta. Además, no equilibra el presupuesto. Como la recaudación de las tasas de Clarke no puede devolverse a los agentes sin destruir los incentivos, el mecanismo genera un excedente que ha

de desperdiciarse. De hecho, Green y Laffont (1977) mostraron que, en general, ningún mecanismo con decisión eficiente y sinceridad como estrategia dominante equilibra el presupuesto. Por último, el mecanismo es vulnerable a la colusión entre agentes.

Ejemplo: la tasa de Clarke con tres agentes

Tres agentes, A, B y C, declaran sus valoraciones netas, $\tilde{v}^h$. El bien se provee si su suma es positiva, y cada agente pivote paga la tasa de Clarke, $T^h = \left|\sum_{j\neq h} \tilde{v}^j\right|$.

Tabla A23.1: Tasa de Clarke según las valoraciones netas declaradas.

Valoraciones netas $(\tilde{v}^A, \tilde{v}^B, \tilde{v}^C)$	Suma	Decisión	Pivote	Tasas (T^A, T^B, T^C)
$(70, 0, 0)$	70	Se provee	A	$(0, 0, 0)$
$(70, -30, -30)$	10	Se provee	A	$(60, 0, 0)$
$(-70, 30, 20)$	-20	No se provee	A	$(50, 0, 0)$

En el primer caso, sin A la suma sería 0 y el bien no se proveería, de modo que A es pivote, pero no impone ningún coste a los demás y paga 0. En el segundo, sin A la suma sería -60, y A paga 60, la pérdida neta que la provisión causa a B y C. Sin B o sin C la suma sería 40 y la decisión no cambiaría, por lo que no pagan. En el tercero, A impide un proyecto que B y C valoran en 50 y paga esa cantidad, mientras que sin B (-50) o sin C (-40) la decisión tampoco cambiaría.
El segundo caso muestra por qué mentir no compensa. Si A declara cualquier valor superior a 60, el bien se provee y A paga 60, con una ganancia neta de $70 - 60 = 10$. Si declara 60 o menos, el bien no se provee y A obtiene 0. Declarar su valoración verdadera le da, por tanto, el mejor resultado posible, y el mismo razonamiento vale para cualesquiera declaraciones de los demás.

La votación como alternativa: otra posibilidad es determinar la cantidad mediante un sistema de votación, lo que esquiva el problema de revelación de preferencias. Sin embargo, con preferencias unimodales la votación por mayoría provee la cantidad preferida por el votante mediano, cantidad que, con un reparto igualitario del coste, solo coincide con la eficiente si la valoración marginal del mediano iguala a la media (Bowen, 1943; tema A24, apartado 3.1.3).

Otras soluciones: las vías anteriores no agotan las opciones del sector público ni de la sociedad.

1. *Regulación*: el sector público podría actuar también a través de regulación *ex ante* (mecanismos de autoselección o criba) o regulación *ex post* (auditorías, rendición de cuentas, transparencia).

2. *Bienes públicos locales* (Tiebout, 1956): los individuos se desplazan hacia zonas donde la provisión se ajusta a sus preferencias ("votar con los pies"). Así crean cuasimercados y presiones competitivas que, con movilidad perfecta, muchas jurisdicciones y sin efectos desbordamiento entre ellas, conducen a una provisión eficiente.

3. *Bienes comunales* (Ostrom, 1990): los usuarios directos de recursos comunes pueden alcanzar acuerdos libres y voluntarios que resuelven el problema, siempre que se cumplan ciertos requisitos. Los resultados de Ostrom, basados en el estudio empírico de instituciones comunales, enlazan con la lógica de los juegos repetidos, según la cual en un superjuego con infinitos periodos (con

castigo) se puede alcanzar un equilibrio cooperativo eficiente si los jugadores son suficientemente pacientes.

4. *Diseño de mecanismos* (Hurwicz, 1972; Maskin, 1977; Myerson, 1979): la teoría estudia qué asignaciones pueden alcanzarse con reglas compatibles con los incentivos, es decir, reglas en las que a cada agente le conviene comportarse como el diseñador desea (tema A24, apartado 3.4.2). Sus resultados no son solo positivos. Hurwicz (1972) mostró que, en general, ningún mecanismo es a la vez compatible con los incentivos, eficiente en el sentido de Pareto y de participación voluntaria, de modo que el diseño exige renunciar en parte a alguna de esas propiedades.

5. *Iniciativa privada*: altruismo (Wikipedia, *software* libre, mecenazgo, altruismo impuro de Andreoni, 1990) e intensidad de preferencias (individuos con valoraciones muy altas contribuyen aunque otros se aprovechen).

2.1.5. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría de los bienes públicos fija, con la condición de Samuelson, un criterio preciso de provisión eficiente y explica por qué la contribución voluntaria conduce a una provisión insuficiente. Queda así fundamentado que el sector público puede, en principio, mejorar la asignación cuando hay bienes públicos, y el mecanismo de Clarke-Groves-Vickrey prueba que se puede inducir a declarar las valoraciones verdaderas, si bien a un coste alto.

Limitaciones: los bienes públicos no constituyen justificación absoluta de la intervención, puesto que la propia actuación pública probablemente será ineficiente (apartado 3). Además, los trabajos más recientes restan peso al concepto, porque apenas hay bienes que cumplan con pureza las dos propiedades, y lo habitual es que generen efectos externos de intensidad variable, así que cuánto proveer suele estudiarse como un problema de externalidades.

2.2. Externalidades

Si muchos problemas de provisión de bienes públicos son, en el fondo, los de los efectos externos, conviene estudiar estos por sí mismos. Tras definirlos y clasificarlos, se obtienen las condiciones de provisión eficiente en su presencia, se muestra por qué la provisión privada no las alcanza y se estudian las soluciones.

2.2.1. Concepto y tipos

Viner (1931) distinguió dos clases de economías externas, origen de los conceptos de externalidad tecnológica y externalidad pecuniaria:

1. *Externalidad tecnológica*: se da cuando la producción o el consumo de un agente afecta directamente al bienestar o a la producción de otro sin que medie una transacción de mercado, de modo que el efecto no tiene precio.

2. *Externalidad pecuniaria*: opera a través de los precios (la entrada de un competidor que baja el precio a los demás). Forma parte del funcionamiento normal del mercado y, en mercados competitivos y completos, no genera ineficiencia, porque el precio ya la recoge.

Autores posteriores (p. ej. Scitovsky, 1954) denominan a las primeras simplemente externalidades o **externalidades reales**, que son las que estudia sobre todo la economía del bienestar. Meade (1952) las analizó en un modelo de equilibrio general competitivo, con el ejemplo de los apicultores y los fruticultores, y Arrow (1969) las reinterpretó como *mercados ausentes*. Una externalidad es un efecto para el que no existe mercado, y por eso viola el supuesto de mercados completos del que depende el primer teorema.

Las externalidades reales pueden clasificarse por tres criterios:

- *Signo*: son *negativas* si perjudican a terceros (la contaminación, la congestión) y *positivas* si los benefician (la vacunación, la investigación, un jardín).

Un caso de importancia creciente son las *externalidades de red*, en las que el valor de un bien para cada usuario crece con el número de usuarios, y que explican las economías de escala del lado de la demanda de las plataformas digitales (tema A20).

- *Agentes*: según su origen y destino, surgen en la producción o en el consumo y afectan a productores o a consumidores (productor-productor, productor-consumidor, consumidor-consumidor).

- *Variable*: son de *flujo*, si el efecto depende de la actividad de cada periodo (las emisiones de un año), o de *stock*, si depende de la acumulación (la concentración de CO_2).

En todos los casos el fallo es el mismo. Quien genera el efecto no lo internaliza, porque no paga por el daño ni cobra por el beneficio, y quien lo sufre o lo disfruta no puede evitarlo ni exigir compensación. Como el precio ignora lo que el efecto vale en el margen para los afectados, deja de orientar bien las decisiones. Por ello, las actividades que perjudican a terceros se llevan más allá de lo eficiente (sobreproducción), y las que los benefician se quedan cortas (infraproducción).

2.2.2. Provisión eficiente en la producción

Planteamiento: se parte del problema de maximización del beneficio del productor. El planificador social, a diferencia del productor, incorpora al problema el daño externo $e(x)$ que la producción impone a terceros:

$$\max_x \; p \cdot x - \mathrm{CT}(x) - e(x)$$

donde x es la cantidad producida (variable de decisión), p su precio de mercado, $\mathrm{CT}(x)$ la función de costes privados de la empresa y $e(x)$ el daño externo que la producción impone a terceros.

CPO: la condición de primer orden del programa es:

$$\text{CPO:} \quad p = \frac{\partial \mathrm{CT}}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial x} \equiv \mathrm{Cmg}_P + \mathrm{Cmg}_E = \mathrm{Cmg}_S$$

La condición de eficiencia exige que el precio iguale al coste marginal social, la suma del coste marginal privado y del daño marginal externo, y no al privado. Con daño marginal positivo, la cantidad eficiente es, por tanto, menor que la competitiva.

CSO: exigen $\mathrm{CT}''(x)+e''(x) > 0$, es decir, un coste marginal social creciente, como en la empresa competitiva.

2.2.3. Provisión eficiente en el consumo

Planteamiento: la externalidad en el consumo se ilustra en una economía 2x2 con dos bienes privados, x e y, en la que la utilidad de B depende también del consumo de x por parte de A, $u^B(x^B, y^B, x^A)$. El planificador maximiza la utilidad de A manteniendo la de B, sujeto al reparto de ambos bienes y a la tecnología:

$$\max_{x^A,\, y^A,\, x^B,\, y^B} \; u^A(x^A, y^A)$$

$$\text{s.a.:} \begin{cases} u^B(x^B, y^B, x^A) = u_0^B & \text{(utilidad de } B \text{ dada)} \\ x^A + x^B = x, \;\; y^A + y^B = y & \text{(reparto de los bienes privados)} \\ T(x, y) = 0 & \text{(FPP)} \end{cases}$$

donde x^A, y^A y x^B, y^B son los consumos de ambos bienes privados de A y de B (variables de decisión), $u^A(\cdot)$ y $u^B(\cdot)$ sus funciones de utilidad (la de B depende también de x^A), u_0^B el nivel de utilidad de B que se toma como dado, x e y las cantidades totales producidas de cada bien y $T(x, y) = 0$ la FPP.

CPO: con solución interior y las restricciones agotadas, derivando el lagrangiano y eliminando los multiplicadores, como en el modelo de Samuelson, se obtiene la condición de primer orden:

$$\text{CPO:} \quad \text{RMS}_{yx}^B = \text{RMS}_{yx}^A + \frac{\partial u^B/\partial x^A}{\partial u^B/\partial y^B} = \text{RMT}_{yx}$$

Para B, que no genera externalidad, la condición es la habitual. Para A, en cambio, la valoración relevante de x no es solo la suya sino la suya más el efecto que su consumo tiene sobre B, medido en unidades de y. El signo de ese efecto determina el sesgo del mercado:

- *Externalidad negativa*: el segundo término es negativo, la valoración social es inferior a la privada y hay sobreconsumo.

- *Externalidad positiva*: ocurre lo contrario y hay infraconsumo.

CSO: exigen preferencias convexas de ambos consumidores y un conjunto de producción convexo. La externalidad no altera la suficiencia mientras u^B siga siendo cuasicóncava en (x^B, y^B, x^A).

2.2.4. Provisión privada: ineficiencia

Desarrollo gráfico: la ineficiencia de la provisión privada se representa en el plano cantidad-precio (figura A23.3), con una externalidad negativa en la producción:

1. *Curva de oferta de la empresa* ($\text{Cmg}_P(x)$): viene dada por su curva de coste marginal privado.

2. *Curva de daño marginal* ($\text{Cmg}_E(x)$): la actividad de la empresa impone a terceros un coste marginal externo, $\text{Cmg}_E(x) = e'(x)$, cuya pendiente positiva refleja que cada unidad adicional causa un perjuicio mayor que la anterior (p. ej. la contaminación).

3. *Curva de coste marginal social* ($\text{Cmg}_S(x)$): es la suma vertical de la curva de oferta de la empresa y la de daño marginal, y mide el coste para la sociedad (en recursos y en perjuicios) de producir una unidad adicional.

4. *Curva de demanda de mercado* ($D(x)$): mide, para cada cantidad, cuánto valoran los compradores la última unidad, es decir, el beneficio marginal privado del consumo.

5. *Equilibrio*:

- *Equilibrio competitivo*: sin intervención pública, se da en el punto 0, con x_C y p_C. Con la externalidad, sin embargo, ese nivel de producción ya no satisface la condición de eficiencia. Es posible encontrar otro en el que, con las compensaciones adecuadas, todos los agentes estén mejor.

- *Óptimo social*: está en el punto 1, con x^* y p^*, donde el coste marginal social corta a la demanda. En este punto el precio es la suma del coste marginal privado y el daño marginal que sufren los perjudicados, evaluados ambos en el nivel de producción eficiente.

- *Sobreproducción*: el nivel de producción eficiente es inferior al de libre mercado, y el coste de eficiencia viene dado por el área del triángulo entre ambos equilibrios[11]. Si se considera una externalidad positiva, en cambio, el $\text{Cmg}_S(x)$ es menor que el $\text{Cmg}_P(x)$ y se da infraproducción.

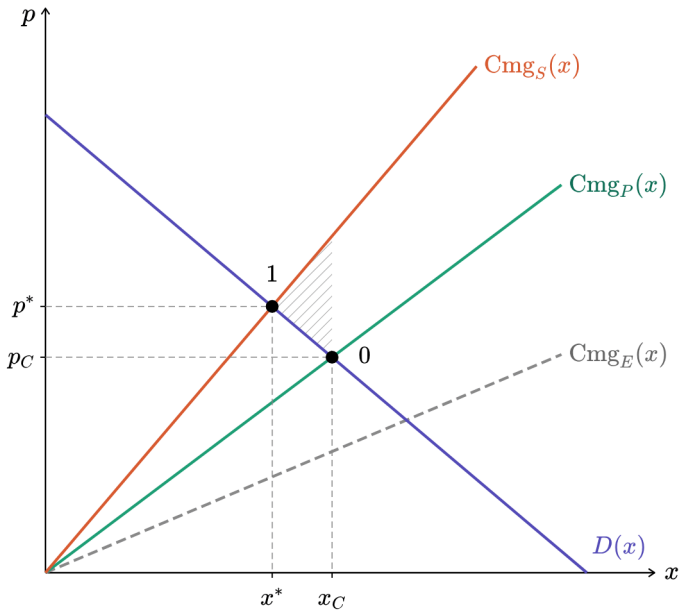


Figura A23.3: Externalidad negativa en la producción. El óptimo social exige igualar el coste marginal social, no el privado, al beneficio marginal.

2.2.5. Soluciones

El sector público puede corregir una externalidad actuando sobre los precios, sobre los derechos de propiedad o sobre las cantidades.

[11] El coste deriva de dos efectos. Al reducir la producción, consumidores y productores pierden excedente, pero los afectados ganan por la reducción del daño. La ganancia neta es el área de pérdida de eficiencia (Albi et al., 2017, vol. I, p. 100).

Instrumentos pigouvianos: Arthur Pigou (1920) identificó la divergencia entre el producto neto marginal social y el privado y propuso corregirla mediante impuestos y subvenciones, lo que constituye el fundamento de los instrumentos de precio de la política ambiental[12].

- *Idea*: el sector público logra la *internalización* creando el precio que falta, es decir, un impuesto por unidad igual al daño marginal externo o una subvención por unidad igual al beneficio marginal externo. El agente que genera la externalidad se enfrenta así al coste social de su decisión y la ajusta por sí mismo.

- *Planteamiento*: con un impuesto unitario τ sobre la producción, la empresa elige x para maximizar $\pi = p \cdot x - \mathrm{CT}(x) - \tau \cdot x$, donde x es la cantidad producida (variable de decisión), π el beneficio de la empresa, p el precio de mercado, $\mathrm{CT}(x)$ su función de costes privados y τ el impuesto unitario sobre la producción.

- *CPO*: $p = \mathrm{Cmg}_P(x) + \tau$, y el impuesto que restablece el óptimo es el daño marginal evaluado en la cantidad eficiente, $\tau^* = (de/dx)|_{x^*}$[13]. Sus efectos son los mismos si recae sobre la producción o sobre el consumo[14].

- *CSO*: $\mathrm{CT}''(x) > 0$, es decir, coste marginal privado creciente, como en la empresa competitiva.

- *Desarrollo gráfico*: el impuesto pigouviano se representa en el plano cantidad-precio (figura A23.4):

1. *Curvas de partida*: la demanda, $D(x)$, el coste marginal privado, $\mathrm{Cmg}_P(x)$, el daño marginal, $\mathrm{Cmg}_E(x)$, y el coste marginal social, $\mathrm{Cmg}_S(x)$, como en la figura A23.3.

2. *Coste marginal privado con el impuesto* ($\mathrm{Cmg}_P(x) + \tau^*$): es la curva $\mathrm{Cmg}_P(x)$ desplazada hacia arriba en la cuantía del impuesto.

3. *Equilibrio*: con el impuesto, $\mathrm{Cmg}_P(x) + \tau^*$ corta a la demanda en el mismo punto que la de coste marginal social (punto 1), y ese cruce es el equilibrio que incorpora la externalidad.

[12] El principio de "quien contamina paga" lo adoptó la OCDE en 1972 y figura en el art. 191.2 del Tratado de Funcionamiento de la Unión Europea.

[13] El criterio de eficiencia no requiere eliminar totalmente la externalidad, sino reducirla a niveles eficientes (Albi et al., 2017, vol. I, pp. 100-101).

[14] Por la traslación impositiva (Albi et al., 2017, vol. I, p. 106; vol. II, pp. 85-90).

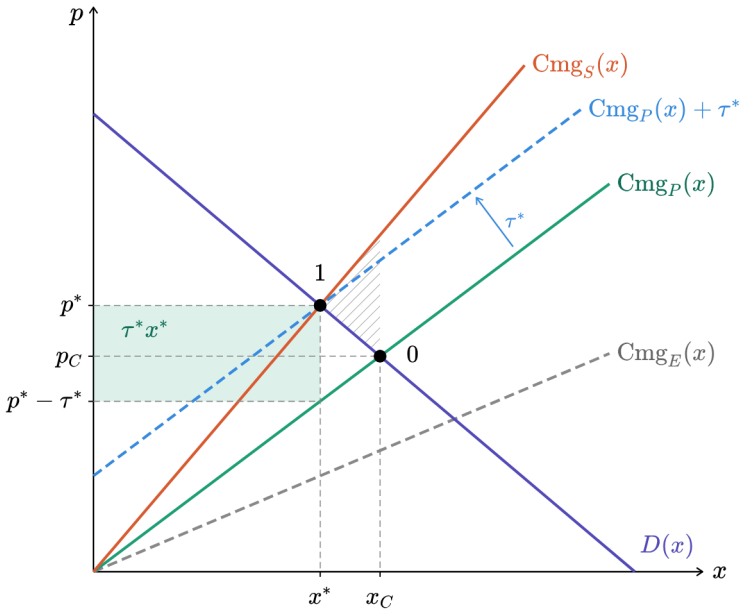


Figura A23.4: Impuesto pigouviano. El impuesto unitario igual al daño marginal desplaza el coste marginal privado hasta el social y restablece la cantidad eficiente.

▪ *Estática comparativa*: el impuesto desplaza hacia arriba la curva de coste marginal privado, y el equilibrio pasa del punto 0, con x_C, al punto 1, con x^*. Desaparece así la pérdida de bienestar y el sector público obtiene una recaudación, $\tau^* x^*$.

▪ *Extensiones*:

- *Subvención unitaria*: es el instrumento simétrico para las externalidades positivas, y un complemento del impuesto cuando se dirige a la innovación y a las tecnologías alternativas.

- *Doble dividendo*: el principio subyacente, "quien contamina paga", permite además una segunda ganancia (Pearce, 1991). Si la recaudación se destina a reducir otros impuestos distorsionantes, la corrección de la externalidad puede mejorar también la eficiencia del sistema fiscal, aunque la interacción del impuesto con los ya existentes tiende a reducir o anular esa segunda ganancia (Bovenberg y De Mooij, 1994).

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: el instrumento es sencillo, actúa a través del mercado y no exige que el regulador conozca la tecnología de cada empresa, solo el daño marginal en la cantidad eficiente, que depende de los costes agregados. Además, genera ingresos y deja a cada agente la elección de cómo reducir su externalidad, lo que minimiza el coste de la reducción. Sus aplicaciones actuales van de los impuestos sobre carburantes y emisiones a las tasas sobre plásticos y envases.

- *Limitaciones*: fijar el impuesto óptimo exige conocer el daño marginal en la cantidad eficiente, lo que plantea el mismo problema de revelación de preferencias que los bienes públicos y

elevados costes de información[15]. Asimismo, el instrumento es indirecto, pues confía en que los agentes reaccionen al precio, y su efecto sobre la cantidad es reducido si la demanda es rígida e incierto si el regulador desconoce costes y demanda. En presencia de otras distorsiones, además, el impuesto igual al daño marginal deja de ser óptimo y la corrección pasa a ser un problema de *second best* (tema A22, apartado 3). Por ejemplo, si el contaminador es un monopolista, que ya produce menos de lo eficiente, el impuesto óptimo es inferior al daño marginal (Buchanan, 1969).

Teorema de Coase: Ronald Coase (*The Problem of Social Cost*, 1960) sostuvo, frente a Pigou, que el problema de las externalidades no es la falta de un impuesto sino la falta de derechos de propiedad definidos sobre el efecto externo.

▪ *Idea*: el sector público se limita a delimitar y asignar los derechos de propiedad, el derecho a contaminar o el derecho a no ser contaminado, y con ello crea un mercado para la externalidad. La solución es descentralizada, porque las partes negocian la cantidad, pero no privada, ya que exige que el sector público defina los derechos y garantice su cumplimiento, sin lo cual no existe nada que intercambiar.

▪ *Teorema* (nombre que le dio Stigler, 1966): la cantidad pactada será la misma, y eficiente, sea cual sea el reparto inicial de los derechos. El resultado exige que negociar no cueste nada (o casi nada), que ambas partes estén perfectamente informadas y que no existan efectos renta. Quién reciba el derecho solo cambia la distribución de la renta.

▪ *Razonamiento*: considérense una acería, que produce aguas arriba y contamina, y una piscifactoría, que produce aguas abajo y sufre el daño:

- *Derecho de la piscifactoría*: la acería está dispuesta a pagar por contaminar mientras su beneficio marginal neto supere al daño marginal que causa. El acuerdo se alcanza así en la cantidad eficiente x^*, donde ambos se igualan, con una compensación por la última unidad igual al daño marginal en ese punto. Por encima de x^*, el beneficio marginal es inferior al pago y la acería no tiene incentivo a seguir.

- *Derecho de la acería*: la piscifactoría paga por reducir la contaminación mientras el daño marginal supere al beneficio marginal neto de la acería, y el acuerdo se alcanza de nuevo en x^*. En ambos casos la cantidad es la eficiente y difiere solo la distribución de las ganancias, que favorece a quien recibió el derecho.

▪ *Comparación con Pigou*: para Pigou el fallo está en el precio. Falta el precio del daño y el impuesto lo crea, lo que exige un regulador que conozca el daño marginal y fije el impuesto. Para Coase, en cambio, el fallo está en los derechos. Si el derecho está definido y es negociable, las partes revelan sus valoraciones al negociar y llegan al resultado eficiente sin que el regulador sepa nada sobre ellas.

▪ *Elección entre ambos*: cuando las condiciones del teorema se cumplen, la solución de Coase es superior precisamente por eso. Cuando no se cumplen, como en la contaminación difusa con millones de afectados, la negociación es imposible y el instrumento pigouviano, o el mercado de derechos que combina ambas lógicas, es el único practicable. Por tanto, la elección entre ellos es una comparación de costes de transacción, que es la lección general de Coase.

[15] El Informe Stern (2006) estimaba el coste social del carbono en unos 300 $ por tonelada de carbono (unos 85 $ por tonelada de CO_2), muy por encima de otras estimaciones, sobre todo por emplear una tasa de descuento muy baja.

▪ *Desarrollo gráfico*: la negociación entre la acería y la piscifactoría se representa en el plano actividad contaminante-euros (figura A23.5):

1. *Beneficio marginal* (Bmg(x)): recoge el beneficio marginal neto que obtiene la acería de cada unidad adicional de actividad contaminante, y es decreciente.

2. *Daño marginal* (Dmg(x)): recoge el perjuicio que cada unidad adicional causa a la piscifactoría, y es creciente.

3. *Equilibrio*: el acuerdo se alcanza en x^*, donde ambas curvas se cortan, cualquiera que sea la asignación del derecho.

- *Derecho de la víctima*: la negociación parte de $x = 0$ y avanza hasta x^*. La ganancia de la negociación es el área entre ambas curvas a la izquierda de x^*.
- *Derecho del contaminador*: la negociación parte de $x_{\max}$ y retrocede hasta x^*. La ganancia de la negociación es el área entre ambas curvas a la derecha de x^*.

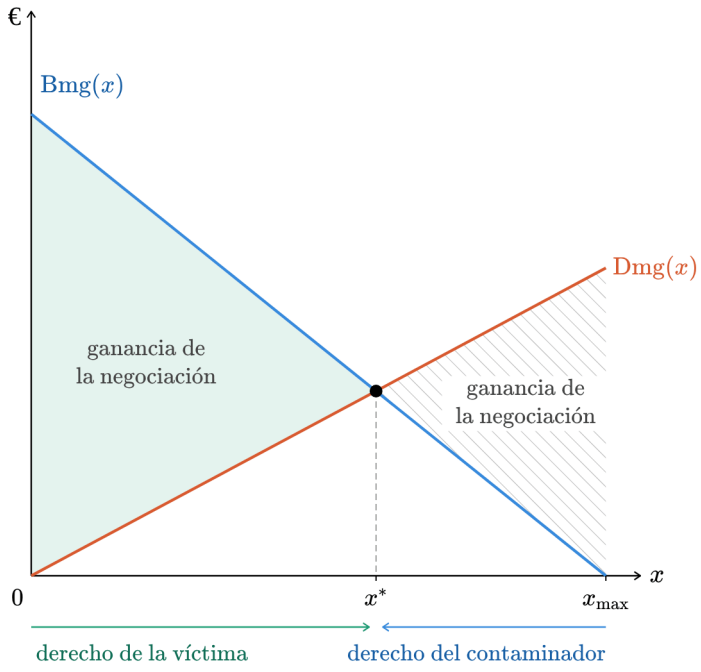


Figura A23.5: Teorema de Coase. Con derechos de propiedad definidos y costes de negociación nulos, las partes alcanzan la cantidad eficiente cualquiera que sea la asignación inicial del derecho.

▪ *Conclusiones*:

- *Aspectos positivos*: se alcanza la misma asignación que con los instrumentos pigouvianos sin que el regulador conozca las valoraciones, y el teorema desplaza el análisis de las externalidades hacia las instituciones.
- *Limitaciones*: sus supuestos son muy restrictivos. Exige información perfecta y costes de transacción nulos (o muy bajos), lo que limita su aplicación a externalidades con pocas partes identificables. Exige también ausencia de efectos renta (preferencias cuasilineales), sin

la cual la asignación eficiente depende de quién posee el derecho[16]. Por último, no tiene en cuenta los costes de crear y hacer funcionar el mercado de derechos, ni el problema de negociación estratégica cuando cada parte intenta apropiarse del excedente.

Cantidades y otras soluciones: las dos soluciones anteriores fijan el precio o los derechos. El resto de instrumentos actúa sobre las cantidades o sobre la estructura de la actividad, y varios de ellos combinan las lógicas de Pigou y de Coase.

1. *Mercados de derechos de emisión* (*cap and trade*; Dales, 1968; Montgomery, 1972): el sector público fija la cantidad total de contaminación admisible (*cap*) y reparte, de forma gratuita o mediante subasta, los derechos correspondientes, que después se negocian en un mercado secundario (*trade*). El precio resultante equivale al impuesto pigouviano, que el mercado descubre por sí mismo, siempre que el techo fijado coincida con la cantidad eficiente, y la negociación garantiza que reduzcan la contaminación quienes pueden hacerlo a menor coste. Si los derechos se subastan, la equivalencia es completa, porque además el Gobierno obtiene la recaudación.

- *Precio o cantidad*: la equivalencia entre precio y cantidad desaparece, en cambio, cuando el regulador desconoce los costes de reducción. Weitzman (1974) mostró que, con esa incertidumbre, el impuesto es preferible si el beneficio marginal de reducir la contaminación varía poco con la cantidad en relación con el coste marginal. En el caso contrario, como en los daños con umbrales críticos, es preferible el techo de cantidad.

- *EE. UU.*: los mercados de derechos figuran entre las aplicaciones más exitosas de la lógica de Coase. El primer sistema a gran escala fue el programa de lluvia ácida de EE. UU. (1990), que desde 1995 permite a las centrales eléctricas negociar derechos de emisión de dióxido de azufre (Schmalensee y Stavins, 2013).

- *UE*: el régimen de comercio de derechos de emisión (RCDE UE, desde 2005, desarrollado a raíz del Protocolo de Kioto de 1997; tema B31, apartado 3.4.1) funcionó en sus dos primeras fases (2005-2012) en tres niveles. La UE aprobaba los planes nacionales de asignación, los Gobiernos nacionales asignaban los derechos a las empresas (de manera gratuita o mediante subasta) y las empresas negociaban libremente entre ellas. Desde 2013, en cambio, existe un techo único para toda la UE, la subasta es el método general de asignación y la asignación gratuita restante se rige por reglas armonizadas. La reforma de 2023 elimina progresivamente la asignación gratuita en la aviación y, desde 2026, en los sectores cubiertos por el mecanismo de ajuste en frontera por carbono (MAFC; *CBAM* en inglés), para aplicar más plenamente el principio de "quien contamina paga".

2. *Regulación directa*: prohibiciones, límites y normas técnicas (p. ej. prohibición de emisiones). Esta solución es la más simple y la única practicable cuando el daño es catastrófico o irreversible, pero al imponer la misma conducta a todos ignora las diferencias de coste entre agentes y no incentiva reducir por debajo del límite. Además, fijar el límite adecuado exige conocer con precisión el efecto externo, lo que supone costes de información, a los que se suman los de implementación y control.

3. *Integración*: si la externalidad se produce entre dos empresas, su fusión la internaliza (por ejemplo, si los perjudicados adquieren la empresa contaminante), pues la empresa conjunta soporta el daño que antes la empresa contaminante imponía a la otra. La integración equivale a la solución de Coase sin necesidad de negociar, al precio de los costes de organización que la integración conlleva (tema A15).

[16] Con preferencias cuasilineales la demanda del bien con efectos externos no depende de la renta. En la caja de Edgeworth, las curvas de indiferencia son traslaciones paralelas al eje del numerario y la curva de contratos es una recta paralela a ese eje.

4. *Reasignación de competencias*: confiar la decisión a un ámbito mayor que abarque a quien causa la externalidad y a quien la sufre. Por ejemplo, si una carretera que pasa por un municipio favorece a los residentes de otro, puede tener sentido que la decisión la adopte un nivel de gobierno con jurisdicción sobre ambos.

5. *Responsabilidad civil*: la obligación de indemnizar los daños causados convierte al causante en pagador *ex post* del coste externo y equivale a un impuesto pigouviano decidido por los tribunales. Tiene la ventaja de calcularse sobre el daño efectivo y el inconveniente de los costes del litigio.

6. *Mecanismos de compensación* (Varian, 1994): en un juego de dos etapas, el generador y el afectado por la externalidad anuncian el precio compensatorio que afrontará el otro, y se penaliza la discrepancia entre los anuncios. El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de ese juego es eficiente.

7. *Normas sociales y provisión pública*: la desaprobación social internaliza externalidades menores sin coste administrativo, y la provisión pública directa (parques, saneamiento) sustituye al mercado cuando la externalidad positiva es tan grande que el bien se acerca al público.

2.2.6. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría de las externalidades identifica el fallo, la falta de un precio para el efecto externo, y fija con la igualdad entre el precio y el coste marginal social un criterio preciso de provisión eficiente. Asimismo, salvo las prohibiciones, ninguna de las soluciones pretende eliminar la actividad que genera la externalidad ni emite juicios de valor sobre ella, sino que todas tratan de que quien la genera internalice su coste, mediante un precio (Pigou), mediante derechos negociables (Coase) o mediante cantidades.

Limitaciones: las soluciones comparten con las de los bienes públicos la misma disyuntiva entre información y coacción. Los instrumentos centralizados exigen que el regulador conozca las valoraciones o fije las cantidades, mientras que los descentralizados exigen que los afectados puedan negociar a bajo coste. Además, todas suponen un sector público que corrige el fallo con benevolencia, y la propia intervención puede ser ineficiente (apartado 3).

2.3. Otros fallos de mercado: poder de mercado e información imperfecta

Los otros dos fallos de mercado violan, cada uno, un supuesto de los teoremas del bienestar y se desarrollan en otros temas, por lo que aquí basta situarlos.

Poder de mercado: los teoremas suponen agentes precio-aceptantes. Cuando una empresa puede influir sobre el precio, iguala el ingreso marginal, y no el precio, al coste marginal, de modo que la relación marginal de sustitución de los consumidores deja de coincidir con la de transformación. Se produce, por ello, menos de lo eficiente y a un precio mayor, con la pérdida irrecuperable del triángulo de Harberger. Las soluciones *first best* buscan restablecer $p = \text{Cmg}$ (regulación de precios, defensa de la competencia), y las *second best*, acotar el margen cuando lo primero no es posible (temas A17 y A20).

Información imperfecta: los teoremas suponen que todos conocen bien lo que intercambian. Cuando una parte sabe más que la otra, el precio deja de informar de la calidad y surgen la selección adversa, capaz de hacer desaparecer el mercado, y el riesgo moral, que impide cubrir el riesgo por completo. Ambos violan el supuesto de mercados completos del que depende el primer teorema. Además, Greenwald y Stiglitz (1986) mostraron que, en esas condiciones, el equilibrio competitivo no es siquiera eficiente en sentido restringido, es decir, existen intervenciones que

mejoran a todos aun con la información limitada de que dispone el sector público. La intervención toma la forma de obligaciones de información, regulación de la calidad, seguros obligatorios o provisión pública allí donde el mercado privado se contrae (tema A13).

Bienes públicos globales: por último, conviene situar una categoría que no constituye un fallo distinto, sino que combina los anteriores a escala internacional. La estabilidad del clima, la contención de las pandemias o la estabilidad financiera son bienes públicos cuyos beneficiarios son todos los países, de modo que ningún Estado tiene incentivos a proveerlos por sí solo y no existe un sector público mundial con capacidad coactiva. Por tanto, su provisión depende de la cooperación internacional y de las instituciones que la organizan (temas B19 y B31).

2.4. Conclusiones

La sección parte de que cada fallo de mercado viola un supuesto del primer teorema del bienestar. En los bienes públicos, la no rivalidad obliga a sumar las valoraciones marginales (condición de Samuelson), y la no exclusión deja las contribuciones voluntarias por debajo de esa cantidad. La provisión corresponde entonces al sector público, que ha de repartir el coste y conocer unas valoraciones que los consumidores no tienen incentivos a revelar. En las externalidades, el fallo es la falta de un precio para el efecto externo, que separa el coste o el beneficio privado del social.

Los instrumentos que corrigen las externalidades se distinguen por la información que exigen. El impuesto pigouviano obliga al regulador a conocer el daño marginal, mientras que la asignación de derechos de Coase deja la valoración a la negociación entre las partes, viable solo con costes de transacción bajos. El poder de mercado y la información imperfecta completan la clasificación. Todas estas soluciones suponen, sin embargo, un sector público que corrige los fallos con benevolencia, supuesto que abandona la sección 3.

3. Teoría de la elección pública: el sector público no neutral y los fallos del sector público

Que el mercado falle no basta para justificar la intervención, porque también el sector público puede fallar. La teoría de la elección pública, cuyo origen y concepto se ven primero, analiza las limitaciones del sector público en el diseño y la implementación de la intervención, los efectos de esas imperfecciones y las soluciones a sus fallos.

> La teoría económica de la regulación y la captura del regulador se desarrollan en el tema A20, apartado 3.4.2, y el análisis coste-beneficio, en el apartado 3.4.1 del mismo tema. Aquí se estudian los fallos del sector público en lo que afectan a la intervención frente a los fallos de mercado.

3.1. Origen y concepto

Origen: la *teoría de la elección pública*, con precursores como Knut Wicksell (1896), Duncan Black (1948) y Anthony Downs (1957), se consolida con James Buchanan y Gordon Tullock (*The Calculus of Consent*, 1962) como aplicación del análisis económico a las decisiones políticas. Sus autores sostienen que los políticos y los burócratas responden a incentivos, como cualquier otro agente, y las instituciones públicas son el marco que fija esos incentivos.

Idea: hasta aquí se ha supuesto un sector público que planifica con benevolencia y persigue el interés colectivo. La teoría de la elección pública lo ve, en cambio, como una unidad de decisión también imperfecta, movida por los incentivos de quienes la integran, y por eso los fallos de mercado tienen su réplica en los *fallos del sector público*. El análisis del sector público *no neutral* tiene, en consecuencia, la misma estructura que el de los fallos de mercado, es decir, identificar las causas del fallo, sus efectos y sus soluciones.

3.2. Limitaciones al diseño y la implementación

Cuatro teorías explican por qué el sector público encuentra limitaciones en el diseño y la implementación de la intervención.

3.2.1. Grupos de interés (Olson, 1965; Stigler, 1971)

Origen: Mancur Olson (1965) explicó por qué los grupos pequeños y concentrados se organizan mejor que los grandes y difusos, y George Stigler (1971) aplicó esa lógica a la regulación.

Idea: los grupos de interés interfieren en las decisiones políticas en favor de intereses privados. Como el beneficio de una decisión favorable se concentra en pocos y su coste se reparte entre muchos, los primeros tienen incentivos a organizarse y presionar, y los segundos no. Por eso, la acción colectiva la ejercen las minorías organizadas.

Razonamiento: la interferencia adopta tres formas:

- *Búsqueda de rentas* (Tullock, 1967; Krueger, 1974): los grupos dedican recursos a obtener del sector público privilegios (aranceles, licencias, subvenciones) en lugar de a producir, y el coste social de la intervención incluye no solo la ineficiencia que crea sino los recursos consumidos en conseguirla.

- *Captura del regulador*: la agencia que regula un sector acaba defendiendo los intereses de los regulados, porque estos tienen la información, los recursos y el interés concentrado para influir en ella. La regulación pasa así de proteger a los consumidores a proteger a las empresas frente a la competencia.

- *Triángulo de hierro*: la alianza estable entre el grupo de interés, la burocracia que gestiona el programa que lo beneficia y los legisladores de la comisión que lo supervisa. Los tres ganan con la continuidad del programa, y nadie dentro del triángulo tiene incentivos a evaluarlo.

La intervención frente a un fallo de mercado puede acabar sirviendo a quienes debía controlar, y el diseño institucional (independencia, transparencia, evaluación externa) es la respuesta a esa deriva.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: aplica la lógica de la acción colectiva a las decisiones públicas y explica por qué la intervención puede favorecer a minorías organizadas frente a mayorías dispersas. Además, extiende el coste social de la intervención a los recursos dedicados a obtenerla y es la base de la teoría económica de la regulación (tema A20, apartado 3.4.2).

- *Limitaciones*: tiende a explicar toda intervención por la presión de los grupos organizados, por lo que le cuesta dar cuenta de reformas contrarias a sus intereses, como la desregulación de sectores antes protegidos. Además, la influencia de los grupos es difícil de medir, lo que limita el contraste empírico de la teoría.

3.2.2. La burocracia maximizadora del presupuesto (Niskanen, 1971)

Origen: William Niskanen (1971) trasladó a la Administración el modelo de la empresa gerencial.

Idea: el burócrata maximiza el presupuesto de su departamento, del que derivan su poder, su prestigio y su retribución, y dispone frente al político de una ventaja informativa sobre los costes reales de los servicios que presta.

Razonamiento: el departamento y el patrocinador político forman un monopolio bilateral en el que solo el departamento conoce los costes y presenta al patrocinador una oferta de todo o nada. La producción pública se lleva así por encima del nivel eficiente, en el que la valoración marginal iguala al coste marginal. Si la restricción activa es el presupuesto, la producción llega hasta el punto en que el beneficio total iguala al coste total, y si no, hasta el punto en que la valoración marginal del patrocinador se anula. Con demanda lineal y coste marginal constante, por ejemplo, en el primer caso el departamento produce el doble de la cantidad eficiente (figura A23.6). En los dos, la intervención frente a los fallos de mercado tiende a ser mayor de lo necesario.

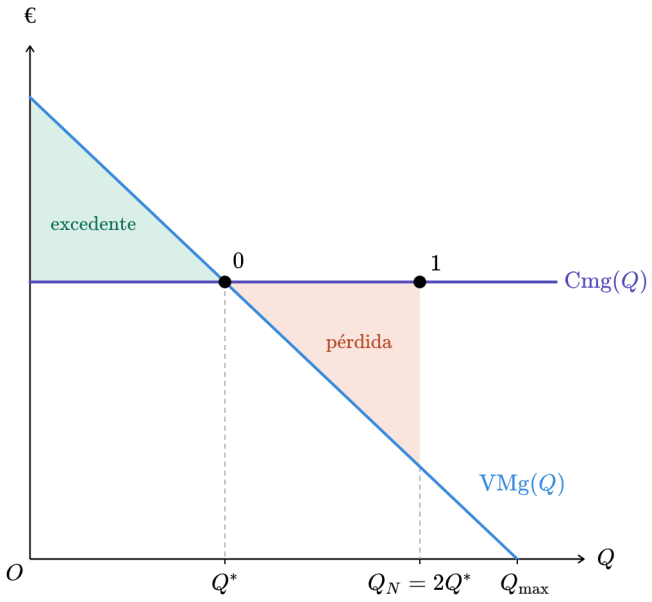


Figura A23.6: Burocracia maximizadora del presupuesto (Niskanen, 1971). La producción eficiente, Q^* (punto 0), iguala la valoración marginal del patrocinador, $\text{VMg}(Q)$, al coste marginal, $\text{Cmg}(Q)$. Con la restricción presupuestaria activa, el departamento produce $Q_N = 2Q^*$ (punto 1), donde la pérdida sombreada iguala al excedente, y sin ella llega hasta $Q_{\max}$, donde la valoración marginal se anula.

Extensiones: Migué y Bélanger (1974), y después el propio Niskanen (1975), sustituyen el presupuesto por el *presupuesto discrecional*, la diferencia entre el presupuesto y el coste mínimo de producción. El burócrata dedica entonces parte del excedente a gastos de su preferencia (personal, medios), y la ineficiencia toma la forma de costes excesivos más que de exceso de producción.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica el crecimiento del sector público desde el lado de la oferta, por los incentivos de quienes lo gestionan, y fundamenta las reformas que separan financiación y producción o introducen competencia en la Administración.

- *Limitaciones*: supone un patrocinador político pasivo, que no controla ni conoce los costes, y el sobredimensionamiento que predice es difícil de contrastar, porque la cantidad eficiente de un servicio público no es observable.

3.2.3. El ciclo político (Nordhaus, 1975)

Origen: William Nordhaus (1975) modelizó al Gobierno como un agente que maximiza votos.

Idea: si los votantes son miopes y valoran la situación económica reciente, el Gobierno subordina las decisiones de gasto y estabilización al calendario electoral, con expansión antes de las elecciones y ajuste después.

Razonamiento: el Gobierno explota la curva de Phillips a corto plazo. Como los votantes forman expectativas adaptativas y valoran sobre todo la situación reciente, una expansión antes de las elecciones reduce el paro cuando se vota, mientras que la inflación que genera aparece

después y se corrige con un ajuste al inicio de la legislatura. Las políticas se deciden así por su rendimiento electoral y no por su eficiencia, lo que introduce una fuente de inestabilidad ajena a los fallos de mercado que pretenden corregir.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: inaugura la teoría del ciclo político-económico y ofrece un argumento para sustraer la política monetaria y fiscal al calendario electoral mediante bancos centrales independientes y reglas fiscales.

- *Limitaciones*: descansa en votantes miopes y expectativas adaptativas, incompatibles con las expectativas racionales, e ignora las diferencias ideológicas entre partidos que recogen los modelos partidistas (Hibbs, 1977; Alesina, 1987). De hecho, la evidencia muestra ciclos electorales en el presupuesto más que en la producción y el paro, sobre todo en democracias recientes (Brender y Drazen, 2005).

3.2.4. La aversión al riesgo burocrática (Stiglitz, 1986)

Origen: Joseph Stiglitz (1986) incluye entre las fuentes de ineficiencia de la producción pública los incentivos de los burócratas, que no se rigen por la recompensa y el castigo del mercado.

Idea: el burócrata soporta el coste de los fracasos y no se apropia del beneficio de los éxitos, de modo que es más averso al riesgo de lo que el interés colectivo requiere.

Razonamiento: la aversión al riesgo reduce el ritmo de innovación en la provisión pública y eleva la resistencia al cambio, lo que hace a la intervención lenta en adaptarse a fallos de mercado que evolucionan.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: explica el apego de la Administración a los procedimientos y su resistencia a innovar como una respuesta racional a sus incentivos, no como un rasgo de las personas, y orienta las reformas hacia la evaluación por resultados.

- *Limitaciones*: es difícil de contrastar y no distingue la aversión al riesgo excesiva de la prudencia que conviene a decisiones públicas con consecuencias irreversibles.

3.3. Efectos de las imperfecciones del sector público

Esas limitaciones tienen tres efectos sobre la intervención frente a los fallos de mercado:

1. *Ineficiencia dinámica*: la regulación puede eliminar los incentivos a innovar, especialmente en los monopolios naturales regulados por coste del servicio, cuyos costes se cubren con independencia de su esfuerzo.

2. *Distorsión de incentivos*: la intervención altera los precios relativos, de modo que las ganancias de eficiencia en el sector intervenido pueden verse compensadas por pérdidas en otros, que es la lógica del *second best* (tema A22, apartado 3).

3. *Sobredimensionamiento del sector público*: la *ilusión fiscal* (Puviani, 1903) lo hace posible cuando los votantes infravaloran la carga fiscal que soportan, por las retenciones en origen, la imposición indirecta, la opacidad del sistema tributario, la ilusión de la deuda y la rémora fiscal. Un sector público que parece más barato de lo que es se demanda en exceso.

3.4. Soluciones a los fallos del sector público

Las soluciones propuestas responden a las limitaciones de diseño e implementación y actúan en dos planos:

1. *Sobre los incentivos*: se trata de aproximar la Administración a la lógica de la empresa, para que el burócrata y el político soporten las consecuencias de sus decisiones.

- *Retribución ligada a la productividad*: complementos por objetivos, carrera profesional basada en resultados y evaluación del desempeño, que rompen la relación entre presupuesto y retribución que explica el sobredimensionamiento de Niskanen.

- *Supervisión y responsabilidad individual*: auditorías internas y externas, transparencia de las cuentas y rendición de cuentas nominativa, que reducen la ventaja informativa de la burocracia frente al político y del político frente al votante.

- *Competencia dentro del sector público*: la competencia por comparación entre unidades que prestan el mismo servicio (tema A20, apartado 2.3.2) y la libertad de elección de los usuarios entre proveedores públicos, que someten a cada unidad a una disciplina análoga a la del mercado.

2. *Sobre las reglas*: se trata de limitar de antemano el margen de discrecionalidad, en la línea de la economía constitucional de Buchanan.

- *Separación entre diseño y ejecución*: las políticas se diseñan en el ámbito político y se ejecutan en agencias independientes con mandato definido (bancos centrales, autoridades de competencia, reguladores sectoriales), lo que aísla la ejecución del ciclo político y de la captura.

- *Evaluación obligatoria*: el sometimiento de los proyectos al análisis coste-beneficio y de los programas a evaluación *ex post*, que obliga a justificar cada gasto por sus resultados y no por su continuidad.

- *Presupuesto de base cero*: cada partida ha de justificarse íntegramente en cada ejercicio, en lugar de tomar como dado el presupuesto del año anterior, lo que ataca la inercia que sostiene el triángulo de hierro.

- *Separación entre provisión y producción*: el sector público decide y financia, pero contrata la producción a empresas privadas en competencia (licitación, concesión, cheques), lo que combina la corrección del fallo de mercado con la disciplina de costes del mercado.

- *Reglas constitucionales*: límites al tamaño del sector público, al déficit o a la deuda fijados en normas de rango superior (reglas fiscales, cláusulas de estabilidad presupuestaria), que sustraen esas magnitudes a la decisión discrecional de cada legislatura (tema A39).

La lógica común de estas soluciones es la misma que la de las soluciones a los fallos de mercado, es decir, alinear los incentivos de quien decide con el interés colectivo, bien haciéndole soportar los costes de sus decisiones, bien impidiendo que las tome.

3.5. Conclusiones

Aspectos positivos: la teoría de la elección pública no niega la justificación de la intervención, sino que la somete a una prueba adicional. No basta con que el mercado falle, sino que hay que comparar ese fallo con el fallo probable de la intervención. Este criterio de *comparación de instituciones*, frente al enfoque que compara el mercado real con un Estado ideal (Demsetz, 1969), preside la política económica moderna. También completa el argumento del tema, pues los fallos de mercado justifican la intervención, pero los fallos del sector público la acotan.

Limitaciones: el supuesto que hace fecunda la teoría, el interés propio de políticos y burócratas, es también su límite, porque explica mal la participación electoral, el peso de la ideología y la motivación de servicio público. Además, puede explicar *a posteriori* casi cualquier decisión como fruto de algún interés, lo que dificulta su contraste empírico.

Conclusiones

El tema parte de las condiciones de eficiencia de la economía 2x2x2x2 y de los teoremas del bienestar, cuyos supuestos sirven de criterio para identificar los fallos de mercado. La no rivalidad de los bienes públicos sustituye la igualdad de las relaciones marginales de sustitución por su suma (condición de Samuelson), y la no exclusión hace que las contribuciones voluntarias conduzcan a una provisión insuficiente. Las externalidades separan el coste o el beneficio privado del social, y se corrigen creando el precio que falta (Pigou), definiendo derechos sobre el efecto externo (Coase) o fijando la cantidad (*cap and trade*), según los costes de transacción y la información del regulador. La teoría de la elección pública añade que el sector público también falla, de modo que la intervención exige comparar instituciones imperfectas.

Los fallos de mercado son el reverso de los teoremas del bienestar (temas A21 y A22), y la teoría del *second best* explica por qué corregir un fallo aislado no garantiza una mejora. Cada fallo tiene su propio desarrollo. El poder de mercado lleva a la teoría del monopolio y de la regulación (temas A17 y A20), la información imperfecta a la de los contratos (tema A13) y la revelación de preferencias a la de la votación y el diseño de mecanismos (tema A24). A escala internacional, los bienes públicos globales plantean el mismo problema de *free rider* entre Estados soberanos (temas B19 y B31). Por último, los fallos del sector público justifican las reglas fiscales que acotan la discrecionalidad de los gobiernos (tema A39).

En el cambio climático, el mayor fallo de mercado conocido según el Informe Stern (2006), cada país tiene incentivos a actuar como *free rider*. Nordhaus (2015) propone por ello *clubes climáticos* que graven con aranceles a quienes no ponen precio al carbono, una lógica próxima a la del MAFC de la UE. Los datos, por su parte, son no rivales, y Jones y Tonetti (2020) muestran que las empresas que los controlan tienden a restringir su uso, mientras que dar a los consumidores su propiedad acerca el resultado al óptimo. Por último, la nueva política industrial justifica la intervención por externalidades de aprendizaje y fallos de coordinación y reabre, con nueva evidencia, la comparación entre fallos de mercado y fallos del sector público (Juhász, Lane y Rodrik, 2024).

A24. Economía del bienestar (III)

Economía del bienestar (III). Las funciones de bienestar social. Teoría de la elección colectiva. El teorema de imposibilidad de Arrow y desarrollos posteriores.

Introducción

Introducción común. Los temas A22 a A24 comparten una introducción, que se desarrolla al comienzo del tema **A22**. Presenta la economía del bienestar, que juzga si las asignaciones de recursos son deseables para el conjunto de la sociedad, y sus tres etapas, de la teoría tradicional a la nueva economía del bienestar y la novísima, basada en la elección colectiva y el *second best*.

El criterio de Pareto solo da una ordenación incompleta, porque admite infinitos óptimos que no se pueden comparar entre sí (tema A22). La economía del bienestar respondió a esa indeterminación por dos vías, los criterios de compensación (véase A22) y la función de bienestar social. A su vez, construir esta última a partir de las preferencias de cada individuo obliga a preguntarse por las reglas de elección colectiva.

Bergson (1938) y Samuelson (1947) propusieron la función de bienestar social como forma de ordenar los estados sociales a partir de juicios de valor explícitos. Arrow (1951b) mostró después que ninguna regla de elección social que cumpla unos pocos axiomas razonables puede agregar las preferencias individuales en una ordenación social coherente salvo que sea dictatorial, el **teorema de la imposibilidad**. El resultado abrió una amplia literatura sobre reglas de votación, como la mayoría simple y sus paradojas, descritas ya por Condorcet en el siglo XVIII, o el teorema del votante mediano.

La salida más fecunda a la imposibilidad fue ampliar la información que se usa para juzgar el bienestar. Rawls (1971) propuso el criterio **maximín**, que juzga una sociedad por la situación de quien está peor, y Sen defendió que la justicia distributiva debe atender a lo que las personas pueden hacer y ser, sus capacidades, y no solo a su utilidad o a su renta. Arrow (1972) y Sen (1998) recibieron el Premio Nobel, y sus trabajos sostienen hoy la medición de la desigualdad y la pobreza con índices como el de Gini o el de Atkinson. Por su parte, la teoría de la implementación, por la que Hurwicz, Maskin y Myerson recibieron el Nobel en 2007, estudia qué resultados sociales pueden alcanzarse con mecanismos en los que a nadie le conviene mentir.

Este tema se ocupa de:

- *Función de bienestar social* (FBS): sus formas (utilitarista, Bernoulli-Nash, rawlsiana, Atkinson), los enfoques no bienestaristas (Sen, Foley-Varian) y la medición de la desigualdad y la pobreza.

- *Elección colectiva*: la regla de elección social, sus axiomas, el teorema de la imposibilidad de Arrow y el rechazo de su metodología (Little, Bergson).

- *Desarrollos posteriores*: las salidas a la imposibilidad, es decir, las reglas de votación que renuncian a algún axioma (unanimidad y mayorías, Condorcet, votante mediano, Downs-Hotelling, *log-rolling*, Borda), la ampliación de la base informacional, la manipulación y la implementación (Gibbard-Satterthwaite, Maskin) y la negociación (Nash, núcleo y valor de Shapley).

1. La función de bienestar social

Que la teoría del consumidor prescindiera de la utilidad cardinal no resolvía la indeterminación social. Puede demostrarse que ordenar los estados de forma completa, transitiva y reflexiva según preferencias sociales obliga a sopesar lo que ganan unos frente a lo que pierden otros. La economía del bienestar no podía, por tanto, eludir las comparaciones interpersonales de utilidades individuales[1].

1.1. Criterio original (Bergson, 1938; Samuelson, 1947)

Origen: Abram Bergson (1938) introdujo la *función de bienestar social* como la forma de hacer explícitas las disyuntivas entre individuos. Paul Samuelson (1947) incorporó la función al núcleo de la economía del bienestar, sin comprometerse con una forma concreta.

Idea: la función de bienestar social representa un código de valores colectivos y permite determinar, entre los infinitos óptimos de Pareto, cuál maximiza el bienestar social.

1.1.1. Definición y propiedades

Definición: formalmente, la FBS es una función definida sobre el espacio de utilidades de los H individuos de la sociedad, $W = W(\mathbf{u})$ con $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^H)$[2], que refleja las preferencias sociales.

Propiedades:

1. *Continuidad y diferenciabilidad*: es continua en las utilidades individuales, lo que garantiza la existencia de un máximo sobre un conjunto de posibilidades cerrado y acotado. Cuando además es diferenciable, ese máximo se caracteriza mediante condiciones de primer orden, lo que no ocurre con la *maximin*, que no es diferenciable en el vértice.

2. *Transformaciones*: exige que las utilidades individuales sean comparables entre personas, y el grado de comparabilidad decide qué formas son admisibles. Así, la utilitarista requiere utilidades cardinales con unidades comparables, y la *maximin*, solo niveles comparables (apartado 3.3). De la agregación de las utilidades individuales surge una función de bienestar social ordinal, que permite ordenar socialmente estados o asignaciones alternativos. Por ello, cualquier transformación monótona creciente de W representa los mismos valores colectivos.

3. *Inclinación*: es creciente en la utilidad de cada individuo, $\partial W/\partial u^h > 0 \quad \forall h = 1, \dots, H$ (benevolencia), de modo que las mejoras paretianas aumentan el bienestar social. La *maximin*, en cambio, solo es no decreciente, pues únicamente crece con la utilidad del peor situado, y una mejora paretiana que no llegue al peor situado deja igual el bienestar social.

4. *Forma*: si la aversión a la desigualdad se considera deseable, es cuasicóncava en las utilidades individuales, es decir, sus curvas de indiferencia social son convexas. A diferencia de la concavidad, la cuasiconcavidad se conserva ante las transformaciones monótonas crecientes del punto 2. Junto con la simetría (punto 5), ello implica que una distribución más igualitaria de las utilidades nunca es peor que otra menos igualitaria con la misma suma, y es estrictamente preferida si la cuasiconcavidad es estricta.

[1] El propio Pareto (1916) admitió que los problemas reales exigen comparaciones interpersonales.

[2] Existe también la FBS de Bergson-Scitovsky, definida en el espacio de bienes (las curvas de indiferencia social se combinan con la frontera de posibilidades de producción, no con la gran frontera de posibilidades de utilidad).

5. *Otras propiedades*:

- *Simetría*: si el anonimato o la imparcialidad se consideran deseables, la FBS es simétrica, de modo que intercambiar las utilidades de dos individuos no altera el bienestar social.

Además de estas propiedades, la FBS hereda las de los criterios de Pareto (tema A22)[3]:

- *Independencia del proceso*: su dominio es el conjunto de asignaciones, de modo que no importa cómo se alcanzan.

- *Individualismo*: depende en última instancia de las cestas que consumen los individuos.

- *No paternalismo*: solo importan las utilidades individuales, porque la FBS es una función compuesta de las u^h, sin preferencias propias del planificador[4].

- *Benevolencia*: ya recogida en la inclinación (punto 3).

1.1.2. Razonamiento

Gráficamente, en el plano de utilidades, las curvas de nivel de la FBS son las **curvas de indiferencia social** (CIS), y sobre cada una el bienestar social es el mismo aunque varíe el reparto de utilidades. Son continuas y decrecientes, por la inclinación de la función, y su curvatura refleja el grado de aversión a la desigualdad de la sociedad. En la función original de Bergson-Samuelson son débilmente convexas y sin forma uniforme. Así, la tasa a la que la sociedad sacrifica el bienestar de unos por el de otros decrece conforme la distribución se hace más desigual a favor de estos otros, pero no a un ritmo fijo.

La FBS permite utilizar la gran frontera de posibilidades de utilidad (GFPU) como restricción y determinar el **punto de felicidad** u *optimum optimorum*, punto de tangencia entre la CIS más alejada del origen y la GFPU (figura A24.1). Este punto maximiza el bienestar social y muestra que la eficiencia paretiana es condición necesaria pero no suficiente de la optimalidad social, ya que puntos ineficientes, situados dentro de la frontera, pueden generar mayor bienestar social que algunos puntos eficientes situados sobre ella.

El punto de felicidad determina la asignación Pareto-óptima que lo genera (tema A22, apartado 1.2.3).

[3] Gravelle y Rees (2004) la denominan "función de bienestar social de Pareto".

[4] Si la FBS no fuese función compuesta de las u^h, las funciones individuales serían reemplazadas por funciones de bienestar individuales $g^h(\cdot)$ que representarían puntos de vista paternalistas (Gravelle y Rees, 2004).

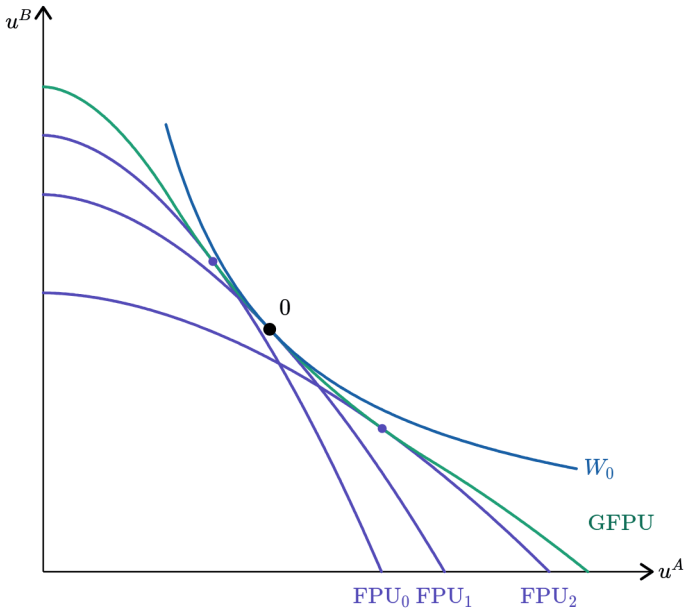


Figura A24.1: Gran frontera de posibilidades de utilidad y punto de felicidad. En el plano de utilidades (u^A, u^B), la GFPU es la envolvente de las fronteras de posibilidades de utilidad, como FPU_0, FPU_1 y FPU_2. El punto de felicidad u *optimum optimorum* (punto 0) es su tangencia con la curva de indiferencia social más alejada del origen, W_0.

1.1.3. Conclusiones

Aspectos positivos: la FBS resuelve la indeterminación paretiana con el único instrumento que puede hacerlo, un juicio de valor explícito sobre la distribución, y lo hace de forma transparente (quien discrepe del óptimo social puede señalar qué valores de la función rechaza). Convierte así el problema de la elección entre óptimos en un problema de maximización con restricciones, tratable con las mismas herramientas que el resto de la teoría, y da fundamento a las políticas redistributivas siempre que eleven el bienestar social así definido.

Limitaciones: la generalidad del criterio original es su virtud y su límite, puesto que admite cualquier juicio distributivo, pero no dice cuál adoptar, de modo que no existe un método para construir la FBS y su existencia se postula axiomáticamente. El punto de felicidad refleja, en consecuencia, los valores del planificador que la especifica, y la forma funcional que se suponga determina el resultado.

1.2. Formas de la FBS: criterios ético-lógicos

La forma de la FBS refleja los valores éticos subyacentes de la sociedad y determina la curvatura de las CIS. Los criterios que siguen son formas de una misma función de bienestar social que pueden ordenarse por su aversión a la desigualdad, que es nula en el utilitarismo, intermedia en el criterio de Bernoulli-Nash e infinita en el *maximin* rawlsiano. La familia de Atkinson los reúne en una única expresión con un parámetro.

1.2.1. Criterio utilitarista (Bentham; Harsanyi, 1955)

Origen: el criterio procede del utilitarismo de Jeremy Bentham y recibió su justificación moderna de John Harsanyi (1955).

Idea: el bienestar social es la suma de las utilidades individuales, de modo que solo importa el total, no su reparto.

Harsanyi justifica esta forma en un contexto de utilidad esperada. El "velo de la ignorancia" impide a los individuos saber qué lugar ocuparán en la sociedad. Tras él, un individuo racional, que maximiza la utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern (neutral al riesgo en términos de utilidad, no de renta), elegiría la sociedad con mayor utilidad esperada. Con posiciones equiprobables, la utilidad esperada es la media de las utilidades, de donde se sigue el utilitarismo[5].

Planteamiento: la FBS es aditivamente separable, $W = \sum_h u^h(x^h)$, y se reparte entre los individuos una cantidad dada de un bien.

CPO: con solución interior y la restricción agotada, derivando el lagrangiano respecto a la cantidad que recibe cada individuo, el óptimo social es aquel en el que las utilidades marginales de ese bien se igualan, $du^A/dx^A = du^B/dx^B$. Si fueran distintas, trasladar una unidad de quien tiene menor utilidad marginal a quien la tiene mayor elevaría la suma, con independencia de quién esté mejor.

CSO: la concavidad de las utilidades individuales ($u'' < 0$) hace cóncava su suma, de modo que la igualación de utilidades marginales es un máximo. Con utilidades lineales, en cambio, el criterio conduce a una solución de esquina (o a la indeterminación, si las utilidades marginales coinciden).

Desarrollo gráfico: el criterio utilitarista se representa en el plano u^A-u^B (figura A24.2):

1. *Gran frontera de posibilidades de utilidad* (GFPU): recoge las combinaciones de utilidades alcanzables con asignaciones eficientes.

2. *Curva de indiferencia social* (CIS_0): une los repartos de igual bienestar y es una recta de pendiente -1, porque las utilidades no se ponderan.

3. *Óptimo social*: en el punto 0, la CIS_0 es tangente a la GFPU, con utilidades u_0^A y u_0^B.

[5] El utilitarismo tiene otras justificaciones, como la benevolencia generalizada (Smart) y el prescriptivismo universal (Hare). Véase Albi et al. (2017, vol. I).

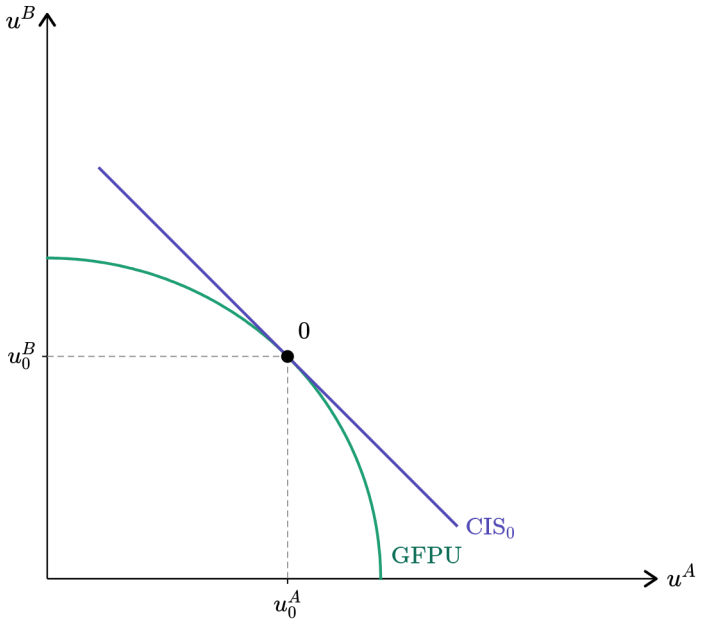


Figura A24.2: Criterio utilitarista. Las curvas de indiferencia social son rectas de pendiente -1 y el óptimo social es su tangencia con la GFPU.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el criterio respeta el individualismo y el anonimato.

- *Limitaciones*: es indiferente a la distribución, pues maximiza la utilidad total aumentando la de quien tiene mayor utilidad marginal a costa de quien la tiene menor, de modo que el óptimo social es compatible con grandes desigualdades de utilidad.

1.2.2. Criterio intermedio (Bernoulli; Nash, 1950)

Origen: el criterio intermedio se apoya en la función de bienestar social de Bernoulli-Nash, que agrega las utilidades individuales de forma multiplicativa (la solución de negociación de Nash, 1950, aplicada a la elección social).

Idea: el bienestar social es el producto de las utilidades individuales, y la sociedad valora tanto su nivel como su igualdad. La forma de la FBS de Bernoulli-Nash, sin parámetros, fija una curvatura que corresponde a una aversión a la desigualdad unitaria en la familia de Atkinson.

Planteamiento: la FBS es $W = \prod_h u^h(x^h)$, equivalente a la suma de logaritmos $W = \sum_h \ln u^h$, y se reparte entre los individuos una cantidad dada de un bien.

CPO: con solución interior y la restricción agotada, derivando el lagrangiano respecto a la cantidad que recibe cada individuo, el óptimo social iguala las utilidades marginales del bien divididas por la utilidad de cada individuo, $(du^A/dx^A)/u^A = (du^B/dx^B)/u^B$. El peso social de cada individuo es inversamente proporcional a su utilidad y, a diferencia del utilitarismo, la utilidad marginal de quien está peor pesa más.

CSO: con utilidades positivas y cóncavas, la suma de sus logaritmos es cóncava, por lo que la CPO caracteriza un máximo.

Desarrollo gráfico: el criterio intermedio se representa en el plano u^A-u^B (figura A24.3):

1. *Gran frontera de posibilidades de utilidad* (GFPU): recoge las combinaciones de utilidades alcanzables con asignaciones eficientes.

2. *Curva de indiferencia social* (CIS_0): une los repartos de igual bienestar y su convexidad refleja una aversión intermedia a la desigualdad.

3. *Óptimo social*: en el punto 0, la CIS_0 es tangente a la GFPU, con utilidades u_0^A y u_0^B.

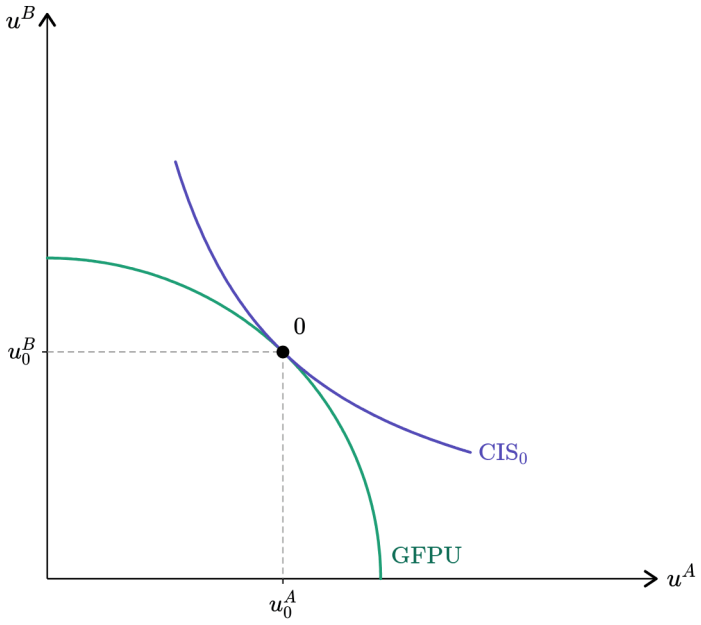


Figura A24.3: Criterio intermedio (Bernoulli-Nash). Las curvas de indiferencia social son convexas y el óptimo social es su tangencia con la GFPU.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: ofrece una forma sencilla de incorporar la aversión a la desigualdad sin llegar al extremo del *maximin*, y enlaza la elección social con la teoría de la negociación, pues coincide con la solución de Nash (apartado 3.5.1).

▪ *Limitaciones*: no permite graduar la aversión a la desigualdad, que queda fijada por la forma funcional, limitación que supera la familia de Atkinson. Además, exige que cada utilidad tenga un cero bien definido, pues el orden social cambia si se desplaza el origen de alguna de ellas.

1.2.3. Criterio de *maximin* (Rawls, 1971)

Origen: John Rawls (*A Theory of Justice*, 1971) propuso, desde la filosofía política liberal, un criterio de justicia distributiva opuesto al utilitarista.

Idea: el bienestar social es el del miembro más desfavorecido, de modo que la sociedad debe maximizar la utilidad de quien peor está (*maximin*).

Tras el "velo de la ignorancia", los individuos, a diferencia de los de Harsanyi, no atribuyen probabilidades a las posiciones, razonan según el *maximin* (como si tuvieran aversión infinita al riesgo) y acuerdan dos principios y una regla de prioridad:

- *Principio de libertad*: cada persona tiene derecho al conjunto más amplio de libertades básicas compatible con las mismas libertades para los demás.

- *Segundo principio*: las desigualdades económicas y sociales solo son legítimas si benefician al más desfavorecido (*principio de diferencia*) y van ligadas a cargos abiertos a todos en condiciones de igualdad equitativa de oportunidades.

- *Prioridad lexicográfica*: los principios se cumplen en orden. El primero ha de satisfacerse plenamente antes de que entre en juego el segundo, de modo que ninguna mejora del más desfavorecido justifica restringir las libertades básicas de nadie.

Planteamiento: la función de bienestar social es de tipo Leontief, $W = \min_h\{u^h(x^h)\}$.

CPO: la condición de óptimo exige $u^A = u^B$, de modo que el óptimo social es la igualdad absoluta de utilidades. No es una condición de primer orden en sentido estricto, pues la función no es diferenciable en el vértice.

CSO: el óptimo no procede de una tangencia sino de la restricción $u^A = u^B$, y su suficiencia se sigue de que W es cuasicóncava (sus conjuntos de contorno superior son convexos).

Desarrollo gráfico: el criterio de *maximin* se representa en el plano u^A-u^B (figura A24.4):

1. *Gran frontera de posibilidades de utilidad* (GFPU): recoge las combinaciones de utilidades alcanzables con asignaciones eficientes.

2. *Curva de indiferencia social* (CIS_0): une los repartos de igual bienestar y tiene forma de L, con el vértice sobre la bisectriz ($u^A = u^B$).

3. *Óptimo social*: en el punto 0, la GFPU corta a la bisectriz en el vértice de la CIS_0, con utilidades $u_0^A = u_0^B$.

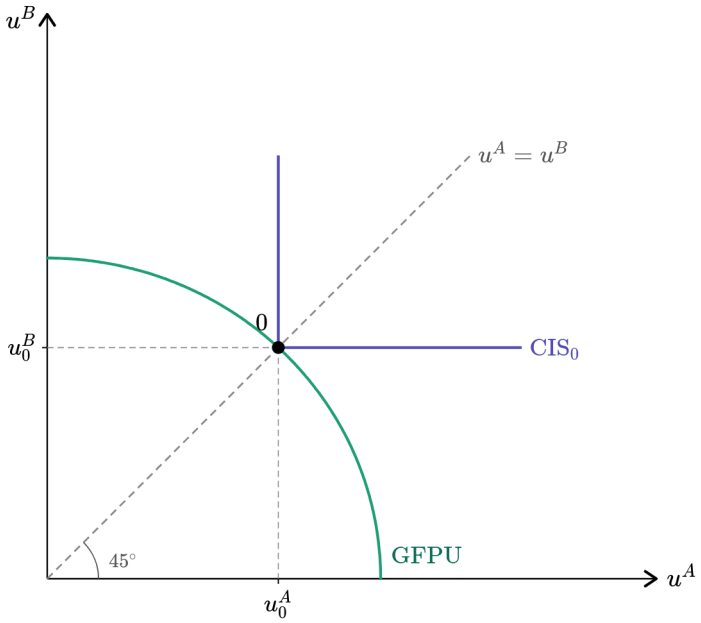


Figura A24.4: Criterio *maximin* (Rawls). Las curvas de indiferencia social tienen forma de ángulo recto con el vértice sobre la bisectriz, y el óptimo social se sitúa donde la GFPU corta a la bisectriz.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el criterio es la principal inspiración del igualitarismo desde posiciones liberales.

▪ *Limitaciones*: equivale a una aversión infinita al riesgo tras el velo de la ignorancia, pues no admite ninguna mejora de la mayoría a costa de un empeoramiento, por pequeño que sea, del peor situado.

1.2.4. La FBS como instrumento de medición: la familia de Atkinson (1970)

Origen: Anthony Atkinson (*On the Measurement of Inequality*, 1970) mostró que toda medida de desigualdad lleva implícita una función de bienestar social, y propuso hacerla explícita.

Idea: dada una FBS, la *renta equivalente igualmente distribuida*, y_e, es la renta que, repartida por igual entre todos, produciría el mismo bienestar social que la distribución real. Como la FBS es cóncava, y_e no supera la renta media $\bar{y}$ (es estrictamente menor si hay desigualdad y $\varepsilon > 0$), y la diferencia mide cuánto bienestar se pierde por la desigualdad. El *índice de Atkinson* es esa pérdida en términos relativos:

$$A_\varepsilon = 1 - \frac{y_e}{\bar{y}}, \qquad y_e = \left[\frac{1}{H} \sum_h (y^h)^{1-\varepsilon} \right]^{1/(1-\varepsilon)}$$

donde $\varepsilon \geq 0$ es el parámetro de *aversión a la desigualdad* de la sociedad.

Razonamiento: cuanto mayor es ε, más bienestar se pierde por una misma desigualdad. Si se identifica la utilidad de cada individuo con su renta, la familia contiene los tres criterios anteriores como valores del parámetro:

- *Utilitarismo*: con $\varepsilon = 0$, $y_e = \bar{y}$, solo importa la suma de las rentas y $A_\varepsilon = 0$, con lo que la desigualdad no cuesta nada.

- *Criterio intermedio*: con $\varepsilon = 1$ la expresión tiende a la media geométrica de las rentas, que corresponde a la forma de Bernoulli-Nash, y A_ε mide la distancia entre la media geométrica y la aritmética.

- *Maximin*: con $\varepsilon \to \infty$ solo importa el más pobre, y_e tiende a $y_{\min}$ y A_ε tiende a $1 - y_{\min}/\bar{y}$.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el índice convierte la FBS en un instrumento de medida y hace explícito que comparar distribuciones exige un juicio de valor. Además, a diferencia del índice de Gini, que implica una ponderación fija de las rentas, permite elegir cuánto pesa la desigualdad en la valoración social, y por ello es muy utilizado en la evaluación normativa de las políticas redistributivas.

- *Limitaciones*: hace explícito el juicio de valor, pero no lo resuelve, porque el valor de ε ha de fijarse fuera del modelo y, si las curvas de Lorenz se cruzan, la ordenación de dos distribuciones puede invertirse según el parámetro elegido. Supone, además, una FBS aditiva y simétrica en la que la utilidad se identifica con la renta.

1.3. Más allá del bienestarismo

Los criterios anteriores comparten el supuesto bienestarista, según el cual el bienestar social depende solo de las utilidades. Sin embargo, dos aportaciones lo cuestionan, una desde la filosofía política y otra desde la teoría de la asignación.

1.3.1. Criterio de las capacidades básicas (Sen, 1980)

Origen: Amartya Sen (*Equality of What?*, 1980) cuestionó el objeto mismo de la justicia distributiva.

Idea: el énfasis no debe estar en la distribución de bienes primarios, como en Rawls, ni en la satisfacción, como en los utilitaristas, sino en lo que las personas son capaces de *hacer y ser* con esos recursos. El enfoque de Sen se centra en las *capacidades*, el conjunto de funcionamientos (estar bien nutrido, sano, educado, participar en la vida social) que una persona puede alcanzar.

Razonamiento: dos personas con los mismos bienes pueden tener capacidades muy distintas, por diferencias físicas, sociales o de entorno, de modo que igualar los bienes no iguala las oportunidades reales. Además, dos personas con la misma satisfacción pueden tenerla en condiciones objetivas muy distintas, porque las preferencias se adaptan a las circunstancias. La FBS debe definirse, por tanto, sobre las capacidades y no sobre los bienes ni sobre las utilidades.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el enfoque es el fundamento del índice de desarrollo humano y de la medición multidimensional de la pobreza (tema B28).

- *Limitaciones*: el enfoque tropieza con la imposibilidad de observar directamente las capacidades individuales, que obliga a aproximarlas mediante indicadores de funcionamientos.

1.3.2. Equidad sin comparaciones interpersonales: las asignaciones sin envidia (Foley, 1967; Varian, 1974)

Origen: Duncan Foley (1967) y Hal Varian (1974) propusieron un criterio de equidad que, como el de Pareto, no requiere comparar utilidades entre personas.

Idea: una asignación es *sin envidia* si ningún individuo prefiere la cesta de otro a la suya propia, y es *justa* si es a la vez sin envidia y Pareto-eficiente. El criterio solo usa las preferencias de cada uno sobre las cestas, no su utilidad.

Razonamiento: con dotaciones iniciales iguales, el equilibrio competitivo produce una asignación justa en el sentido de Foley-Varian. Nadie envidia a nadie, porque todos han elegido con la misma renta, y la asignación es eficiente por el primer teorema. El equilibrio competitivo desde dotaciones iguales es, pues, la formalización del reparto igualitario seguido del intercambio libre.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el criterio muestra que equidad y eficiencia no son incompatibles si se parte de dotaciones iguales, lo que da contenido concreto al segundo teorema.

- *Limitaciones*: con producción y habilidades distintas la ausencia de envidia y la eficiencia pueden no ser alcanzables a la vez, pues el más productivo puede envidiar el ocio del menos productivo.

1.4. La medición de la desigualdad y la pobreza

Para comparar distribuciones reales de renta hace falta reducir cada una a un número, y todo número que lo haga lleva implícita una valoración social. Los instrumentos de medida de la desigualdad y la pobreza se estudian primero en la dimensión de la renta, terreno de las FBS, y después en varias dimensiones, terreno de las capacidades.

1.4.1. Medición unidimensional de la desigualdad

Origen: los índices proceden de la estadística económica de principios del siglo XX (Lorenz, 1905; Gini, 1912) y fueron reinterpretados como funciones de bienestar social implícitas por Atkinson (1970).

Idea: la desigualdad de una distribución de renta $(y^1, \dots, y^H)$ se resume en un número que mide cuánto se aleja de la igualdad perfecta. Los índices difieren en la información que usan y en la parte de la distribución a la que dan más peso.

Razonamiento: los instrumentos clásicos son cuatro:

- *Curva de Lorenz* (1905): representa la proporción acumulada de renta que recibe la proporción acumulada de población, ordenada de menor a mayor renta. Con H individuos, cada punto de la curva es

$$L\left(\frac{k}{H}\right) = \frac{\sum_{h=1}^{k} y^h}{\sum_{h=1}^{H} y^h}, \qquad k = 0, 1, \ldots, H$$

donde las rentas están ordenadas de menor a mayor ($y^1 \leq y^2 \leq \cdots \leq y^H$), k/H es la proporción de población que forman los k individuos de menor renta y $L(k/H)$ es la proporción de la renta total que reciben. La curva une esos puntos desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$ y nunca queda por encima de la bisectriz (figura A24.5).

La igualdad perfecta corresponde a la bisectriz, en la que cada proporción de la población recibe la misma proporción de la renta, y cuanto más se aleja la curva de ella, mayor es la desigualdad. Si dos curvas no se cruzan, la más cercana a la bisectriz es inequívocamente más igualitaria y, si ambas distribuciones tienen la misma renta media, es preferida por cualquier FBS simétrica y cóncava. Atkinson (1970) probó el resultado para las FBS aditivamente separables, y Dasgupta, Sen y Starrett (1973) lo generalizaron. Si las curvas se cruzan, en cambio, la ordenación depende de la FBS elegida.

- *Índice de Gini* (1912): es el doble del área entre la curva de Lorenz y la bisectriz. Equivale a la mitad de la diferencia media entre las rentas de todos los pares de individuos, en proporción a la renta media:

$$G = \frac{1}{2H^2\bar{y}} \sum_{h=1}^{H} \sum_{h'=1}^{H} \left| y^h - y^{h'} \right|, \qquad G \in [0, 1]$$

donde $\left| y^h - y^{h'} \right|$ es la diferencia absoluta entre las rentas de los individuos h y h' y $\bar{y}$ es la renta media. El índice vale 0 con igualdad perfecta y $1 - 1/H$ si una persona lo recibe todo, valor que tiende a 1 cuando la población es grande.

El índice de Gini es el más usado por su sencillez, pero es más sensible a las diferencias en el centro de la distribución que a las de las colas. Además, su FBS implícita pondera la renta de cada individuo según su posición en la ordenación (más cuanto más pobre), sin parámetro que la sociedad pueda elegir.

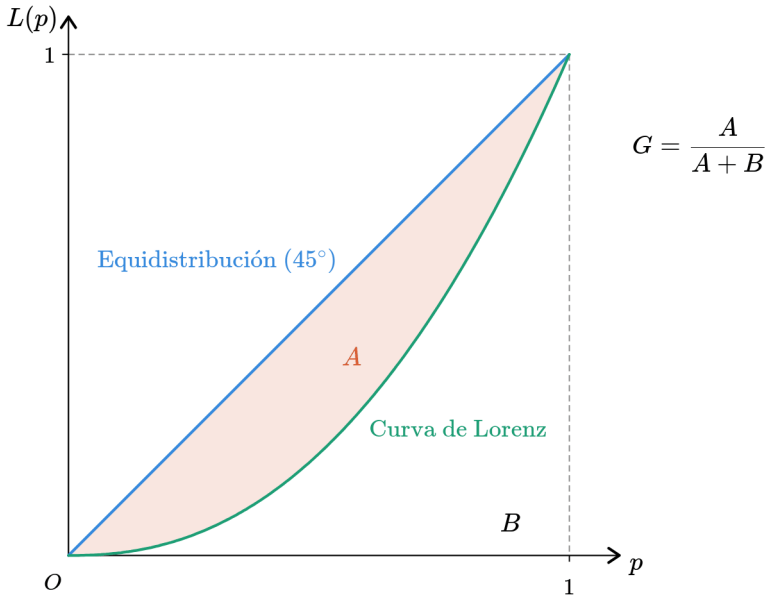


Figura A24.5: Curva de Lorenz e índice de Gini. La curva de Lorenz, $L(p)$, da la proporción acumulada de renta que recibe la proporción acumulada de población, $p = k/H$, y va de $(0,0)$ a $(1,1)$ por debajo de la bisectriz de equidistribución. El índice de Gini es $G = A/(A+B)$, que equivale al doble del área A entre ambas, porque $A + B = 1/2$.

- *Índice de Theil* (1967): se basa en la entropía de la teoría de la información y compara la renta de cada individuo con la media:

$$T = \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} \frac{y^h}{\bar{y}} \ln \frac{y^h}{\bar{y}}, \qquad T \in [0, \ln H]$$

donde $y^h/\bar{y}$ es la renta del individuo h en proporción a la renta media. El índice vale 0 con igualdad perfecta y $\ln H$ si una persona lo recibe todo.

Su propiedad distintiva es la *descomponibilidad*. Si la población se divide en J grupos, la desigualdad total se separa exactamente en dos sumandos:

$$T = \sum_{j=1}^{J} s_j T_j + \sum_{j=1}^{J} s_j \ln \frac{\bar{y}_j}{\bar{y}}$$

donde s_j es la proporción de la renta total que recibe el grupo j, T_j es el índice de Theil dentro de ese grupo y $\bar{y}_j$ es su renta media. El primer sumando mide la desigualdad dentro de los grupos y el segundo, la desigualdad entre grupos, de modo que el índice permite atribuir la desigualdad a regiones, sexos o niveles educativos.

- *Índice de Atkinson* (1970): hace explícito el parámetro de aversión a la desigualdad.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: los índices resumen cada distribución en un número comparable entre países y en el tiempo, y la dominancia de Lorenz permite ordenar distribuciones con igual renta media sin elegir una FBS concreta, pues la ordenación vale para todas las simétricas y cóncavas. El índice de Theil permite, además, atribuir la desigualdad a grupos de población.

▪ *Limitaciones*: la dominancia de Lorenz solo ordena parcialmente, pues cuando las curvas se cruzan el resultado depende del índice elegido, y el más usado, el de Gini, deja implícita la valoración que incorpora. Además, los índices se limitan a la renta y dejan fuera otras dimensiones del bienestar, que se abordan en el apartado 1.4.3.

1.4.2. Medición de la pobreza (Sen, 1976)

Origen: Amartya Sen (1976) mostró que las medidas habituales de pobreza son insuficientes y propuso un índice axiomático.

Idea: medir la pobreza exige tres decisiones:

▪ *Umbral de pobreza*: fijar una *línea de pobreza* z, absoluta (un mínimo de subsistencia) o relativa (una fracción de la renta mediana, como el 60 % que usa la UE).

▪ *Tasa de incidencia*: contar a los pobres, lo que da la proporción de pobres en la población, H_p.

▪ *Brecha de pobreza*: medir cuánto les falta, es decir, la distancia media de los pobres a la línea.

La tasa de incidencia, la medida más usada, ignora la intensidad de la pobreza y la desigualdad entre los pobres, de modo que una transferencia de un pobre a otro menos pobre que lo saque de la pobreza reduce la tasa de incidencia, aunque empeore al más pobre.

Razonamiento: Sen exigió a un índice de pobreza dos axiomas, la *monotonicidad* (una reducción de la renta de un pobre aumenta la pobreza) y la *transferencia* (una transferencia de un pobre a alguien más rico aumenta la pobreza). Para recoger la desigualdad entre los pobres, ponderó la brecha de cada uno según su puesto en la ordenación de rentas (más cuanto más pobre) y, con una normalización, obtuvo el índice

$$S = H_p \left[I + (1 - I)\, G_p \right]$$

donde H_p es la tasa de incidencia, I es la intensidad de la pobreza (la brecha media de los pobres en proporción a la línea z) y G_p es el índice de Gini de las rentas de los pobres, que mide la desigualdad entre ellos.

El índice de Sen convierte la medición de la pobreza en un problema de bienestar social. Decidir cuánto pesan la distancia a la línea y la desigualdad entre los pobres reproduce, en el extremo inferior de la distribución, el debate de las FBS.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el enfoque axiomático corrige los defectos de la tasa de incidencia y de la brecha, pues reúne en un único índice la intensidad de la pobreza y la desigualdad entre los pobres. Además, abrió la vía a los índices posteriores, como la familia de Foster, Greer y Thorbecke (FGT).

- *Limitaciones*: el índice no es descomponible por subgrupos de población, de modo que la pobreza total no se obtiene como media ponderada de la de cada región o grupo, lo que motivó la familia FGT. Además, toma como dada la línea de pobreza, cuya fijación sigue siendo un juicio de valor previo.

1.4.3. Medición multidimensional

Origen: la medición multidimensional nace del enfoque de las capacidades de Sen y de su aplicación por el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD, 1990) y por Alkire y Foster (2011).

Idea: si el bienestar depende de las capacidades y no solo de la renta, la pobreza y la desigualdad han de medirse en varias dimensiones a la vez, como la salud, la educación, la vivienda o el acceso a servicios.

Razonamiento: los principales instrumentos son tres:

- *Índice de desarrollo humano* (PNUD, 1990): inspirado en Sen, combina renta, esperanza de vida y educación en un único indicador por país.

- *Índice de pobreza multidimensional* (Alkire y Foster, 2011): identifica como pobre a quien sufre privación en un número mínimo de dimensiones y agrega la incidencia y la intensidad de las privaciones. Tiene la misma estructura que la familia de índices de pobreza FGT (Foster, Greer y Thorbecke, 1984).

- *Tasa de riesgo de pobreza o exclusión social* (AROPE): indicador de la UE que combina la pobreza relativa de renta con la privación material y social severa y la muy baja intensidad laboral del hogar.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la medición multidimensional hace operativo el enfoque de las capacidades.

- *Limitaciones*: lo hace al precio de dos decisiones adicionales, qué dimensiones incluir y cómo ponderarlas, que son juicios de valor tan explícitos como el parámetro de Atkinson (tema B28).

1.5. Conclusiones

Elegir entre los óptimos de Pareto exige un juicio de valor explícito, que la FBS incorpora sin decir cuál adoptar. Sus formas difieren en cuánto penalizan la desigualdad, desde el utilitarismo, indiferente al reparto, hasta el *maximin*, y la familia de Atkinson las reúne en un único parámetro. Los enfoques de Sen y de Foley-Varian cuestionan, además, que el bienestar dependa solo de las utilidades, y todo índice de desigualdad o de pobreza lleva implícita una valoración social.

El óptimo social es, por tanto, una asignación tecnocrática, porque depende de una forma funcional que ningún método permite construir y que expresa un juicio de valor sobre el conflicto entre eficiencia y equidad. La sección 2 examina si los valores colectivos que expresa la FBS pueden obtenerse de las ordenaciones individuales mediante una regla.

2. Teoría de la elección colectiva: el teorema de Arrow

La función de bienestar social presupone que los valores colectivos están dados. La **teoría de la elección colectiva** se pregunta, en cambio, si esos valores pueden obtenerse de las preferencias de los individuos mediante un procedimiento que las respete.

Conviene distinguir tres objetos:

- *Función de bienestar social* (Bergson-Samuelson): es una valoración que, dado un perfil de utilidades comparables entre personas, asigna un número a cada estado.

- *Regla de elección social* (RES): Arrow la denominó también función de bienestar social, y autores como Julio Segura, *constitución*. La regla es un procedimiento que asocia un orden social de preferencias a cada configuración posible de órdenes individuales, usando solo información ordinal. Este concepto es más amplio que la FBS, porque ha de funcionar para cualquier perfil y no solo para uno dado.

- *Función de elección social*: es más débil, pues no exige producir una ordenación completa, sino solo señalar, para cada conjunto de alternativas factibles, cuál o cuáles se eligen.

Arrow (1951b) busca una RES que respete unas exigencias mínimas de racionalidad y democracia, y el **teorema de la imposibilidad** concluye que no existe. Por ello, las salidas de la sección 3 consisten en relajar esos requisitos o en pasar al objeto más débil, la función de elección social.

2.1. La regla de elección social

Conjunto de elección: sea $\mathcal{C}$ el conjunto de *estados sociales* o asignaciones alternativas $\{A, B, C, ...\}$ entre los que la sociedad ha de elegir (p. ej. distribuciones de recursos, políticas, candidatos). Se supone que contiene al menos tres alternativas, pues con dos el problema es trivial.

Preferencias individuales: cada individuo $h = 1, \dots, H$ tiene una ordenación de preferencias R^h sobre $\mathcal{C}$, completa y transitiva como en la teoría del consumidor, pero puramente ordinal, de modo que dice qué prefiere, no cuánto, y no es comparable con la de los demás. Un *perfil* de preferencias es la lista de las ordenaciones de todos los individuos, $(R^1, \dots, R^H)$.

Regla de elección social: es una función f que asocia a cada perfil de preferencias individuales una ordenación social $R = f(R^1, \dots, R^H)$, también completa y transitiva, que dice cómo ordena la sociedad los estados de $\mathcal{C}$. La regla de la mayoría, la unanimidad o la regla de Borda son reglas de este tipo, aunque no todas dan siempre una ordenación completa y transitiva (sección 3).

2.2. Axiomas de Arrow

Para Arrow, una RES solo es racional y democrática si cumple cinco axiomas:

1. *Universalidad* (dominio no restringido): la RES ha de aplicarse a cualquier perfil de preferencias individuales (análogo a completitud).

2. *Unanimidad* (Pareto-optimalidad débil): si todos prefieren A a B, la ordenación social debe situar A por encima de B.

3. *Ausencia de dictadores*: ningún individuo puede determinar la elección social al margen del resto.

4. *Transitividad*: si $A \succ B$ y $B \succ C$, entonces $A \succ C$, lo que asegura la coherencia lógica de la ordenación social y evita los ciclos de la paradoja de Condorcet.

5. *Independencia de alternativas irrelevantes* (IAI): para ordenar socialmente A y B basta saber cómo ordena cada individuo A y B, sin que importe dónde sitúa cada uno el resto de opciones[6]. Por ello, el axioma excluye la cardinalización de preferencias y evita la manipulación mediante la adición o supresión de alternativas.

2.3. Teorema de la imposibilidad (Arrow, 1951b)

Origen: Kenneth Arrow (*Social Choice and Individual Values*, 1951b) planteó si existe alguna regla que agregue las ordenaciones individuales en una ordenación social respetando las condiciones mínimas del apartado anterior.

Idea: con un número finito de individuos y tres alternativas o más, Arrow prueba que ninguna RES satisface a la vez los cinco axiomas.

Razonamiento: la demostración moderna (Sen, 1970a) se apoya en la noción de *conjunto decisivo*. Un grupo de individuos es decisivo sobre un par de alternativas si, cuando todos ellos prefieren una a la otra, la sociedad la prefiere, sea cual sea la opinión del resto.

El argumento tiene dos pasos:

1. *Expansión*: por el principio de Pareto, la sociedad entera es decisiva sobre todos los pares, de modo que existe al menos un conjunto decisivo. Después, por la independencia de alternativas irrelevantes, la universalidad del dominio, el principio de Pareto y la transitividad social, un conjunto decisivo sobre un par lo es sobre todos (lema de expansión).

2. *Contracción*: todo conjunto decisivo con más de un miembro puede reducirse. Para ello, se divide en dos partes y se construye un perfil de preferencias sobre tres alternativas en el que, por transitividad de la ordenación social, una de las dos partes resulta decisiva por sí sola.

Repitiendo la reducción se llega a un conjunto decisivo de un solo individuo, que es, por definición, un dictador. La demostración deja ver dónde actúa cada axioma. Así, la universalidad permite construir los perfiles necesarios, la independencia impide usar la intensidad de las preferencias para bloquear la expansión y la transitividad de la ordenación social obliga a contraer los conjuntos decisivos.

El teorema tiene dos implicaciones:

1. *Imposibilidad*: con solo ordenaciones individuales, sin intensidades ni comparaciones entre personas, ninguna regla cumple a la vez unas exigencias mínimas de coherencia y de respeto a lo que prefiere cada individuo.

2. *Precio de la RES*: elegir una RES obliga a abandonar como mínimo uno de los axiomas. Las salidas de la sección 3 son otras tantas formas de pagar ese precio.

[6] Así, la elección social entre sanidad y educación ha de depender solo de cómo ordena cada uno esas dos partidas, no de dónde sitúa la justicia.

2.3.1. Extensión: la paradoja liberal (Sen, 1970b)

Origen: Amartya Sen (*The Impossibility of a Paretian Liberal*, 1970b) planteó la paradoja como una extensión del teorema de Arrow al problema de los derechos individuales.

Idea: para llegar a una imposibilidad basta con exigir a la regla de elección social dos condiciones aparentemente mínimas, el principio de Pareto débil y un *liberalismo mínimo*. Según este último, cada uno de dos individuos tiene al menos un par de alternativas sobre el que su preferencia personal es decisiva (los asuntos que pertenecen a su "esfera privada", como qué leer o cómo vestir).

Razonamiento: Sen demuestra que, con dominio universal, no existe ninguna regla que satisfaga simultáneamente Pareto y liberalismo mínimo, porque las preferencias *entrometidas* de cada individuo sobre la esfera del otro pueden generar una ordenación social cíclica. El ejemplo canónico es el de dos individuos, uno mojigato y otro lascivo, y un libro (*El amante de Lady Chatterley*) que uno de ellos puede leer o no.

La paradoja admite dos lecturas:

1. *Lectura formal*: el conflicto entre eficiencia y derechos individuales es lógico, no contingente. Solo se resuelve, por eso, restringiendo el dominio de las preferencias (excluyendo las entrometidas) o aceptando que los derechos no se representen como parte de la ordenación social sino como restricciones sobre el proceso de elección (Nozick, 1974).

2. *Lectura sustantiva*: el criterio de Pareto, aparentemente neutral, no lo es, porque su aplicación irrestricta puede exigir violar la esfera privada de los individuos. La paradoja introduce así en la economía del bienestar la cuestión de los derechos, que el enfoque de las capacidades de Sen (apartado 1.3.1) desarrollará después.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: muestra que la imposibilidad aparece con exigencias más débiles que las de Arrow y que el principio de Pareto puede chocar con valores no bienestaristas, como la libertad personal. Con ello amplía la base de la economía del bienestar más allá de las utilidades.

- *Limitaciones*: el conflicto nace de las preferencias entrometidas sobre la esfera ajena, por lo que su relevancia práctica depende de cuánto pesen esas preferencias y es discutida. Además, la representación de los derechos como decisividad sobre pares de estados sociales se ha criticado por no recoger la idea habitual de libertad, que se refiere a lo que cada uno puede hacer y no a los estados que resultan.

2.3.2. Conclusiones

Aspectos positivos: el teorema convierte en un resultado general, válido para cualquier regla y no solo para la mayoría simple, la incoherencia colectiva que Condorcet había mostrado con un ejemplo (apartado 3.1.2). Su método axiomático se extendió, además, a la manipulabilidad de las reglas y a su implementación (apartado 3.4).

Limitaciones: la independencia de alternativas irrelevantes excluye la intensidad de las preferencias, que la regla de Borda recoge de forma ordinal (apartado 3.2.2). El dominio universal obliga, además, a ordenar perfiles extremos, cuya exclusión permite a la mayoría simple producir una ordenación transitiva (apartado 3.1.3).

2.4. El rechazo de la metodología de Arrow (Little, 1952; Bergson, 1954)

Origen: Ian Little (1952) y Abram Bergson (1954) respondieron al teorema negando que el problema que resuelve sea el de la economía del bienestar.

Idea: ambos sostienen que el objeto de la economía del bienestar son los *juicios de bienestar social*, valoraciones que una persona formula sobre los estados alternativos, y no un procedimiento mecánico que agregue las preferencias de todos. Cada uno lo argumentó de un modo distinto:

- *Little*: objetó que la regla de Arrow funciona como un dispositivo que agrega valores y devuelve un resultado, sin garantía de que ese resultado exprese lo que la sociedad valora.

- *Bergson*: separó dos destinatarios posibles del consejo económico. A su juicio, la economía del bienestar asesora al individuo, mientras que la regla de Arrow asesora al funcionario, pues indica a quien representa a la colectividad qué debe decidir.

Razonamiento: el valor de la crítica está en separar dos fases de la decisión democrática. En la *deliberativa* cada individuo forma y expresa sus juicios de valor, y en la *decisiva* esos juicios se agregan en una decisión. La función de bienestar social corresponde a la primera fase y la regla de elección social de Arrow, a la segunda. Por su parte, Arrow admitió tanto la distinción como que su teoría ofrece a la sociedad un mecanismo de decisión, y no una guía para el individuo. Aun así, replicó que el problema central de la economía del bienestar es justamente ese, determinar qué acciones o políticas conviene que adopte la sociedad en su conjunto.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: el debate fija el alcance del teorema, que se refiere a la fase decisiva y no a la formación de los juicios.

- *Limitaciones*: no desactiva el teorema, pues cualquier sociedad que decida colectivamente necesita una regla, y a ella se aplica la imposibilidad.

2.5. Conclusiones

Los valores colectivos que la FBS daba por supuestos no pueden obtenerse de ordenaciones individuales ordinales y no comparables mediante una regla que cumpla a la vez los cinco axiomas de Arrow. La paradoja liberal de Sen llega a otra imposibilidad con menos requisitos y muestra que el criterio de Pareto no es neutral frente a los derechos individuales.

El teorema dio origen a la teoría de la elección social. La réplica de Little y Bergson fija su alcance en la fase decisiva, sin desactivarlo, y las salidas que la teoría ha explorado desde entonces se estudian en la sección 3.

3. Desarrollos posteriores: las salidas a la imposibilidad

Las salidas al teorema de Arrow son de cuatro tipos. En primer lugar, las reglas de votación, que son las que las sociedades usan, renuncian a alguno de los axiomas de Arrow. Varias son muy anteriores a Arrow, como las de Borda y Condorcet, pero su teorema permite leerlas como otras tantas formas de pagar el precio de la RES. En segundo lugar, la ampliación de la base informacional admite utilidades cardinales y comparables. En tercer lugar, la teoría de la manipulación y la implementación estudia las reglas cuando los agentes actúan estratégicamente y, finalmente, la negociación y los juegos cooperativos sustituyen la agregación de preferencias por el acuerdo entre las partes.

3.1. El levantamiento de los axiomas de Arrow (I): decisividad y universalidad

El orden de exposición de las reglas de votación sigue el axioma que cada una levanta:

- *Unanimidad y mayorías cualificadas*: renuncian a decidir siempre, es decir, a la completitud de la ordenación social que exige la definición de RES.

- *Mayoría simple*: renuncia a la universalidad.

- *Intercambio de votos y regla de Borda*: renuncian a la independencia de alternativas irrelevantes.

3.1.1. Renuncia a la decisividad: unanimidad, mayorías cualificadas y mayoría óptima (Wicksell, 1896; Buchanan y Tullock, 1962)

Origen: la unanimidad fue propuesta como regla de decisión fiscal por Knut Wicksell (1896), como la única que garantiza que nadie resulte perjudicado por una decisión colectiva. James Buchanan y Gordon Tullock (*The Calculus of Consent*, 1962) generalizaron el problema preguntándose qué mayoría conviene exigir en cada decisión, y con ello fundaron la teoría económica de las constituciones.

Idea: decidir en grupo siempre cuesta algo, y la mayoría que conviene exigir es la que hace mínimo ese coste. La *mayoría óptima* sale del equilibrio entre dos costes que se mueven en sentidos opuestos:

- *Costes internos o de decisión*: los de llegar a un acuerdo (negociación, tiempo, riesgo de bloqueo). Aumentan a medida que se pide un porcentaje de votos mayor y, si se exige unanimidad, tienden a infinito, porque cualquier votante puede vetar la decisión.

- *Costes externos*: los que soportan quienes salen perjudicados por la decisión. Se reducen cuanto más amplia es la mayoría exigida y, con unanimidad, tienden a cero, porque nadie dará su voto a algo que le perjudica.

Razonamiento: sumados, los dos costes dibujan una U en función de la mayoría exigida, y el fondo de esa U marca la mayoría óptima.

Las reglas observadas en la práctica se sitúan a lo largo de esa curva:

- *Unanimidad* (Wicksell): exige el 100 % de votos. La unanimidad es una regla paretiana que exige pocos juicios de valor, pero tiene costes de decisión prohibitivos.

- *Mayoría cualificada*: exige un porcentaje fijado de antemano, entre el 50 y el 100 %.
- *Mayoría absoluta*: precisa el voto favorable de más de la mitad de los miembros.
- *Mayoría simple*: precisa más votos a favor que en contra.

Ejemplos: las organizaciones internacionales y los Estados asignan cada regla a un tipo de decisión distinto:

- *Unanimidad*: el Consejo de la UE la exige en fiscalidad, política exterior y de seguridad común y recursos propios, y la reforma de los Tratados requiere también la unanimidad del Consejo Europeo o de la conferencia intergubernamental (tema B36). En la OMC rige, además, la práctica del consenso (tema B33).

- *Mayoría cualificada*: el FMI exige tres quintos de los miembros que reúnan el 85 % del poder de voto para reformar el convenio constitutivo, umbral que otorga a EE. UU. un veto de hecho (tema B22). La OMC exige dos tercios de los miembros para admitir otros nuevos y tres cuartos para las exenciones. El Consejo de la UE aplica la doble mayoría del 55 % de los Estados que representen el 65 % de la población (tema B36), y el Consejo de Seguridad de la ONU, nueve de quince votos sin veto de un miembro permanente.

- *Mayoría absoluta*: el Parlamento Europeo la aplica para elegir al presidente de la Comisión Europea (art. 17.7 del Tratado de la Unión Europea).

- *Mayoría simple*: el Consejo de Gobierno del BCE la aplica en sus decisiones ordinarias (tema B43).

Al encarecer la decisión, la unanimidad y las mayorías muy amplias favorecen que nada cambie (*statu quo*), y con unanimidad basta un voto en contra para frenar lo que el resto quiere (*tiranía de la minoría*).

Desarrollo gráfico: la mayoría óptima se representa en el plano porcentaje de votos-coste (figura A24.6):

1. *Costes de decisión* ($C_D(n)$): crecen con el porcentaje de votos exigido, n, y tienden a infinito al acercarse a la unanimidad.

2. *Costes externos* ($C_E(n)$): decrecen con la mayoría requerida y se anulan con la unanimidad.

3. *Costes totales* ($C_T(n)$): son la suma vertical de ambos y tienen forma de U.

4. *Óptimo*: la mayoría óptima, n_0^*, es el mínimo de $C_T(n)$ (punto 0).

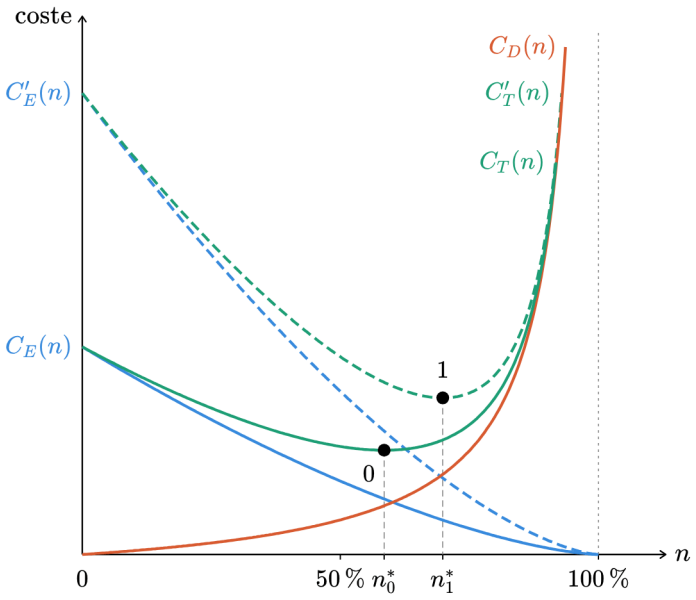


Figura A24.6: Mayoría óptima (Buchanan y Tullock, 1962). Los costes de decisión crecen y los costes externos decrecen con la mayoría exigida. La mayoría óptima minimiza su suma y es mayor cuanto mayores son los costes externos potenciales (trazo discontinuo).

Estática comparativa: la mayoría óptima varía con cada decisión.

▪ *Costes externos altos*: la mayoría óptima crece con los costes externos potenciales (decisiones que afectan a derechos fundamentales, reformas constitucionales). En la figura, los costes externos pasan a $C'_E(n)$, los totales a $C'_T(n)$ y el óptimo pasa del punto 0 al punto 1, de n_0^* a n_1^*.

▪ *Costes de decisión altos*: la mayoría óptima disminuye cuando crecen los costes de decisión (decisiones frecuentes y de bajo alcance).

Extensiones: el *teorema de May* (Kenneth May, 1952) establece que, con dos alternativas, la regla de la mayoría simple es la única regla de decisión que cumple cuatro propiedades: decisividad (siempre produce un resultado), anonimato (todos los votantes cuentan igual), neutralidad (todas las alternativas se tratan igual) y respuesta positiva (si una alternativa gana o empata y un votante cambia a su favor, gana). El teorema explica la posición privilegiada de la mayoría simple entre las reglas de votación, y también sus límites, puesto que sus problemas aparecen precisamente cuando hay más de dos alternativas.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: ofrece un criterio para elegir la regla de decisión según lo que está en juego en cada caso y explica la coexistencia de mayorías distintas en una misma constitución. Además, la unanimidad wickselliana proporciona una referencia paretiana con la que valorar las demás reglas.

▪ *Limitaciones*: los costes de decisión y los costes externos son difíciles de medir, por lo que la mayoría óptima es una guía cualitativa más que una regla aplicable. Además, trata cada decisión

como la aprobación o el rechazo de una propuesta, sin considerar los ciclos y el comportamiento estratégico que aparecen cuando hay más alternativas.

3.1.2. La mayoría simple: la paradoja de Condorcet (1785)

Origen: el marqués de Condorcet (1785) fue el primero en advertir que la votación por mayoría puede generar preferencias colectivas cíclicas.

Idea: la regla de la mayoría simple, aplicada por pares de alternativas, puede producir una ordenación social intransitiva aunque todas las ordenaciones individuales sean transitivas, de modo que la sociedad prefiere A a B, B a C y C a A.

Razonamiento: supónganse tres votantes (1, 2, 3), tres alternativas unidimensionales (A, B, C) y la decisión por votación entre pares. Las preferencias son $A \succ B \succ C$ para el votante 1 y $B \succ C \succ A$ para el 2, ambas con una sola moda, y $C \succ A \succ B$ para el 3, con dos modas.

Los votantes 1 y 3 hacen ganar a A en el duelo A-B, y los votantes 1 y 2 dan la victoria a B en el duelo B-C. La transitividad exigiría entonces que A venciera a C, pero en el duelo A-C los votantes 2 y 3 eligen C.

Con una ordenación social intransitiva, la mayoría simple no tiene equilibrio, pues toda alternativa pierde frente a alguna otra, de modo que las votaciones por pares podrían repetirse sin fin.

Las soluciones posibles son tres:

- *Preferencias idénticas*: el problema de agregación desaparece y ninguna regla es necesaria.

- *Exclusión de las alternativas ya votadas*: pone fin al proceso, pero da pie a la *manipulación de la agenda*. Gana siempre la alternativa que entra en la última votación, de modo que el orden en que se vota determina el resultado.

- *Preferencias unimodales*: exigirlas supone renunciar a la universalidad y conduce al teorema del votante mediano.

Desarrollo gráfico: la paradoja de Condorcet se representa en el plano alternativas-preferencia (figura A24.7):

1. *Votante 1*: ordena $A \succ B \succ C$, con un único máximo, en A.

2. *Votante 2*: ordena $B \succ C \succ A$, con un único máximo, en B.

3. *Votante 3*: ordena $C \succ A \succ B$, con dos máximos relativos, en A y en C.

4. *Equilibrio*: no existe, pues las votaciones por pares forman un ciclo en el que A vence a B, B a C y C a A.

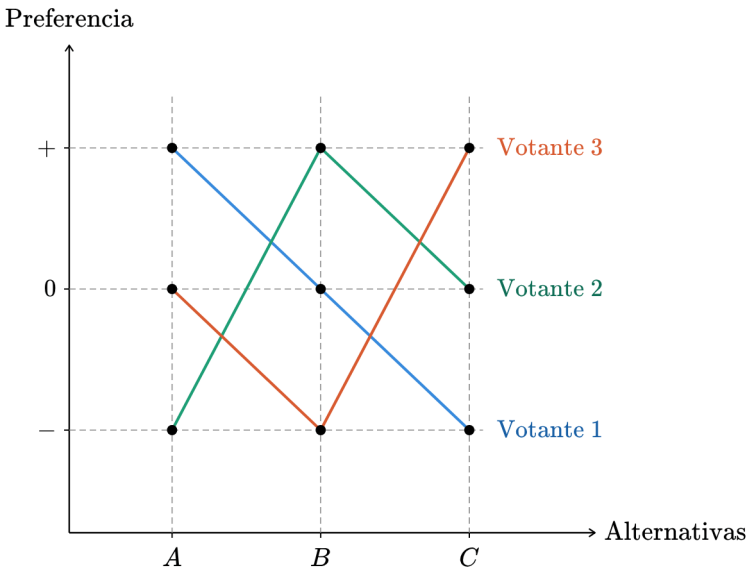


Figura A24.7: Ciclos en la votación por mayoría simple (paradoja de Condorcet).

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: con un ejemplo mínimo separa la racionalidad individual de la colectiva, pues preferencias individuales coherentes pueden dar lugar a una decisión colectiva incoherente. La paradoja anticipa también el teorema de Arrow y abre el análisis de la manipulación de la agenda y del voto estratégico.

▪ *Limitaciones*: es un resultado de posibilidad y no de frecuencia, pues los ciclos solo aparecen con determinados perfiles de preferencias. Su relevancia práctica depende, por tanto, de la distribución de las preferencias, y desaparece cuando estas son unimodales.

3.1.3. Renuncia a la universalidad: preferencias unimodales y teorema del votante mediano (Black, 1948)

Origen: Duncan Black (1948) mostró que la paradoja de Condorcet desaparece si las preferencias tienen una estructura particular, y con ello fundó la teoría moderna de la votación.

Idea: con un número impar de votantes y preferencias *unimodales* en todos ellos (un solo máximo), la mayoría simple genera una ordenación colectiva transitiva y elige una única alternativa.

El precio es la universalidad, aunque es un precio moderado, porque lo único que se descarta son perfiles extremistas. Por ejemplo, quien prefiere ante todo mucho gasto público difícilmente pondrá el gasto nulo por delante del gasto medio[7]. Por ello, se considera preferible perder universalidad a perder transitividad.

Razonamiento: según el *teorema del votante mediano*, si las alternativas se ordenan en una sola dimensión y las preferencias son unimodales, la mayoría elige el óptimo del *votante mediano*, el que deja a cada lado el mismo número de votantes. Cualquier alternativa situada a la izquierda de su óptimo es derrotada por este con los votos del mediano y de todos los situados a su

[7] La unimodalidad deriva de los supuestos habituales de concavidad de las funciones de utilidad. La existencia de extremismo no implica necesariamente ciclicidad.

derecha, y simétricamente para las de la derecha. El óptimo del mediano es, así, un ganador de Condorcet.

Desarrollo gráfico: el teorema del votante mediano se representa en el plano alternativas-preferencia (figura A24.8):

1. *Votante 1*: ordena $A \succ B \succ C$, con un único máximo, en A.

2. *Votante 2 (mediano)*: ordena $B \succ C \succ A$, con un único máximo, en B.

3. *Votante 3*: ordena $C \succ B \succ A$, con un único máximo, en C.

4. *Equilibrio*: gana B, la alternativa preferida por el votante mediano, que vence a A con los votos de 2 y 3 y a C con los de 1 y 2.

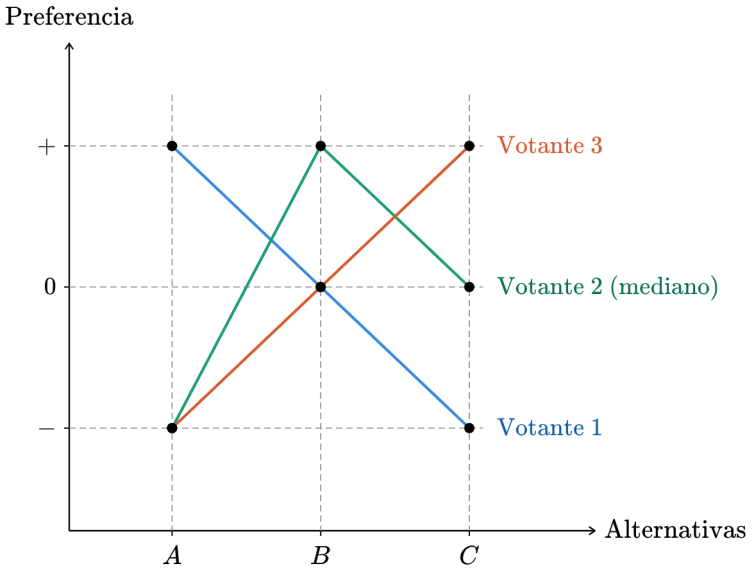


Figura A24.8: Preferencias unimodales y teorema del votante mediano (Black, 1948).

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: el teorema explica la convergencia de los partidos hacia el centro y es el fundamento del modelo de Downs.

▪ *Limitaciones*: la valoración marginal del mediano y la de la sociedad pueden diferir. En la provisión de bienes públicos, por ejemplo, la condición de Samuelson exige $\sum \text{RMS} = \text{RMT}$, pero la mayoría simple iguala la valoración marginal del mediano a la parte del coste marginal que le corresponde pagar (RMT/H con un reparto igualitario del coste). El resultado solo es eficiente, por tanto, si la valoración del mediano coincide con la media, y en otro caso hay infraprovisión o sobreprovisión.

3.1.4. Aplicación a la democracia representativa: el modelo de Downs-Hotelling (1957)

Origen: Anthony Downs (1957) aplicó a la competencia electoral el modelo de localización de Hotelling (1929) del tema A18. En democracia representativa la decisión sigue una cadena de tres eslabones, en la que los ciudadanos eligen a los políticos, estos eligen los programas y los burócratas los aplican.

Idea: si compiten dos partidos y lo único que se vota es la posición ideológica, ambos se desplazan hacia el centro y acaban ofreciendo programas casi idénticos, ceñidos a lo que prefiere el votante mediano, y la política reproduce así el *principio de diferenciación mínima*.

Supuestos:

▪ *Entorno*: información perfecta, sistema bipartidista y una única dimensión de elección, la ideología.

▪ *Agentes*: los partidos son racionales y buscan maximizar el número de votos mediante la propuesta de programas. Los votantes son racionales, tienen preferencias unimodales sobre la ideología, difieren en ella, se distribuyen de forma homogénea a lo largo del espectro y votan al partido cuyo programa está más cerca de su posición.

Razonamiento: si el partido 1 propone un programa, el partido 2 puede proponer un programa más próximo al votante mediano y acaparar votantes. El partido 1, al darse cuenta, reacciona acercándose también al mediano. El proceso se repite hasta que ambos partidos proponen programas con ideologías iguales, o muy similares, a la del votante mediano.

Equilibrio: ambos partidos se sitúan en la posición del votante mediano. El equilibrio es de Nash, pues ninguno puede ganar votos desplazándose, y el programa elegido es el ganador de Condorcet, que no tiene por qué ser eficiente.

Estática comparativa: si las preferencias de los votantes se desplazan y, con ellas, la posición del votante mediano, ambos partidos desplazan sus programas en la misma dirección hasta la nueva posición mediana. Solo importa la posición del mediano, de modo que un cambio en las preferencias de los votantes extremos que no la altere no modifica el equilibrio.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: ofrece una explicación realista de la convergencia de los programas hacia el centro en los países bipartidistas (EE. UU., Reino Unido), y conecta la teoría de la elección pública con la de la diferenciación de producto.

▪ *Limitaciones*: los resultados dependen estrechamente de los supuestos. Con más de dos partidos, por ejemplo, entran en juego el voto útil, las coaliciones y el extremismo, y el equilibrio de convergencia desaparece. Además, con información imperfecta surgen costes de información, que producen varios efectos:

- *Partidos*: necesitan recursos para financiar sondeos y campañas, lo que aumenta el poder de los grupos de presión.
- *Votantes*: han de invertir tiempo y dinero en averiguar qué partido representa mejor sus preferencias. De ello resultan la abstención racional (la probabilidad de que un voto altere la decisión es prácticamente nula), la persuasión por carisma en lugar de por programa, la ilusión fiscal (se vota según los impuestos percibidos y no la presión fiscal real) y la ilusión de

deuda (los agentes perciben la deuda pública como riqueza neta, en contra de la equivalencia ricardiana)[8].

3.2. El levantamiento de los axiomas de Arrow (II): independencia de alternativas irrelevantes

En la votación por mayoría, un voto tibio pesa lo mismo que uno muy convencido. Al dejar fuera la **intensidad de las preferencias**, como exige la independencia de alternativas irrelevantes, la regla puede decidir de forma ineficiente. Las dos reglas siguientes sacrifican la IAI para dar entrada a esa intensidad, una a través de la negociación y otra puntuando la ordenación completa de cada votante.

3.2.1. El intercambio de votos o *log-rolling* (Buchanan y Tullock, 1962)

Origen: la práctica es tan antigua como los parlamentos, pero su análisis económico se debe a Buchanan y Tullock (1962), que la presentaron como la vía por la que la intensidad de las preferencias entra en la decisión mayoritaria.

Idea: cuando cabe pactar antes de votar y aprobar una propuesta no impide aprobar otra, una minoría puede ganarse el apoyo de la mayoría con el *intercambio de votos*. Cada votante respalda la propuesta ajena a cambio de apoyo para la suya, y quien tiene mucho interés en algo lo consigue cediendo en lo que le importa poco (sistema de concesiones mutuas).

Razonamiento: entre tres votantes, el 1 es el único beneficiado por un proyecto de gasto y el 2 por otro, ambos pagados a partes iguales por los tres y con beneficios totales superiores a su coste. Votados por separado, los dos fracasan, porque el votante 3 se une en cada caso al que no gana nada. Lo eficiente, sin embargo, es realizarlos y compensar al votante 3. El pacto entre 1 y 2 permite aprobarlos, siempre que se voten juntos en un único paquete, pues, si se votaran uno tras otro, quien ya tuviera aprobado su proyecto no tendría motivo para cumplir con el otro.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: da cabida a la intensidad de las preferencias en la votación por mayoría, de modo que pueden aprobarse proyectos socialmente beneficiosos que la mayoría simple rechazaría. Explica, además, una práctica habitual de los parlamentos, la de los paquetes legislativos y las concesiones mutuas entre grupos.

- *Limitaciones*: el intercambio de votos falla en tres frentes. Con muchos votantes, negociar sale demasiado caro y el mecanismo deja de funcionar. Además, la coalición ganadora no está obligada a compensar a los perdedores, de modo que la minoría puede salir explotada y la ganancia de eficiencia se paga con equidad. Por último, el intercambio de votos puede producir el error contrario, la sobreprovisión, cuando una coalición aprueba medidas que la favorecen aunque a la sociedad le cuesten más de lo que le aportan.

[8] Con abstención, el mediano de quienes votan puede no ser el del censo, y algunas minorías pueden ganar un peso desproporcionado.

3.2.2. El voto ponderado o regla de Borda (1770)

Origen: propuesta por Nicolás de Cusa (1433) y formalizada por Jean-Charles de Borda (1770), es la regla de votación por puntos más antigua y la alternativa clásica a la mayoría por pares.

Idea: con n alternativas, la regla asigna a cada una n puntos si es la más preferida por un votante, $n-1$ si es la segunda, y así sucesivamente, y elige la que más puntos acumula.

Razonamiento: a diferencia de la mayoría simple, tiene en cuenta la ordenación completa de cada votante y, con ello, una medida ordinal de la intensidad de las preferencias. Por ejemplo, una alternativa que es segunda para casi todos puede vencer a otra que es primera para una mayoría escasa y última para el resto. Al agregar posiciones en lugar de comparar pares, produce siempre una ordenación completa y transitiva y evita los ciclos de Condorcet, al precio de violar la IAI, pues la puntuación de una alternativa depende de cuántas otras haya y de dónde se sitúen.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: al puntuar la ordenación completa de cada votante, favorece las alternativas de consenso, aceptables para casi todos, frente a las que solo prefiere intensamente una mayoría escasa. Garantiza, además, un resultado social sin ciclos y es sencilla de aplicar.

- *Limitaciones*: la regla tiene dos problemas. Los empates son más frecuentes y, además, cabe manipularla, ya que a un votante le puede convenir declarar un orden falso y relegar al último puesto a la principal rival de su opción favorita (voto estratégico). Esa manipulabilidad no es exclusiva de la regla de Borda.

3.3. La ampliación de la base informacional (Sen, 1970a; Harsanyi, 1955; d'Aspremont y Gevers, 1977)

Origen: Amartya Sen (*Collective Choice and Social Welfare*, 1970a) reinterpretó el teorema de Arrow como un resultado sobre la información que la regla de elección puede usar, es decir, las ordenaciones individuales, ordinales y no comparables entre personas.

Idea: si se admiten utilidades cardinales y comparables entre personas, la agregación deja de ser imposible y el problema pasa a ser cuál de las reglas posibles se elige, lo que cada supuesto informacional responde de manera distinta.

Razonamiento: tres resultados marcan el programa. El primero, el *teorema de agregación de Harsanyi* (1955), es distinto del argumento del velo de la ignorancia del apartado 1.2.1. Muestra que, si las preferencias individuales y las sociales cumplen los axiomas de la utilidad esperada y la regla social respeta el principio de Pareto, la FBS ha de ser una suma ponderada de utilidades, con pesos iguales si se exige además anonimato. El utilitarismo se deriva así de la racionalidad bajo incertidumbre, sin postularlo.

Los *teoremas de caracterización de d'Aspremont y Gevers* (1977) precisan qué regla corresponde a cada supuesto informacional:

- *Comparabilidad de niveles* (puede decirse quién está peor, no cuánto): los axiomas de Arrow más el anonimato y un axioma adicional de equidad (la equidad de Hammond, 1976) conducen al *leximin*, la versión lexicográfica del *maximin* de Rawls.

- *Comparabilidad de unidades* (puede decirse cuánto gana uno y cuánto pierde otro, no quién está mejor): los axiomas de Arrow más el anonimato conducen al utilitarismo.

- *Plena comparabilidad*: ambas reglas son posibles y la elección es un juicio de valor.

Por último, los *resultados de posibilidad de Sen* muestran que, incluso con información ordinal, restringir el dominio (preferencias unimodales, como en Black) o relajar la transitividad social a la cuasitransitividad permite reglas no dictatoriales, aunque a costa de oligarquías o de indecisión.

Distintos supuestos informacionales conducen, así, a distintas funciones de bienestar, y los criterios ético-lógicos del apartado 1.2 aparecen como consecuencias de la información que la sociedad acepta usar, y no como postulados.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: sitúa la causa de la imposibilidad de Arrow en la escasez de información que admite la regla, recupera reglas no dictatoriales y da fundamento axiomático al utilitarismo y al *leximin* a partir de los supuestos sobre la información disponible.

- *Limitaciones*: traslada el problema a la justificación de las comparaciones interpersonales de utilidad, cuya medición carece de una base empírica aceptada. Además, los teoremas de caracterización necesitan axiomas adicionales, como la equidad de Hammond, cuya aceptación es en sí misma un juicio ético.

3.4. Manipulación e implementación

Las reglas anteriores suponen que los votantes declaran sus preferencias verdaderas. Cuando actúan estratégicamente, la pregunta pasa a ser qué reglas resisten la manipulación y qué reglas puede hacer funcionar un mecanismo bien diseñado.

3.4.1. La manipulación: el teorema de Gibbard-Satterthwaite (1973)

Origen: Allan Gibbard (1973) y Mark Satterthwaite (1975) trasladaron el teorema de Arrow del problema de agregar preferencias al de diseñar reglas de votación que no puedan manipularse.

Idea: todo mecanismo de elección colectiva no dictatorial, definido para cualquier perfil de preferencias y con al menos tres alternativas que puedan resultar elegidas, es manipulable. Ser manipulable significa que existe siempre algún perfil de preferencias en el que a algún individuo le conviene declarar preferencias distintas de las verdaderas.

Razonamiento: el resultado se obtiene con axiomas aún más débiles que los de Arrow y es equivalente a su teorema. En ausencia de mecanismos correctores, hay perfiles en los que a los agentes les conviene el comportamiento estratégico, como muestran el voto útil, la manipulación de la regla de Borda o la ocultación de preferencias en la provisión de bienes públicos.

La salida pasa por restringir el dominio de las preferencias o por debilitar el concepto de equilibrio exigido. Por ejemplo, con preferencias cuasilineales y transferencias monetarias puede hacerse que decir la verdad sea la estrategia dominante, imponiendo a cada agente un pago igual al coste que su declaración impone a los demás, que es la lógica del mecanismo de Clarke-Groves-Vickrey (tema A23). El teorema es, así, uno de los puntos de partida de la teoría del diseño de mecanismos.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: generaliza a toda regla no dictatorial la manipulabilidad observada en reglas concretas. Con ello, el comportamiento estratégico deja de ser una anomalía de ciertas reglas y pasa a ser un rasgo general de la elección colectiva que el diseño institucional ha de tener en cuenta.

- *Limitaciones*: es un resultado de existencia, pues asegura que hay algún perfil en el que manipular conviene, pero no que sea frecuente ni fácil, ya que la manipulación exige conocer las preferencias de los demás. Además, depende del dominio universal, y con dominios restringidos, como el de las preferencias unimodales, existen reglas no manipulables.

3.4.2. La implementación: el teorema de Maskin (1977)

Origen: Eric Maskin (1977, publicado en 1999), premio Nobel en 2007 con Hurwicz y Myerson, planteó la pregunta inversa a la de Arrow. Estudió si, dada una regla de elección social deseable, existe un mecanismo cuyo equilibrio la produzca aunque los agentes actúen estratégicamente.

Idea: una regla es *implementable* en equilibrio de Nash si puede diseñarse un juego en el que, para cualquier perfil de preferencias, el conjunto de equilibrios coincide con lo que la regla prescribe. Frente a Gibbard-Satterthwaite, que excluye la implementación en estrategias dominantes de toda regla no dictatorial con tres o más alternativas elegibles, Maskin muestra qué reglas son implementables en equilibrio de Nash.

Razonamiento: la condición necesaria es la *monotonicidad de Maskin*. Según esa condición, si una alternativa es elegida bajo un perfil de preferencias y, al cambiar el perfil, no empeora en la ordenación de ningún individuo respecto a ninguna otra, ha de seguir siendo elegida. Con tres o más agentes, la monotonicidad y la ausencia de veto son también suficientes. La intuición es que el mecanismo solo puede reaccionar a cambios que los propios agentes tengan interés en revelar.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: la teoría de la implementación fundamenta los mecanismos de revelación del tema A23 y la teoría de la regulación con información asimétrica del tema A20.

- *Limitaciones*: supone que los agentes conocen las preferencias de los demás, aunque el diseñador las desconozca, y los mecanismos que construye la demostración son complejos y poco realistas. Además, la monotonicidad es una condición exigente, que no cumplen muchas reglas atractivas que eligen una sola alternativa.

3.5. Negociación y juegos cooperativos

En lugar de agregar preferencias, la teoría de la negociación estudia qué acuerdo alcanzan dos partes (el problema de Nash), y la de los juegos cooperativos, cómo se reparte entre varios jugadores lo que cada coalición puede obtener.

3.5.1. La teoría axiomática de la negociación (Nash, 1950)

Origen: casi al mismo tiempo que Arrow declaraba imposible la elección colectiva, John Nash (1950) publicaba un teorema de posibilidad, el de la existencia de una solución única al problema de negociación entre dos partes.

Idea: un problema de negociación se define por el conjunto de pares de utilidades alcanzables mediante acuerdo, S, y por el punto de desacuerdo, d, que es lo que cada parte obtiene si no hay acuerdo. Nash no pregunta cómo negocian las partes sino qué propiedades debería tener el resultado, y demuestra que cuatro axiomas lo determinan de forma única.

Razonamiento: los axiomas son la *eficiencia* (el acuerdo está sobre la frontera de S), la *simetría* (si el problema es simétrico, la solución también), la *invariancia* ante transformaciones afines de las utilidades (el resultado no depende de la escala en que se midan) y la *independencia de alternativas irrelevantes* (eliminar opciones no elegidas no cambia la elección). La única solución que los cumple es la que maximiza el producto de las ganancias sobre el punto de desacuerdo, $\max_{(u^A,u^B)\in S}(u^A-d^A)(u^B-d^B)$. Esta *solución de Nash* equivale a la función de bienestar social de Bernoulli-Nash del apartado 1.2.2 con origen en el desacuerdo.

Frente a Arrow, Nash obtiene una solución única porque su problema tiene más estructura (utilidades cardinales, un punto de desacuerdo, dos partes) y porque renuncia al dominio universal. La solución de Nash es hoy la referencia de la negociación salarial (tema A27). El reparto de las ganancias de la coordinación internacional se aborda, en cambio, con el núcleo y el valor de Shapley del apartado siguiente (tema B19, apartado 2.1.4).

CSO: la compacidad y convexidad del conjunto S y la estricta cuasiconcavidad del producto de Nash garantizan que el máximo existe y es único.

Conclusiones:

- *Aspectos positivos*: obtiene de unos pocos axiomas una solución única al problema de reparto, que enlaza la teoría de la negociación con la elección social a través de la FBS de Bernoulli-Nash. La solución recibió después un fundamento no cooperativo en el modelo de ofertas alternas (tema A14).

- *Limitaciones*: es una teoría axiomática que no describe el proceso de negociación, y su axioma de independencia de alternativas irrelevantes es el más discutido. Además, el resultado depende del punto de desacuerdo, que el modelo toma como dado, y supone información completa sobre las utilidades de ambas partes.

3.5.2. Los juegos cooperativos: el núcleo y el valor de Shapley (Gillies, 1959; Shapley, 1953)

Origen: los dos conceptos de solución de los juegos cooperativos se deben a Donald Gillies (1959) y Lloyd Shapley (1953), contemporáneos de la solución de negociación de Nash (1950) del apartado anterior.

Idea: cuando negocian más de dos partes que pueden formar coaliciones, el problema es cómo repartir el valor que cada coalición puede generar. La teoría de los juegos cooperativos propone dos conceptos de solución de distinto carácter (tema A14).

Razonamiento: el *núcleo* es el conjunto de repartos que ninguna coalición puede mejorar por su cuenta. El núcleo es un concepto de estabilidad y puede ser vacío (ningún reparto es estable) o contener muchos repartos. En una economía de intercambio coincide con las asignaciones que ninguna coalición de agentes bloquearía y, si la economía se replica, se reduce al conjunto de equilibrios competitivos a medida que crece el número de agentes (tema A21).

El *valor de Shapley* (1953) es, en cambio, un concepto de equidad, que asigna a cada jugador la media de su contribución marginal en todos los órdenes posibles de formación de la gran coalición. Solo este reparto cumple los axiomas de eficiencia, simetría, tratamiento nulo de los

jugadores que no aportan y aditividad. El valor de Shapley existe siempre, es único y puede quedar fuera del núcleo.

Conclusiones:

▪ *Aspectos positivos*: la aplicación del valor de Shapley al reparto de costes de un bien público entre sus usuarios o al poder de voto en los organismos internacionales (índice de Shapley-Shubik) muestra su alcance práctico.

▪ *Limitaciones*: ninguno de los dos conceptos resuelve por sí solo el problema de reparto, pues el de estabilidad puede no existir o no ser único y el de equidad puede no ser estable. Ambos suponen, además, que los acuerdos dentro de una coalición son vinculantes y no describen el proceso de negociación que conduce a ellos.

3.6. Conclusiones

Cada regla de votación renuncia a alguno de los axiomas de Arrow. La unanimidad y las mayorías cualificadas no deciden siempre, y la mayoría óptima equilibra los costes de decisión y los externos. La mayoría simple puede generar ciclos, que desaparecen con preferencias unimodales, y entonces gana el óptimo del votante mediano, hacia el que convergen los partidos en el modelo de Downs. El intercambio de votos y la regla de Borda dan entrada a la intensidad de las preferencias a costa de la independencia de alternativas irrelevantes.

La ampliación de la base informacional sitúa la causa de la imposibilidad en la información que admite la regla, y con utilidades comparables da fundamento axiomático al utilitarismo y al *leximin*. Ninguna regla no dictatorial con dominio universal y tres o más alternativas elegibles escapa, sin embargo, a la manipulación (Gibbard-Satterthwaite), y la teoría de la implementación de Maskin muestra qué reglas pueden sostenerse en equilibrio de Nash. La negociación y los juegos cooperativos, por último, sustituyen la agregación por el acuerdo y obtienen soluciones únicas, como la de Nash o el valor de Shapley, porque su problema tiene más estructura que el de Arrow.

Conclusiones

El tema ha estudiado cómo resolver la indeterminación paretiana. La función de bienestar social elige el *optimum optimorum* según un juicio explícito sobre la desigualdad. La aversión a la desigualdad es nula en el utilitarismo, unitaria en el criterio de Bernoulli-Nash e infinita en el *maximin* de Rawls. Los índices de desigualdad y de pobreza llevan implícita una de esas funciones. Sin embargo, el teorema de Arrow demuestra que ninguna regla basada solo en preferencias ordinales y no comparables cumple a la vez sus cinco axiomas. Las reglas de votación renuncian a alguno de ellos y, como muestran Gibbard y Satterthwaite, son manipulables salvo dictadura o dominio restringido. Por ello, la teoría posterior amplía la información que usa la regla o pasa a la negociación y al diseño de mecanismos.

La elección social cierra la economía del bienestar y desarrolla la función de bienestar social que la indeterminación paretiana hace necesaria (tema A22). Sus resultados explican los fallos del sector público. La manipulabilidad de las reglas está detrás de la ocultación de preferencias en la provisión de bienes públicos, y las reglas de votación, detrás de la teoría de la elección pública y de los remedios que propone (tema A23). Por su parte, los criterios de compensación de Kaldor y Hicks se aplican en el análisis coste-beneficio de los proyectos públicos (tema A20), el núcleo, el valor de Shapley y la solución de Nash proceden de los juegos cooperativos (tema A14), y la medición de la pobreza fundamenta los indicadores de desarrollo (tema B28).

La medición de la desigualdad en Estados Unidos depende del tratamiento de los datos fiscales. Piketty, Saez y Zucman (2018) estiman un fuerte aumento de la participación del 1 % más rico en la renta desde 1980. Auten y Splinter (2024) muestran, en cambio, que ese aumento se reduce mucho al corregir los cambios de la legislación fiscal y la renta no declarada. Sigue abierto, además, el debate sobre el uso de la FBS en la política fiscal. Saez y Stantcheva (2016) proponen pesos sociales marginales generalizados, que recogen juicios no bienestaristas, y Hendren y Sprung-Keyser (2020) comparan las políticas por el valor marginal de los fondos públicos (*marginal value of public funds*). En la inteligencia artificial, agregar las valoraciones de evaluadores con preferencias diversas para ajustar un modelo de lenguaje es también un problema de elección social (Conitzer et al., 2024).